E. PASCAL

REPERTORIUM DER HÖHEREN MATHEMATIK

II: GEOMETRIE

BG

Eberhard, V., die Grundgebilde der ebenen Geometrie. 2 Bände. I. Bd. 1895. n. ℳ 14.—. [Der II. Band in Vorbereitung.]

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschlufs ihrer. Anwendungen. Herausgegeben im Auftrage der Akademieen der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je etwa 40 Druckbogen. Jährlich 1 Band in 4—6 Heften. 1898—1904.

Band I: **Arithmetik und Algebra**, red. von W. Fr. Meyer; II: **Analysis**, red. von H. Burkhardt; III: **Geometrie**, red. von W. Fr. Meyer; IV: **Mechanik**, red. von F. Klein; V: **Physik**, red. von A. Sommerfeld; VI, 1: **Geodäsie und Geophysik**, red. von E. Wiechert; VI, 2: **Astronomie** (in Vorbereitung); VII: Schlufsband, **historische, philosophische** und **didaktische** Fragen behandelnd, sowie **Generalregister** zu Band I—VI. Herausg. von W. Fr. Meyer.

Bisher erschienen: I, 1. 1898. n. ℳ 3.40; I, 2 1899. n. ℳ 3.40; I, 3. 1899. n. ℳ 3.80; I, 4. 1899. n. ℳ 4.80; I, 5. 1900. n. ℳ 6.40; I, 6. 1901. n. ℳ 7.20. II, 1. 1899. n. ℳ 4.80; II, 2/3. 1900. n. ℳ 7.50; II, 4. 1900. n. ℳ 4.80. IV, 1. 1901. n. ℳ 3.40; IV, 2. 1901. n. ℳ 3.80.

Unter der Presse: I, 7 (Schlufs); II, 1, 5 (Schlufs); II, 2, 1; III, 3, 1; IV, 1, 2.

Fiedler, W., die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3. Aufl. 3 Teile. I. Teil: Die Methoden der darstellenden Geometrie und die Elemente der projektivischen Geometrie. 1883. n. ℳ 8.40; II. Teil: Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 1885. n. ℳ 14.—; III. Teil: Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 1888. n. ℳ 16.—

——— Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme. 1882. n. ℳ 9.—

Föppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.— I. Bd.: Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. 1900. geb. n. ℳ 10 —; II. Bd.: Graphische Statik. 1900. geb. n. ℳ 10.—; III. Bd.: Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. 1900. geh. n. ℳ 12.—; IV. Bd.: Dynamik. 1899. geb. n. ℳ 12.—.

——— Leitfaden und Aufgabensammlung für den Unterricht in der angewandten Mechanik. 2 Hefte. 1890. In Leinw. geb. n. ℳ 4.40.

Fort, O., und **O. Schlömilch**, Lehrbuch der analyt. Geometrie 2 Teile. I. Teil: Analytische Geomtrie der Ebene von O. Fort. 6. Aufl. von R. Heger. 1893. n. ℳ 4.—; II. Teil: Analytische Geometrie des Raumes von O. Schlömilch 6. Aufl. von R. Heger. 1898. n. ℳ 5.—

Fricke, R., kurzgefafste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-functionentheoretischer Teil. Mit 102 in den Text gedrukten Figuren. 1900. geb. n. ℳ 14.—

Fricke, R., u. **F. Klein**, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. In 2 Bänden. II. Bd. 1. Hälfte. Mit 34 in den Text gedruckten Figuren. 1901. geh. n. ℳ 10.—

Ganter, H., und **F. Rudio**, die Elemente der analytischen Geometrie. In zwei Teilen. Mit zahlr. Übungsbeispielen. I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene von Ganter. 4. Aufl. 1900. n. ℳ 3.—; II. Teil: Die analytische Geometrie des Raumes von Rudio. 3. Aufl. 1902. n. ℳ 3.—.

Genocchi, A., Differentialrechnung und Anfangsgründe der Integralrechnung, herausgegeben von Giuseppe Peano. Autoris. deutsche Übersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp. Mit einem Vorwort von A. Mayer. 1899. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Gordan, P., Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von G. Kerschensteiner. I. Bd.: Determinanten. 1885. n. ℳ 6.40; II. Bd.: Binäre Formen. 1887. n. ℳ 11.60. [Der dritte (Schlufs-) Band in Vorbereitung.]

Gundelfinger, S., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von F. Dingeldey. Mit einem Anhange, enthaltend Aufgaben und weitere Ausführungen. 1895. n. ℳ 12.—

——— Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinometrischer Gleichungen. Hinzugefügt sind vierstellige Additions-, Subtraktions- und Briggische Logarithmen sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter Hundert. 1897. Steif geh. n. ℳ 1.40.

Hammer, E., Sechsstellige Tafel der Werte $\overset{10}{\log}\,\frac{1+x}{1-x}$. Für jeden Wert des Arguments $\log x$ von $3.0-10$ bis $9.99000-10$. (vom Argument $9.99000-10$ an bis $9.999700-10$ sind die $\log\frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig. 1902. geb. n. ℳ 3.60.

Holzmüller, G., die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. I. Teil, enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye. Mit zahlreichen Übungsaufgaben. 1897. In Leinw. geb. n. ℳ 5 —; II. Teil, enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorieen der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und einem Anhange über Mafseinheiten. 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

Kötter, E., die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). 1901. geh. n. ℳ 18.80.

Kronecker, L., Vorlesungen über Zahlentheorie. I. Band. Herausgegeben von Kurt Hensel. 1901. geh. n. ℳ 18.—

Minkowski, H., Geometrie der Zahlen. In 2 Lieferungen. I. Lieferung. 1896. n. ℳ 8.—. [Die II. Lieferung in Vorbereitung.]

Müller, F., mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. 1901. geb. n. ℳ 20.—

Muth, P., Theorie und Anwendung der Elementarteiler. 1899. n. ℳ 8.—

Netto, E., Vorlesungen über Algebra. 2 Bände. I. Band. 1896. n. ℳ 12.—; II. Band. 1900. n. ℳ 16.—

ERNST PASCAL,
ORDENTLICHER PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU PAVIA.

REPERTORIUM DER HÖHEREN MATHEMATIK

(DEFINITIONEN, FORMELN, THEOREME, LITERATUR)

AUTORISIRTE DEUTSCHE AUSGABE
NACH EINER NEUEN BEARBEITUNG DES ORIGINALS
VON

A. SCHEPP
OBERLEUTNANT A. D. ZU WIESBADEN.

ANALYSIS UND GEOMETRIE.

II. THEIL: DIE GEOMETRIE.

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Vorbemerkung.

An der Herstellung der deutschen Ausgabe des zweiten Bandes des Pascal'schen Repertoriums, dessen italienischer Titel

„*Repertorio di matematiche superiori (definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici) per Ernesto Pascal, prof. ordinario nella R. Università di Pavia, II. Geometria, Ulrico Hoepli, editore-librajo della real casa, Milano 1900*“

lautet, haben sich in derselben Art, wie bei dem ersten Band, durch Zusätze und Verbesserungen bei der Durchsicht der Druckbogen die Herren Professor Dr. F. Engel in Leipzig, Privatdocent Dr. A. Loewy in Freiburg i. B., sowie der Herr Verfasser Professor E. Pascal in Mailand betheiligt. Der Herausgeber spricht ihnen für ihre gütigen Bemühungen seinen verbindlichsten Dank aus.

Auf die Zusätze und Berichtigungen zu Band 1 und 2 am Ende des Buches sei besonders hingewiesen.

Wiesbaden, im November 1901.

A. S.

Inhaltsverzeichniss.

Kapitel IV. **Die Flächen 2^{ter} Ordnung.**

Kapitel V. **Allgemeine Theorie der ebenen algebraischen Curven.**

Kapitel VI. **Die Theorie der ebenen Connexe.**

Kapitel VII. **Die ebenen Curven 3^{ter} Ordnung.**

Kapitel VIII. **Die ebenen Curven 4^{ter} Ordnung.**

Kapitel IX. **Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen und algebraischen Raumcurven.**

Kapitel XVII. **Metrisch specialisirte Haupterzeugungsarten und Transformationen von Curven und Flächen. Die Geometrie specieller Curven.**

Kapitel XVIII. **Analysis situs oder Topologie. Polyedertheorie. Zusammenhang der Riemann'schen Flächen.**

Kapitel I.

Die Geometrie der stetigen Grundgebilde.

§ 1. Einleitende Definitionen und Begriffe.

Mit dem Namen *geometrische Grundgebilde 1ter Stufe* bezeichnet man die folgenden drei geometrischen Figuren:

1. *Die gerade Punktreihe,* d. h. die Gesammtheit aller auf einer Geraden liegenden Punkte, *der Elemente des Gebildes.* Die Gerade heisst *der Träger der Punktreihe.*

2. *Das Strahlenbüschel*, d. h. die Gesammtheit aller Geraden einer Ebene, welche durch einen Punkt, *den Träger oder Scheitel des Büschels,* gehen.

3. *Das Ebenenbüschel,* d. h. die Gesammtheit aller Ebenen des Raums, welche eine Gerade, *den Träger oder die Axe des Büschels,* gemeinschaftlich haben.

Geometrische Gebilde 2ter Stufe nennt man die folgenden vier geometrischen Figuren:

1. *Das ebene Punktsystem*, d. h. die Gesammtheit aller Punkte einer Ebene.

2. *Das ebene Strahlensystem,* d. h. die Gesammtheit aller in einer Ebene liegenden Strahlen.

3. *Das Strahlenbündel,* d. h. die Gesammtheit aller durch einen Punkt gehenden Geraden des Raums.

4. *Das Ebenenbündel,* d. h. die Gesammtheit aller durch einen Punkt gehenden Ebenen des Raums.

Geometrische Gebilde 3ter Stufe heissen schliesslich die folgenden:

1. *Das räumliche Punktsystem,* d. h. die Gesammtheit aller Punkte des Raums.

2. *Das räumliche Ebenensystem*, d. h. die Gesammtheit aller Ebenen des Raums.

Der Kürze wegen pflegt man auch die Gesammtheit aller Punkte und Strahlen eines ebenen Punkt- und Strahlensystems *ein ebenes System* und die Gesammtheit aller Strahlen und Ebenen der denselben Punkt als Träger enthaltenden beiden Strahlen- und Ebenenbündel *ein räumliches Bündel* oder *Bündel* schlechtweg zu nennen. Die Gesammtheit der beiden Gebilde 3ter Stufe endlich heisst *der Raum*.

Wenn ein geometrisches Gebilde 1ter Stufe gegeben ist, so lässt sich eine solche Correspondenz zwischen seinen Elementen und den Zahlen der natürlichen Reihe herstellen, dass jedem Element eine einzige Zahl und jeder Zahl nur ein einziges Element entspricht, und dass ferner, wenn eine Zahl N und das entsprechende Element a festgestellt sind, sich bei beliebig klein gegebenem σ immer eine solche Grösse τ finden lässt, für welche die Elemente, die allen zwischen N und $N+\tau$ liegenden Zahlen entsprechen, einen Abstand von a haben (wenn es sich um Punktreihen handelt) oder (bei Büscheln) einen Winkel mit a bilden, der kleiner als σ ist. Dieser beiden Eigenschaften wegen heisst die Correspondenz *ein-eindeutig* und *stetig*.

Ist ein geometrisches Gebilde 2ter oder 3ter Stufe gegeben, so lässt sich auf ähnliche Art eine ein-eindeutige und stetige Correspondenz zwischen seinen Elementen und den Paaren bez. Tripeln der natürlichen Zahlen herstellen, wenn man „stetige Correspondenz" so definirt, wie es eben bei den Gebilden 1ter Stufe geschehen ist.

Die Zahlen, welche auf solche Art den Elementen des gegebenen Gebildes entsprechen, heissen *die Coordinaten der Elemente dieses Gebildes.*

Die Gebilde 1ter, 2ter, 3ter Stufe sind Gebilde mit einer, bez. zwei und drei Coordinaten.

Man sagt auch, die Gebilde 1ter, 2ter, 3ter Stufe seien *von einer, zwei, bez. drei Dimensionen* oder sie enthalten ∞^1, ∞^2, ∞^3 Elemente.

Von einem festen Centrum, dem Projectionscentrum aus eine aus Punkten und Geraden bestehende Figur *projiciren*, heisst, die Strahlen construiren, welche von dem Centrum aus durch die Punkte der Figur gehen, und die Ebenen ziehen, welche das feste Centrum und die Geraden der Figur verbinden.

Von einer festen Geraden, der Projectionsaxe aus eine aus Punkten bestehende Figur *projiciren*, heisst, die durch die feste

Gerade und jeden der gegebenen Punkte gehenden Ebenen construiren.

Eine aus Ebenen und Geraden zusammengesetzte Figur *mit einer Ebene schneiden* bedeutet, die Schnitte der schneidenden Ebene mit den gegebenen Ebenen und Geraden construiren.

Eine aus Ebenen bestehende Figur *mit einer Geraden schneiden,* heisst die Schnitte der Geraden mit allen Ebenen der Figur construiren.

Die geometrischen Gebilde derselben Stufe werden durch Projectionen und Schnitte auseinander abgeleitet.

In der modernen Geometrie ist das Studium der Zuordnungen oder Correspondenzen zwischen den Figuren oder den geometrischen Gebilden besonders dann von grosser Bedeutung, wenn es den Zweck verfolgt, die Eigenschaften einer Figur aus den Eigenschaften der ihr entsprechenden Figur abzuleiten.

Eine Correspondenz kann *ein-eindeutig* sein oder nicht. Sie ist *ein-eindeutig,* wenn jedem Element des einen der beiden Gebilde ein einziges Element des anderen entspricht und umgekehrt.

Die beiden in Beziehung gesetzten Gebilde können auch *superponirt* oder *conlocal* (Weyr, *Projectivische Geometrie,* Wien 1883) sein, d. h. *denselben Träger* haben. In diesem Fall kann die Correspondenz derart sein, dass einem Element immer dasselbe andere Element entspricht, mag nun das erstere als dem einen oder dem anderen Gebilde angehörig betrachtet werden; eine solche Beziehung heisst *involutorisch*; man sagt alsdann auch, *die Elemente entsprechen sich auf doppelte Art.*

Zu den einfachsten Correspondenzen gehören die *Projectivität*, die man auch *Collineation* oder *Homographie* nennt, und von welcher die *Homologie* (Poncelet) und die *Perspectivität* specielle Fälle sind; ferner die *Dualität*, auch *Correlation* oder *Reciprocität* genannt.

Von zwei geometrischen Grundgebilden sagt man, sie seien *projectiv aufeinander bezogen* oder stehen *in projectiver Correspondenz* oder einfach sie seien *projectiv,* wenn sich zwischen ihren Elementen eine solche Beziehung herstellen lässt, dass man das eine Gebilde aus dem anderen mittelst einer endlichen Anzahl von Projectionen oder Schnitten ableiten kann. Anstatt *projectiver Gebilde* kann man ihnen auch den Namen *homographischer oder collinearer Gebilde* geben. Diese Definition gilt nicht für Gebilde 3ter Stufe; für die letzteren kann die folgende gegeben werden:

Zwei Gebilde 2ter oder 3ter Stufe heissen *projectiv*, wenn ihre Elemente derselben Stufe sich ein-eindeutig derart entsprechen, dass Elementen, die einander angehören, wieder einander angehörige Elemente zugeordet sind.

Zwei zu einem dritten projective Gebilde sind auch unter sich projectiv.

Zwei Grundgebilde sind *perspectiv* in den folgenden Fällen:

1) Zwei Punktreihen, wenn sie Schnitte desselben Strahlenbüschels sind.

2) Zwei Ebenenbüschel, wenn sie von zwei verschiedenen Centren aus dasselbe Strahlenbüschel projiciren.

3) Zwei Strahlenbüschel, wenn sie dieselbe Punktreihe von zwei verschiedenen Centren aus projiciren, oder Schnitte desselben Ebenenbüschels sind.

4) Eine Punktreihe und ein Strahlen- (oder Ebenen-) Büschel oder auch ein Strahlen- und ein Ebenenbüschel, wenn das erste Gebilde ein Schnitt des zweiten ist.

5) Zwei ebene Punkt- oder Strahlensysteme, wenn sie Schnitte desselben Bündels sind.

6) Zwei Bündel, wenn sie von zwei verschiedenen Centren aus dasselbe ebene Punkt- bez. Strahlensystem projiciren.

7) Ein ebenes Punkt- oder Strahlensystem und ein Bündel, wenn das erste Gebilde ein Schnitt des zweiten ist.

Zwei superponirte ebene Systeme heissen *homolog*, wenn sie Schnitte zweier perspectiver Bündel sind; zwei Bündel mit demselben Scheitel heissen *homolog*, wenn sie von dem Scheitel aus zwei perspective ebene Systeme projiciren.

Zwei ebene Systeme nennt man *dual*, *reciprok* oder *correlativ*, wenn die Punkte des einen ein-eindeutig den Geraden des anderen entsprechen und umgekehrt, und wenn die Beziehung derart ist, dass Elementen, die einander angehören, wieder einander angehörige Elemente zugeordnet sind.

Zwei Räume nennt man *dual*, *reciprok* oder *correlativ*, wenn die *Punkte*, *Geraden* und *Ebenen* des einen ein-eindeutig bez. den *Ebenen*, *Geraden* und *Punkten* des anderen derart entsprechen, dass einander angehörigen Elementen Elemente zugeordnet sind, die ebenfalls einander angehören.

Projectiv wird jede Eigenschaft einer Figur genannt, welche bestehen bleibt, wenn man an die Stelle der Figur eine andere ihr *projective* substituirt. Jede solche Eigenschaft, welche wesentlich von den Massen der Abstände, Winkel, Flächeninhalte etc. abhängt, heisst *metrische Eigenschaft.*

Es giebt metrische Eigenschaften, die auch projectiv sind.

Graphisch, descriptiv oder *Eigenschaft der Lage* heisst jede Eigenschaft, die sich ausschliesslich auf die Lage der Elemente der Figur bezieht und aus welcher jeder Begriff von *Grösse,* welcher Art er auch sei, entfernt ist. Dahin gehört z. B., dass eine Linie oder Fläche durch gewisse Punkte geht oder dass mehrere Linien oder Flächen gewisse Punkte oder Linien gemeinschaftlich haben etc.

Jede graphische Eigenschaft ist immer projectiv.

Die graphischen Eigenschaften der Figuren sind einem Gesetz unterworfen, welches *das Princip der Dualität oder Correlation in der Ebene und im Raume* genannt wird:

Jedes Theorem, welches eine graphische Eigenschaft einer ebenen Figur ausdrückt, bleibt bestehen, wenn man überall die Elemente Gerade und Punkt in die Elemente Punkt und Gerade verwandelt und an die Stelle der Elemente, die sich angehören, wieder sich angehörige Elemente substituirt.

Jedes Theorem, welches eine graphische Eigenschaft einer räumlichen Figur ausdrückt, behält seine Gültigkeit, wenn man überall die Elemente Punkt und Ebene in die Elemente Ebene und Punkt verwandelt, das Element Gerade unverändert lässt und die Elemente, welche einander angehören, wieder durch einander angehörige Elemente ersetzt.

Die beiden Operationen des Projicirens von einem Centrum (oder einer Axe) aus und des Schneidens mit einer Ebene (oder Geraden) sind zwei duale Operationen im Raum; ebenso sind die beiden anderen des Projicirens von einem Centrum in einer Ebene aus und des Schneidens mit einer Geraden in einer Ebene duale Operationen in der Ebene.

Zwei einem dritten correlative geometrische Gebilde sind projectiv zueinander.

Eine Dualität zweier superponirter Gebilde (mit demselben Träger) kann auch involutorisch sein und heisst dann *Polarität.*

Das *Polaritätsprincip* ist daher nur ein specieller Fall des Dualitätsprincips.

Nach dem Princip der Dualität entspricht einer ebenen Curve, die als Ort von Punkten angesehen wird, eine andere, *welche als Einhüllende der Tangenten in diesen Punkten betrachtet wird; d. h., den Punkten einer Curve entsprechen die Tangenten einer anderen.*

In der Geometrie ist der Begriff der *unendlich fernen Elemente* grundlegend.

Man sagt:

Alle parallelen Geraden einer Ebene treffen sich in einem unendlich fernen Punkt.

In einer Ebene gibt es so viele unendlich ferne Punkte, als Richtungen der Geraden in dieser Ebene möglich sind.

Diese Punkte liegen sämmtlich auf einer Geraden, der unendlich fernen Geraden der Ebene.

Alle parallelen Ebenen des Raums treffen sich in einer unendlich fernen Geraden.

Alle unendlich fernen Geraden des Raums sowie alle unendlich fernen Punkte liegen sämmtlich in einer Ebene, welche die unendlich ferne Ebene des Raums heisst.

Zwar werden die *discontinuirlichen Gebilde* erst in dem folgenden Kapitel behandelt, doch wird es zum Verständniss der nächsten Paragraphen nöthig sein, die Definition des vollständigen Vierecks und Vierseits bereits hier vorauszuschicken.

Vollständiges ebenes Viereck heisst die Figur, welche von vier Punkten (*Ecken*) einer Ebene (von denen keine drei in einer Geraden liegen) und den sechs Geraden (*Seiten*) gebildet wird, welche diese Punkte zu je zweien verbinden; die drei Schnittpunkte der Gegenseiten, d. h. derjenigen Seiten, die sich nicht in einem der gegebenen Eckpunkte treffen, bilden ein Dreieck, welches das *Diagonaldreieck* heisst.

Vollständiges ebenes Vierseit wird die Figur genannt, die aus vier Geraden (*Seiten*) einer Ebene (von denen keine drei durch einen Punkt gehen) und aus sechs Punkten (*Ecken*) gebildet ist, in welchen diese Seiten sich zu je zweien schneiden; die drei Geraden, welche die Gegenecken, d. h. die nicht auf derselben Seite gelegenen Ecken verbinden, bilden das sogenannte *Diagonaldreiseit*.

§ 2. Die Geometrie der Gebilde 1ter Stufe.

1. *Die gerade Punktreihe.* — Eine Gerade kann von einem ihrer Punkte aus in zwei Richtungen durchlaufen werden;

die eine dieser Richtungen heisst die *positive*, die andere die *negative*. Jede Strecke der Geraden soll mit + oder — bezeichnet werden, je nachdem sie in positiver oder negativer Richtung durchlaufen wird.

Unter der Bezeichnung AB verstehen wir die Zahl, welche die Strecke misst, die von A anfangend bis B geht. Auf diese Art ist $AB = -BA$.

Zwischen den durch drei Punkte A, B, C einer Geraden bestimmten Strecken besteht die Relation:

$$AB + BC + CA = 0.$$

Für die durch vier Punkte A, B, C, D einer Geraden bestimmten Strecken gilt die Beziehung:

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

Nennt man die Abstände der Punkte

$$1,\ 2,\ 3, \cdots$$

$\delta_{12}, \delta_{13}, \cdots$, *so besteht zwischen den Abständen dreier in einer Geraden liegender Punkte die Relation (in Determinantenform):*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{12}^2 & \delta_{13}^2 \\ 1 & \delta_{21}^2 & 0 & \delta_{23}^2 \\ 1 & \delta_{31}^2 & \delta_{32}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man sagt, vier Punkte A, B, C, D einer Geraden seien *harmonisch*, wenn zwischen den von ihnen begrenzten Strecken die Beziehung

$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}$$

oder

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

oder auch

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

besteht.

Bezeichnet man mit M den Mittelpunkt der Strecke AB, *so ist auch*

$$MC \cdot MD = \overline{MA}^2.$$

Die Punkte A und B heissen *conjugirt* zu einander, ebenso C und D.

Geometrisch: Die vier Punkte A, B, C, D nennt man *harmonisch*, wenn sich ein vollständiges Viereck so construiren lässt, dass zwei Gegenseiten sich in A schneiden, zwei andere Gegenseiten in B, die fünfte Seite durch C und die sechste (die Gegenseite zur fünften) durch D geht. *Kann man von solchen Vierecken eines construiren, so lassen sich unendlich viele ziehen.*

Wenn vier harmonische Punkte von einem Centrum aus auf eine Gerade projicirt werden, so erhält man wieder vier harmonische Punkte.

Sind drei Punkte A, B, C und die Ordnung, in welcher sie betrachtet werden sollen, gegeben, so ist dadurch auf eine einzige Art ein vierter Punkt D bestimmt, der mit ihnen in harmonischem Verhältniss steht, und zwar derart, dass er zu C conjugiert ist.

Wenn $ABCD$ ein harmonisches Gebilde ist, so sind auch die Gebilde $BACD$, $ABDC$, $BADC$ harmonisch.

In dem harmonischen Gebilde $ABCD$ werden die conjugirten Punkte A, B nothwendiger Weise durch die beiden anderen C, D getrennt.

In dem vollständigen Vierseit wird jede Diagonalseite harmonisch durch die beiden anderen Diagonalseiten getheilt.

Wenn vier Punkte A, B, C, D auf einer Geraden gegeben sind, so nennt man das Verhältniss der Abstände

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

das Doppelverhältniss oder anharmonische Verhältniss der vier Punkte und bezeichnet es mit $(ABCD)$.

Ein Doppelverhältniss ändert sich nicht, wenn man zwei Punkte miteinander vertauscht und zugleich auch die beiden anderen.

Vertauscht man die vier Punkte auf die sämmtlichen 24 möglichen Arten miteinander, so nimmt das Doppelverhältniss nur sechs verschiedene Werthe an, die sich auf einfache Art durch einen einzigen von ihnen ausdrücken lassen.

Wenn λ das Doppelverhältniss $(ABCD)$ bezeichnet, so sind diese sechs Werthe:

$$(ABCD) = \lambda,$$
$$(ABDC) = \frac{1}{\lambda}$$
$$(ACBD) = 1 - \lambda,$$
$$(ACDB) = \frac{1}{1 - \lambda},$$
$$(ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$
$$(ADCB) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Wenn zwei der vier Punkte zusammenfallen, so nimmt ihr Doppelverhältniss einen der Werthe 0, 1, ∞ *an.*

Sind die vier Punkte harmonisch, so erhält ihr Doppelverhältniss einen der Werthe -1, $\frac{1}{2}$, 2.

Die sechs anharmonischen Verhältnisse von vier reellen *Punkten sind im Allgemeinen ungleich, es sei denn, es handele sich um einen der beiden vorstehenden Fälle, in welchen sie zu je zweien gleich sind und die sechs Verhältnisse sich daher auf nur drei verschiedene reduciren.*

Wenn einer der Punkte der unendlich ferne Punkt ist, so wird das Doppelverhältniss

$$(ABC\infty) = \frac{AC}{BC}.$$

Ist das Doppelverhältniss $(ABCD)$ *gleich* λ, *so hat man*

$$\frac{\lambda - 1}{AB} = \frac{\lambda}{AC} - \frac{1}{AD} \quad \text{(Möbius)}.$$

Wenn man auf einer Geraden einen Punkt O, den *Anfangspunkt*, festlegt und angibt, welche Richtung die positive sein soll, sowie eine Masseinheit zu Grunde legt, so lässt sich jeder Punkt A der Geraden durch die Zahl bestimmen, welche seinen Abstand vom Anfangspunkt misst; dabei muss man diese Zahl positiv oder negativ nehmen, je nachdem die Strecke OA positiv oder negativ ist.

Die positive oder negative Zahl, welche auf solche Art dem Punkt A entspricht, wird die *gewöhnliche Coordinate* oder die *Abscisse* von A genannt.

Denkt man sich dagegen zwei Punkte A, B festgelegt und ist C ein beliebiger dritter Punkt, so heisst das Verhältniss

$$\frac{AC}{CB} = r$$

die barycentrische Coordinate des Punktes C.

Die barycentrische Coordinate des unendlich fernen Punktes der Geraden ist -1.

Legt man schliesslich drei Punkte A, B, C der Geraden fest, so lässt sich das Doppelverhältniss $(ABCD)$ als *Coordinate* eines beliebigen Punktes D der Geraden auffassen. Diese Coordinate pflegt man die *projective* zu nennen. Die Punkte A, B haben ∞ und 0 zu Coordinaten und heissen *die Fundamentalpunkte;* der Punkt C hat die Coordinate 1 und wird *der Einheitspunkt* genannt.

Von diesem Coordinatensystem ist das System der gewöhnlichen Coordinaten ein specieller Fall; man braucht nur anzunehmen, A sei der unendlich ferne Punkt, B der Coordinatenanfang und C liege im Abstand $+1$ von B.

Das heisst: *Der Abstand zweier Punkte ist dem anharmonischen Verhältniss des aus diesen beiden Punkten, dem unendlich fernen Punkt und dem Einheitspunkt gebildeten Quadrupels gleich.*

Liegt dagegen C in der Mitte zwischen den Punkten A, B, *so werden die projectiven zu barycentrischen Coordinaten.*

Wir gehen nun zur Besprechung der *homogenen Coordinaten* der Punkte einer Geraden über.

Denken wir uns auf der Geraden ein beliebiges Coordinatensystem festgesezt und ist x die Coordinate eines Punktes P, so geben wir dieser die Form

$$x = \frac{x_1}{x_2};$$

die Grössen x_1, x_2, deren Verhältniss die Coordinate von P bestimmt, heissen dann die *homogenen Coordinaten* von P.

Von den homogenen Coordinatensystemen ist das folgende bemerkenswerth:

Wir nehmen an, zwei (Fundamental-)Punkte A, B seien festgesetzt und nennen p, q die Abstände eines Punkts P von den beiden Punkten A, B, so dass $p + q = AB$ ist; wir nehmen ferner zwei Constante a, b an und setzen

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{bp}{aq};$$

alsdann entspricht jedem Punkt P ein Werthepaar x_1, x_2, dessen Verhältniss constant ist, und jedem solchen Werthepaar entspricht ein einziger Punkt P. Die Grössen x_1, x_2 kann man mithin als *homogene Coordinaten* des Punkts der Geraden ansehen; dem Werth $x_1 = 0$ entspricht der Punkt A, dem Werth $x_2 = 0$

der Punkt B; der unendlich ferne Punkt hat die Coordinaten $x_1 \equiv -b$, $x_2 \equiv a$. Der Punkt U, für welchen $\frac{x_1}{x_2} = 1$, also $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ ist, wird der *Einheitspunkt* genannt.

Von diesem homogenen Coordinatensystem ist das System **nicht** *homogener gewöhnlicher Coordinaten (Abscissen) ein specieller Fall;* man braucht nur anzunehmen, B rücke in das Unendliche; es ist dann nicht nöthig, die Coordinate x_2 in Betracht zu ziehen, weil q immer unendlich gross ist; die Lage des Punktes wird mithin nur durch x_1 bestimmt, d. h. den Abstand des Punktes von A.

Man sieht ferner leicht ein, dass das Verhältniss $\frac{x_1}{x_2}$, da es sich $\frac{b}{a} : \frac{q}{p}$ schreiben lässt und $\frac{b}{a}$ das Verhältniss der Abstände des Einheitspunktes U von den Punkten B, A angiebt, identisch mit dem Doppelverhältniss der Punkte $BAUP$ ist. Im Grunde genommen ist daher das entwickelte System kein anderes, als das System, welches sich ergibt, wenn auf die obige Art der *projectiven Coordinate* die homogene Form gegeben wird; es ist deshalb *ein System von projectiven homogenen Coordinaten.*

Legt man den Coordinaten der Punkte einer Geraden auch imaginäre Werthe bei, so können wir uns dadurch *die sogenannten imaginären Punkte der Geraden* eingeführt denken.

In gewöhnlichen Coordinaten wird das Doppelverhältniss von vier Punkten durch die Formel

$$\frac{(x - x'')}{(x' - x'')} : \frac{(x - x''')}{(x' - x''')}$$

ausgedrückt, worin die x die Abscissen der vier gegebenen Punkte bezeichnen.

Mittelst dieser Formel kann man dann das Doppelverhältniss auch von imaginären Punkten der Geraden darstellen.

Erweitert man so den Begriff des Doppelverhältnisses, so findet man ausser den beiden oben erwähnten Fällen, in denen *die sechs Doppelverhältnisse von vier Elementen nicht sämmtlich verschieden sind*, noch einen dritten Fall, welcher eintritt, *wenn der Werth eines der Doppelverhältnisse eine complexe Cubikwurzel aus der negativen Einheit ist.* Die vier Punkte heissen dann *äquianharmonisch* und *die sechs Doppelverhältnisse reduciren sich auf nur zwei verschiedene.*

Man sagt, eine algebraische Gleichung vom n^{ten} Grad in x *stelle eine Gruppe von n Punkten auf einer Geraden dar* und versteht darunter, dass man sich die Gleichung aufgelöst denken und ihre n Wurzeln als Coordinaten von n (reellen oder complexen) Punkten einer Geraden interpretiren soll.

Zwei Punktreihen sind projectiv (vergl. § 1) oder homographisch oder auch collinear, wenn jedem Punkt der einen ein und nur ein Punkt der anderen entspricht und das Doppelverhältniss von vier Punkten der einen immer dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Punkte der anderen gleich ist.

Diese Eigenschaft könnte man auch der Definition der *projectiven Punktreihen* zu Grunde legen.

Eine andere Definition ist die folgende (von Staudt):

Zwei Punktreihen werden projectiv oder projectiv aufeinander bezogen genannt, wenn sie so einander zugeordnet sind, dass harmonischen Gruppen in der einen Punktreihe harmonische Gruppen in der anderen entsprechen.

Der Punkt in einer Punktreihe, welcher dem unendlich fernen Punkt der anderen entspricht, heisst *Fluchtpunkt* oder *Grenzpunkt.*

Wenn die beiden Grenzpunkte ebenfalls unendlich ferne Punkte sind, so nennt man die beiden Punktreihen *ähnlich.*

Die Projectivität kann auch auf die folgende Art definirt werden:

Zwei Punktreihen heissen projectiv, wenn sie sich derart entsprechen, dass man von den Punkten der einen zu denen der anderen durch eine endliche Anzahl von Projectionen und Schnitten übergehen kann.

Diese Correspondenz ist nachgewiesen, wenn drei beliebige Paare sich entsprechender Punkte festgestellt sind.

Wenn x und y die gewöhnlichen Coordinaten der Punkte der einen und der anderen Punktreihe sind, so ist die bilineare (d. h. lineare in Bezug auf x und y) Relation vom Typus

$$axy + bx + cy + d = 0$$

(die Verwandtschafts- oder Projectivitätsgleichung) die Beziehung, die zwischen x und y bestehen muss, wenn die beiden Punktreihen projectiv sein sollen.

Wenn I' und J die Grenzpunkte zweier projectiven Punktreihen und A, A' zwei sich entsprechende Punkte sind, so ist das Product $JA \cdot I'A'$ constant, wie man auch das Paar A, A' wählen mag.

In zwei ähnlichen Punktreihen ist das Verhältniss zwischen den sich entsprechenden Strecken (das Aehnlichkeitsverhältniss) constant.

Ist dieses Verhältniss ± 1, so werden die beiden Punktreihen *congruent* oder *gleich* genannt.

Wenn zwei projective Punktreihen mit verschiedenen Trägern einen Punkt gemeinsam haben, der zum entsprechenden Punkt sich selbst hat, so sind sie perspectiv (vergl. § 1).

Sind drei Paare AA', BB', CC' sich entsprechender Elemente in zwei projectiven Punktreihen gegeben, so kann man, um die übrigen Paare oder, wie man sagt, *die Projectivität zu construiren*, auf die folgende Art verfahren: *Auf der Geraden, welche zwei entsprechende Punkte, z. B. A, A' verbindet, wähle man zwei Centren S, S'; ziehe SB, $S'B'$, die sich in B'' schneiden, alsdann SC, $S'C'$, die sich in C'' schneiden und verbinde $B''C''$; ein Punkt D der ersten Punktreihe liefert durch Projection, von S aus, D'' auf $B''C''$; projicirt man nun D'' von S' aus, so erhält man in dem Schnittpunkt mit der zweiten Geraden den dem Punkt D entsprechenden Punkt D'.*

Liegen die beiden Punktreihen aufeinander, so projicire man die eine von ihnen von einem Centrum aus auf eine andere Gerade und verfahre dann wie vorstehend.

Wenn man zu Centren S, S' die Punkte A', A wählt, so heisst die so erhaltene Gerade $B''C''$ *die Directions-, Projectivitäts-* oder *Homographieaxe.*

Sie schneidet die beiden Punktreihen in Punkten, welche dem den beiden Punktreihen gemeinschaftlichen Punkt entsprechen. Ueber eine Eigenschaft dieser Axe siehe S. 19.

Wenn die beiden homographischen Punktreihen dieselbe Gerade zum Träger haben, so heissen die beiden Punktreihen *conlocal, aufeinanderliegend oder superponirt.*

Zwei superponirte homographische Punktreihen, welche nicht zusammenfallen, d. h. deren Elemente nicht sämmtlich Doppelelemente sind, können höchstens zwei reelle sich entsprechende gemeinsame Punkte haben. Die Wurzeln der Gleichung

$$ax^2 + (b + c)x + d = 0$$

sind die Coordinaten dieser Punkte.

Die sich entsprechenden gemeinsamen Punkte heissen *Doppelpunkte*.

Wenn die Wurzeln dieser Gleichung imaginär sind, so sagen wir, die beiden Doppelpunkte existiren auch in diesem Fall, *seien aber imaginär*.

Der Mittelpunkt der von den Doppelpunkten begrenzten Strecke fällt mit dem Mittelpunkt der von den beiden Fluchtpunkten (den Grenzpunkten) begrenzten Strecke zusammen.

In zwei superponirten homographischen Punktreihen ist das Doppelverhältniss zweier beliebiger sich entsprechender Punkte mit den beiden Doppelpunkten constant.

Die Correspondenz zwischen zwei solchen Punktreihen ist nur dann involutorisch, d. h. einem Punkt entspricht nur dann immer derselbe andere Punkt, wenn dieses Doppelverhältniss den Werth $+1$ *oder* -1 *hat.*

In dem ersten Fall sind die beiden Punktreihen *identisch*; in dem zweiten bilden sie eine *involutorische Homographie* oder einfach eine *Involution* (Desargues).

Analytisch wird eine Involution durch eine Gleichung vom Typus

$$axy + b(x + y) + d = 0$$

bestimmt.

Die Doppelpunkte der Involution sind durch die Gleichung

$$ax^2 + 2bx + d = 0$$

gegeben.

Sind die Coefficienten a, b, d reell, so *heisst die Involution hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch, je nachdem die Doppelpunkte reell oder imaginär sind oder zusammenfallen.*

In dem Fall der Involution fallen die beiden Grenzpunkte in einen einzigen Punkt, den sogenannten Centralpunkt der Involution zusammen, welcher der Mittelpunkt der durch die beiden Doppelpunkte bestimmten Strecke ist.

Wenn es in zwei conlocalen homographischen Punktreihen zwei verschiedene Punkte gibt, die sich auf doppelte Art entsprechen (vergl. § 1), *so gilt dasselbe auch für zwei beliebige sich entsprechende Punkte und es liegt eine Involution vor.*

Ist O das Involutionscentrum und sind A, A' zwei sich entsprechende Punkte, so ist immer

$$OA \cdot OA' = \text{Const.}$$

Eine Involution wird durch zwei sich entsprechende Punktepaare AA', BB' bestimmt.

Sind zwei Paare AA', BB' sich entsprechender Punkte gegeben, so verfährt man, um die Involution zu construiren, auf die folgende Art: Man nimmt einen beliebigen Punkt G ausserhalb der Geraden an und beschreibt die Kreise GAA', GBB', die sich in einem zweiten Punkt H schneiden. Der Punkt O, in welchem die gegebene Gerade von GH geschnitten wird, ist das Involutionscentrum und jeder durch G, H gezogene Kreis trifft die gegebene Gerade in zwei sich entsprechenden Punkten der Involution.

Sind AA', BB', CC' Punktepaare in Involution, so besteht zwischen den Strecken, welche diese Punkte auf der Geraden bestimmen, die Relation:

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A = 0.$$

Wenn x_1, y_1; x_2, y_2 die Coordinaten von A, A'; B, B' sind, so lautet die Gleichung der Involution:

$$\begin{vmatrix} xy, & x+y, & 1 \\ x_1y_1, & x_1+y_1, & 1 \\ x_2y_2, & x_2+y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ist $f_1(x) = 0$ die Gleichung 2^{ten} Grads, deren Wurzeln x_1, y_1 und $f_2(x) = 0$ diejenige, deren Wurzeln x_2, y_2 sind, so ist die Gleichung der Involution

$$f_1(x) + \lambda f_2(x) = 0.$$

Wenn sich ein rechter Winkel in seiner eigenen Ebene um seinen Scheitel dreht, so beschreiben seine Schenkel auf einer Geraden zwei in Involution liegende Punktreihen.

Die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von einer beliebigen Transversalen in drei Paaren von involutorisch conjugirten Punkten geschnitten.

Wenn man die drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits von einem beliebigen Centrum aus auf eine Gerade projicirt, so bilden die so erhaltenen sechs Punkte drei Paare einer Involution.

Sind in zwei conlocalen homographischen Punktreihen A, A'; B, B' Paare sich entsprechender Elemente und E, F die beiden (verschiedenen oder nicht verschiedenen) Doppelpunkte, so sind E, F; A, B'; B, A' drei Paare involutorisch verbundener Punkte.

Eine Projectivität conlocaler Punktreihen kann *cyclisch von der Ordnung* n sein, d. h. derart, dass man, wenn zu einem Punkt A der entsprechende A', alsdann zu dem Punkt A', den man jetzt als der ersten Punktreihe zugehörig betrachtet, der entsprechende A'' aufgesucht wird u. s. f., nach n solchen Operationen jedesmal wieder zu dem Punkt A zurückkehrt.

Die Involution ist eine cyclische Projectivität zweiter Ordnung.

Nimmt man die Doppelpunkte zu Fundamentalpunkten projectiver (nicht homogener) Coordinaten, so lässt sich die Gleichung der cyclischen Projectivität n^{ter} Ordnung $y - \varepsilon x = 0$ *schreiben, worin* ε *eine primitive n^{te} Wurzel aus der Einheit ist.*

Die cyclischen Projectivitäten erhielten ihren Namen von Clebsch, *Crelle*, 68; zuerst hatten sich mit ihnen beschäftigt: Möbius, ges. Werke 2 Bde, 1ter Bd. von R. Baltzer, 2ter Bd. von F. Klein herausgeg., Leipzig 1886, Bd. 2 und Battaglini, *Acc. Napoli*, 1863, der sie *Involutionen höherer Ordnung (involuzioni di ordine superiore)* nannte.

Für die allgemeinen Zuordnungen zwischen zwei conlocalen Punktreihen (oder überhaupt zwischen zwei conlocalen Grundgebilden 1ter Stufe) ist der folgende Satz, *das sogenannte Correspondenzprincip von* Chasles, wichtig:

Wenn zwischen den Punkten zweier conlocaler Punktreihen eine solche Beziehung festgestellt wird, dass jedem Punkt der ersten m *Punkte der zweiten und jedem Punkt der zweiten* n *der ersten entsprechen, so sind* $m + n$ *Punkte vorhanden, die sich selbst entsprechen.* Chasles, *Compt. Rend.*, 1864, 1866. Ueber dieses Correspondenzprincip siehe auch Kap. 15, § 3.

---

2. *Das Strahlenbüschel.* — Setzt man in einem Büschel einen gewissen Strahl als *Anfangsstrahl* fest, so lässt sich das Büschel beschreiben, indem man diesen Strahl um den Scheitel des Büschels dreht. Die Rotation kann in zweierlei Sinn stattfinden; wir wollen die Rotation, die in einem gewissen Sinn erfolgt, die *positive* und die entgegengesetzte die *negative* nennen. Wenn a und b zwei Strahlen des Büschels sind, so verstehen wir unter dem *Winkel* (ab) den kleinsten Winkel, welchen der Strahl a, *in positivem Sinne* rotirend, beschreiben muss, um zum Zusammenfallen mit b zu kommen. Die Zahl, welche den Winkel misst, den die Anfangsgerade mit irgend einer Geraden des Büschels macht, kann man *die gewöhnliche Coordinate* oder *Anomalie* der Geraden des Büschels nennen. Auf diese Art ist $(ba) + (ab) = \pi$.

Das *Doppelverhältniss* von vier Strahlen des Büschels ist das Doppelverhältniss der vier Punkte, in welchen eine beliebige Transversale die vier Strahlen schneidet. *Es wird dargestellt durch*

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

oder durch

$$(abcd) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

worin CA, CB, DA, DB die Abstände zweier Punkte C, D der Strahlen c, d von den Strahlen a, b bezeichnen.

Setzt man $(abcd) = \lambda$, so ist

$$\frac{\lambda - 1}{\operatorname{tg}(ab)} = \frac{\lambda}{\operatorname{tg}(ac)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(ad)} \quad \text{(Möbius)}.$$

Ist $(abcd) = -1$, so nennt man die vier Geraden *harmonisch.*

Vier Strahlen a, b, c, d eines Büschel sind harmonisch, wenn sich ein vollständiges Vierseit derart construiren lässt, dass zwei Gegenecken auf a, zwei Gegenecken auf b, eine fünfte Ecke auf c und die sechste auf d liegt.

Kann man ein solches Vierseit construiren, so lassen sich unendlich viele construiren.

Legt man in dem Büschel zwei Strahlen a, b fest, so kann das Verhältniss $\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)}$ zur Coordinate eines Strahls c genommen werden; man erhält so ein Coordinatensystem, welches dem bei der Punktreihe *barycentrisch* genannten analog ist.

Wenn dagegen drei Strahlen a, b, c in dem Büschel festgelegt werden, so kann man als Coordinate eines Strahles d das anharmonische Verhältniss $(abcd)$ wählen; es ergibt sich dann das System *projectiver Coordinaten.*

Legt man der Coordinate imaginäre Werthe bei, so werden dadurch die *imaginären Strahlen* des Büschels definirt.

Zwei Strahlenbüschel sind homographisch oder collinear verwandt oder projectiv (vergl. § 1), *wenn sie sich derart entsprechen, dass jedes anharmonische Verhältniss von vier Strahlen des einen Büschels dem anharmonischen Verhältniss der entsprechenden (conjugirten) Strahlen des anderen immer gleich ist.*

Ebenso, wie bei den Punktreihen, kann diese Eigenschaft auch hier als Definition der projectiven Büschel dienen.

Als weitere Definition lässt sich auch die folgende von Staudt benutzen: *Zwei Büschel sind projectiv, wenn sie sich so entsprechen, dass harmonischen Gruppen in dem einen harmonische Gruppen in dem anderen zugeordnet sind.*

Wenn die beiden Büschel denselben Scheitel (Träger) haben, gibt es immer zwei (reelle oder imaginäre) Strahlen, die sich selbst entsprechen (Doppelstrahlen).

Ist ferner die Zuordnung *involutorisch* (ohne jedoch so zu sein, dass jeder Strahl sich selbst entspricht), so sagt man, die Paare sich entsprechender Strahlen bilden eine *Involution. Zwei conjugirte (sich entsprechende) Strahlen sind in diesem Fall harmonisch zu den beiden Doppelstrahlen.*

Wie bei den Punktreihen lassen sich auch hier *cyclische Projectivitäten von der* n^{ten} *Ordnung* definiren.

Ein rechter Winkel, welcher in einer Ebene um seinen Scheitel rotirt, beschreibt mit seinen Schenkeln zwei Strahlenbüschel, die eine Involution bilden. Die Doppelstrahlen sind imaginär; sie sind die Strahlen, die nach den beiden Kreispunkten führen (vergl. § 3).

Die drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits werden von einem beliebigen Centrum aus durch drei Paare involutorisch conjugirter Strahlen projicirt.

Die Homographie zwischen zwei Strahlenbüscheln wird durch drei Paare sich entsprechender Elemente bestimmt.

Wenn zwei homographische Büschel mit verschiedenen Scheiteln einen Doppelstrahl haben, so sind sie perspectiv (vergl. § 1).

Um die Homographie zweier Strahlenbüschel zu construiren, wenn drei Paare aa', bb', cc' sich entsprechender Strahlen gegeben sind, schlägt man ein Verfahren ein, das dual zu dem bei zwei Punktreihen befolgten ist. *Durch den Punkt, welcher zweien sich entsprechenden Strahlen a, a' gemeinsam ist, werden zwei Gerade s, s' gezogen; b'' sei die Gerade, welche die Punkte sb, $s'b'$ verbindet, und c'' die durch die Punkte sc, $s'c'$ gehende Gerade. Der Punkt $b''c''$ ist der Scheitel eines zu den beiden gegebenen Büscheln perspectiven Büschels. Ist mithin ein Strahl d des ersten Büschels gegeben, so suche man seinen Schnittpunkt mit s, verbinde diesen Schnittpunkt mit dem Punkt $b''c''$ und ermittele den Schnitt dieses Strahls mit s'; die Gerade, welche den Scheitel des zweiten Büschels mit diesem Punkt verbindet, ist der entsprechende Strahl d'.*

Wenn man als s, s' die Geraden a', a wählt, so treffen sich die Geraden, welche die Punkte ab', $a'b$; ac', $a'c$; bc', $b'c$

verbinden, in demselben Punkt, welcher das *Directions-, Projectivitäts-* oder *Homographiecentrum* der beiden Büschel genannt wird.

Das Directionscentrum besitzt die Eigenschaft, dass jede durch es gehende Gerade die Büschel in zwei in Involution liegenden Punktreihen schneidet, und umgekehrt geht jede so beschaffene Gerade durch dieses Centrum.

Die Directionsaxe zweier projectiver Punktreihen (S. 13) besitzt die correlative Eigenschaft; wir sehen davon ab, den entsprechenden Satz besonders zu formulieren.

Zwei Strahlenbüschel heissen *ähnlich*, wenn ihre Scheitel im Unendlichen liegen und ein Schnitt des einen einem Schnitt des anderen ähnlich ist (vergl. § 2).

Zwei Strahlenbüschel heissen *congruent* (*gleich*), wenn das erste sich nur dadurch vom zweiten unterscheidet, dass seine Lage eine andere ist.

Zwei gleiche Büschel sind projectiv.

---

3. *Das Ebenenbüschel.* — Die Geometrie des Ebenenbüschels ist nicht wesentlich von der Geometrie der geraden Punktreihe und des Geradenbüschels verschieden. Es werden dieselben Begriffe von Coordinaten, Doppelverhältniss, Harmonie, Homographie und Involution eingeführt, wie es auch in dem Vorstehenden geschehen ist.

§ 3. Die Geometrie der Gebilde 2ter Stufe. Das ebene Punkt- und Strahlensystem.

Zwischen den Flächeninhalten der Dreiecke, welche drei von fünf gegebenen Punkten A, B, C, D, E der Ebene zu Eckpunkten haben, besteht die Relation:

$$ABE \cdot CDE + BCE \cdot ADE + CAE \cdot BDE = 0,$$

und ähnlich für sechs Punkte der Ebene:

$$ABC \cdot DEF + ACD \cdot BEF + ADB \cdot CEF = BCD \cdot AEF$$

(Monge, Möbius).

Nennt man δ_{12}, δ_{13}, $\cdots$ die Abstände je zweier der vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 einer Ebene, so gilt die Beziehung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{14}^2 & \delta_{24}^2 & \delta_{34}^2 \\ 1 & \delta_{41}^2 & 0 & \delta_{21}^2 & \delta_{31}^2 \\ 1 & \delta_{42}^2 & \delta_{12}^2 & 0 & \delta_{32}^2 \\ 1 & \delta_{43}^2 & \delta_{13}^2 & \delta_{23}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir wollen uns in der Ebene zwei Gerade (*Coordinatenaxen*) gezogen denken, die sich in einem Punkt O, dem sogenannten *Anfangspunkt*, schneiden. Es seien auf diesen beiden Geraden zwei Systeme gewöhnlicher Coordinaten, wie in § 2, auf beliebige Art festgesetzt und der Punkt O als Anfangspunkt in einem jeden angenommen. Durch jeden Punkt P der Ebene geht eine Parallele zur ersten und eine Parallele zur zweiten Geraden; jeder Punkt der Ebene wird durch eine der zweiten Geraden parallele Projection in einen und nur einen Punkt P' der ersten und durch eine der ersten Geraden parallele Projection in einen und nur einen Punkt P'' der zweiten projicirt. Die Coordinaten von P' und P'' können dann als *Coordinaten* von P angesehen werden; sie heissen *Cartesische Coordinaten*. Der gewöhnliche und einfachste Fall ist derjenige, in welchem vorausgesetzt wird, die beiden gegebenen Geraden seien rechtwinklig zueinander und die Masseinheiten, nach welchen die Coordinaten von P' und P'' auf beiden Geraden gerechnet werden, seien gleich. Nennt man x, y die Coordinaten der Punkte der ersten bez. der zweiten Geraden, so heisst die erste Gerade *die x-Axe*, die zweite *die y-Axe.*

Ein anderes Coordinatensystem für die Punkte der Ebene ist das der sogenannten *Polarcoordinaten.* Man legt einen Punkt O, den *Pol*, und eine von ihm ausgehende Gerade OA in der Ebene fest und bestimmt die positive Richtung dieser Geraden (*die Polaxe*). Ein Punkt P der Ebene kann dann durch den (immer positiven) Abstand des Punktes P vom Pol O und durch die Grösse des (positiven oder negativen) Winkels bestimmt werden, den die positive Richtung der Geraden OA in positivem oder negativem Sinne (vergl. § 2, das Strahlenbüschel) beschreiben muss, um mit dem Strahl OP zur Deckung zu kommen.

Ein weiteres Coordinatensystem ist das sogenannte *bipolare.* Man nimmt in der Ebene zwei feste Punkte O, O' als die Scheitel zweier Büschel an; durch jeden Punkt P der Ebene geht ein Strahl des ersten und ein Strahl des zweiten Büschels; die Coordinaten dieser beiden Strahlen in jedem der Büschel kann man als Coordinaten von P ansehen.

Wenn man den beiden Coordinaten x, y eines Punkts in einer Ebene die Form $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ gibt, so werden die Grössen x_1, x_2, x_3 *homogene Coordinaten* der Punkte der Ebene genannt. Unter den homogenen Coordinatensystemen sind die sogenannten *Dreieckscoordinaten (trilineare, trimetrische)* besonders bemerkenswerth.

Wir betrachten drei Gerade der Ebene, die nicht durch einen Punkt gehen, und bezeichnen mit p, q, r die Abstände eines beliebigen Punkts P der Ebene von den drei Geraden und mit a, b, c drei beliebige Constante; wir nehmen ferner x_1, x_2, x_3 proportional zu den Verhältnissen

$$\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c} \quad \text{an.}$$

Man kann zeigen, dass *auf diese Art jedem Tripel von Werthen ϱx_1, ϱx_2, ϱx_3, worin ϱ ein beliebiger Proportionalitätsfactor ist, ein einziger Punkt der Ebene entspricht und umgekehrt.* Die Grössen x_1, x_2, x_3 können daher ein System homogener Coordinaten darstellen. Die Ecken A, B, C des aus den drei Geraden gebildeten Dreiecks haben bez. die Coordinaten

$$\begin{array}{ccc} 0, & 0, & x_3; \\ 0, & x_2, & 0; \\ x_1, & 0, & 0. \end{array}$$

Das Dreieck ABC heisst das *Fundamentaldreieck der Coordinaten.*

Es existirt in der Ebene ein Punkt U, dessen Abstände von den drei Geraden proportional zu a, b, c sind; er hat die homogenen Coordinaten 1, 1, 1 und heisst daher *der Einheitspunkt.*

Die Verhältnisse zweier der Coordinaten eines Punkts P zur dritten, z. B. $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ kann man als Doppelverhältnisse von Strahlenbüscheln ansehen. Denn es ist:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{c}{a} : \frac{r}{p},$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{c}{b} : \frac{r}{q},$$

worin die rechten Seiten den Doppelverhältnissen der vier Strahlen der Büschel

$$B(A, C, U, P) \text{ und } A(B, C, U, P)$$

gleich sind.

Das hier besprochene Coordinatensystem ist mithin *ein System projectiver homogener Coordinaten.*

Wenn der Einheitspunkt U das Centrum des dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kreises ist, so sind die Coordinaten x_1, x_2, x_3 von P den Abständen des Punktes P von den drei Seiten des Fundamentaldreiecks proportional.

Ist eine der Seiten des Fundamentaldreiecks die unendlich ferne Gerade der Ebene, so wird das System von (homogenen) Dreieckscoordinaten ein System von (nicht homogenen) Cartesischen Coordinaten.

Die allgemeinen Formeln für die Verwandlung eines Cartesischen Coordinatensystems in ein anderes, ebenfalls Cartesisches, lauten, wie folgt: *Wenn (x, y) die Coordinaten eines Punkts in Bezug auf zwei durch einen Punkt O gehende Axen sind, die den Winkel ω miteinander bilden, und wenn (X, Y) die Coordinaten desselben Punkts in Bezug auf zwei andere, durch einen anderen Punkt O' gehende Axen bezeichnen, und O' bezüglich der ersten Axen die Coordinaten (a, b) hat, so gelten die Relationen*

$$x = a + X\frac{\sin\beta}{\sin\omega} + Y\frac{\sin\beta'}{\sin\omega},$$

$$y = b + X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} + Y\frac{\sin\alpha'}{\sin\omega},$$

worin α, β die Winkel bedeuten, welche die neue X-Axe mit den alten Axen macht, und α', β' die Winkel zwischen der neuen Y-Axe und den alten Axen sind. Dabei ist

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \omega$$

und es wird, wie auch später, unter dem Winkel zwischen den Axen der Winkel verstanden, den die positiven Richtungen der Axen miteinander bilden.

Die Determinante der Coefficienten von X und Y in diesen Formeln hat den Wert $\frac{\sin\Omega}{\sin\omega}$, worin Ω der Winkel der neuen Axen ist.

Wenn beide Coordinatensysteme rechtwinklig sind und α den Winkel bezeichnet, den die neue x-Axe mit der alten x-Axe macht, so vereinfachen sich die Transformationsformeln und werden:

$$x = a + X\cos\alpha \pm Y\sin\alpha,$$
$$y = b + X\sin\alpha \mp Y\cos\alpha.$$

Darin hat man die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen, je nachdem die positiven Richtungen von Y und y den Winkel α oder den Winkel $\pi - \alpha$ mit einander machen.

Die Formeln für die Verwandlung rechtwinkliger Cartesischer Coordinaten in Polarcoordinaten lauten:

$$x = \varrho\cos\varphi, \qquad y = \varrho\sin\varphi,$$
$$\varrho = +\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

worin ϱ, φ die Polarcoordinaten des Punkts bedeuten, dessen Cartesische Coordinaten x, y sind, und worin vorausgesetzt wird, dass der Pol mit dem Coordinatenanfang und die Polaxe mit der Axe zusammenfällt, auf welcher die x gerechnet werden.

Wenn (x, y), (x', y') die Cartesischen Coordinaten zweier Punkte sind, so wird der Abstand der beiden Punkte durch die Formel gegeben:

$$\varrho^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\omega;$$

dabei ist ω der Winkel, den die Axen miteinander machen.

Sind α, β die Winkel, welche eine Gerade der Ebene mit den Coordinatenaxen bildet, so besteht die Fundamentalbeziehung:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega = \sin^2\omega.$$

Sind α, β und α', β' die Winkel, welche zwei Gerade mit den Coordinatenaxen machen, so ist der Winkel der beiden Geraden durch die Formeln gegeben:

$$\cos(rr') = -\frac{1}{\sin^2\omega}\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 1 \end{vmatrix},$$

$$\sin(rr') = -\frac{1}{\sin\omega}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix}.$$

Die Bedingung, damit zwei Gerade senkrecht auf einander stehen, ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und die Bedingung, damit sie parallel sind:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix} = 0.$$

Bei rechtwinkligen Axen wird:

$$\cos(rr') = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta',$$
$$\sin(rr') = \cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta.$$

Wenn (x, y), (x', y'), (x'', y'') die Coordinaten der drei Ecken eines Dreiecks bezeichnen, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks seinem absoluten Werth nach durch

$$\frac{1}{2}\sin\omega \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} \quad \textit{gegeben.}$$

Die Bedingung, damit drei Punkte mit den Coordinaten

$$(x, y),\ (x', y'),\ (x'', y'')$$

in einer Geraden liegen, lautet:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine Gleichung zwischen den Coordinaten eines Punkts in der Ebene stellt einen *Ort von Punkten* dar.

Zwischen den Coordinaten (x, y) eines einer Geraden angehörigen Punkts besteht eine Relation 1ten Grads (die Gleichung der Geraden) vom Typus:

$$ax + by + c = 0,$$

worin a, b, c constante Coefficienten sind.

Der Gleichung der Geraden, welche durch zwei Punkte (x', y'), (x'', y'') geht, kann man eine der Formen geben:

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'},$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Coordinaten eines Punkts, welcher auf der durch die Punkte $(x'y')$, $(x''y'')$ bestimmten Geraden liegt, sind

$$\left(\frac{x'+\lambda x''}{1+\lambda}, \quad \frac{y'+\lambda y''}{1+\lambda}\right).$$

Die Punkte

$$\left(\frac{x'+\lambda x''}{1+\lambda}, \frac{y'+\lambda y''}{1+\lambda}\right), \quad \left(\frac{x'-\lambda x''}{1-\lambda}, \frac{y'-\lambda y''}{1-\lambda}\right)$$

theilen die von den Punkten (x', y'), (x'', y'') begrenzte Strecke harmonisch.

Nimmt man die Axen rechtwinklig an und gibt der Gleichung der Geraden die Form

$$y = Ax + B,$$

so kann man den Coefficienten A den Winkelcoefficienten der Gleichung der Geraden nennen; er stellt die trigonometrische Tangente des Winkels dar, den die Gerade mit der x-Axe bildet.

Bezeichnet man mit α, β die Winkel, welche das Loth auf die Gerade mit den Coordinatenaxen macht, und mit ϱ den Abstand des Coordinatenanfangs von der Geraden, so lässt sich die Gleichung der Geraden schreiben:

$x \cos\alpha + y \cos\beta - \varrho = 0$ *(die Gleichung der Geraden in der Normalform).*

Um die Gleichung $ax+by+c=0$ auf die Normalform zu bringen, braucht man ihre linke Seite nur mit

$$\frac{\sin\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}$$

zu multipliciren, worin das Wurzelzeichen positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem das Product $c \sin\omega$ negativ oder positiv ausfällt.

Wenn die Gleichung einer Geraden $ax+by+c=0$ lautet, und unter ω der Winkel der Axen verstanden wird, so sind die Winkel, welche das Loth auf die Gerade mit den Axen bildet, durch die Formeln gegeben:

$$\cos\alpha = \frac{a \sin\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}},$$

$$\cos\beta = \frac{b \sin\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}},$$

und der Abstand des Coordinatenanfangs von der Geraden ist

$$\varrho = -\frac{c \sin\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}},$$

worin für das Vorzeichen des Radicals die oben gemachte Bemerkung gilt.

Der Abstand eines Punkts mit den Coordinaten X, Y von einer Geraden, deren Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

lautet, wird durch die Formel

$$-\frac{(aX + bY + c)\sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}$$

angegeben, worin für das Vorzeichen des Radicals wieder dasselbe gilt, wie vorher; dieser Abstand ist positiv oder negativ, je nachdem der Punkt auf derselben oder der entgegengesetzten Seite der Geraden liegt, wie der Coordinatenanfang.

Die Coordinaten des Schnittpunkts zweier Geraden

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

sind:

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Der zwischen zwei Geraden enthaltene Winkel φ *ist durch*

$$\sin\varphi = \frac{(ab' - a'b)\sin\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}\cdot\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\omega}},$$

$$\cos\varphi = \frac{aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}\cdot\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\omega}}$$

gegeben.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die beiden Geraden parallel seien, ist:

$$ab' - a'b = 0.$$

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die beiden Geraden senkrecht aufeinander stehen, ist:

$$aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\omega = 0.$$

Die Gleichung der Geraden, welche durch den Punkt (x', y') *geht und senkrecht auf der Geraden* $ax + by + c = 0$ *steht, lautet*

$$\frac{x - x'}{a - b\cos\omega} = \frac{y - y'}{b - a\cos\omega}.$$

Damit drei Gerade

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ a'x + b'y + c' &= 0, \\ a''x + b''y + c'' &= 0 \end{aligned}$$

durch denselben Punkt gehen, ist nothwendig und ausreichend, dass

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \text{ sei.}$$

Der Flächeninhalt des von diesen drei Geraden begrenzten Dreiecks ist:

$$\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2}{(ab' - a'b)(a'b'' - a''b')(a''b - ab'')} \sin \omega .$$

Setzt man $\frac{a}{c} = u$, $\frac{b}{c} = v$, *so wird die Gleichung der Geraden:*

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung u, v als festliegend und x, y als variabel, so ergibt sich eine Beziehung zwischen den Coordinaten eines jeden Punkts einer Geraden; nimmt man dagegen u, v als variabel an und x, y als festliegend, *so erhält man eine Relation, welcher die Grössen u, v, die einer beliebigen, durch den festen Punkt mit den Coordinaten x, y gehenden Geraden entsprechen, genügen müssen.* Sind die Grössen u, v gegeben, so wird dadurch eine Gerade gekennzeichnet; man kann daher u, v *Coordinaten der Geraden* nennen.

Die Geraden, deren Coordinaten derselben linearen Gleichung genügen, gehen sämmtlich durch einen Punkt.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die drei Geraden (u, v), (u', v'), (u'', v'') durch einen Punkt gehen, lautet

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Coordinaten einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt zweier Geraden mit den Coordinaten (u', v'), (u'', v'') *geht, sind vom Typus:*

$$\frac{u' + \lambda u''}{1 + \lambda}, \quad \frac{v' + \lambda v''}{1 + \lambda}.$$

Die Geraden mit den Coordinaten

$$\left(\frac{u'+\lambda u''}{1+\lambda}, \frac{v'+\lambda v''}{1+\lambda}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{u'-\lambda u''}{1-\lambda}, \frac{v'-\lambda v''}{1-\lambda}\right)$$

theilen den Winkel der Geraden

$$(u', v'),\ (u'', v'') \quad \textit{harmonisch.}$$

Eine Beziehung zwischen den Geradencoordinaten u, v stellt im Allgemeinen eine Gesammtheit von unendlich vielen Tangenten an eine Curve, eine sogenannte Enveloppe, Einhüllende dar.

Der Winkel zwischen zwei Geraden (u, v), (u', v') ist, falls die Coordinatenaxen rechtwinklig auf einander stehen, also $\omega = \frac{\pi}{2}$ ist, durch die Formel

$$\cos\alpha = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2+v^2}\,\sqrt{u'^2+v'^2}} \quad \textit{gegeben.}$$

Bemerkenswerth sind die beiden imaginären unendlich fernen Punkte der Ebene, welche durch die Gleichung (in Geradencoordinaten) $u^2 + v^2 = 0$ dargestellt werden. Sie heissen *Kreispunkte,* weil *alle Kreise der Ebene durch sie gehen.* (Siehe Kap. 3 über die Kegelschnitte.)

Man beachte die folgende projective Definition des Winkels zweier Geraden, bei welcher die Kreispunkte der Ebene benutzt werden:

Der Winkel zweier Geraden ist dem Product aus $\frac{\sqrt{-1}}{2} = \frac{i}{2}$ mit dem natürlichen Logarithmus des anharmonischen Verhältnisses des Quadrupels gleich, welches aus den beiden gegebenen Geraden und den zwei Geraden, die nach den beiden Kreispunkten führen, gebildet ist. Theorem von Laguerre, *Nouv. Ann. 12,* 1853, p. 64. Vergl. z. B. A. Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie,* herausgeg. von Lindemann, mit Vorw. von Klein, in 2 Bdn., Leipzig 1875, 1891, 1. Bd. Siehe auch weiter unten Kap. 21, § 3.

Zwei ebene Systeme (ebene Punkt- und Strahlensysteme) heissen *homographisch* oder *collinear verwandt* oder *projectiv,* wenn sich zwischen ihren (reellen) Punkten und ihren (reellen) Geraden eine Zuordnung derart herstellen lässt, dass jedem Punkt P ein Punkt P' und jeder Geraden p eine Gerade p' entspricht und dass, wenn P der Geraden p, auch P' der Geraden p' angehört.

In dem allgemeineren Fall, in welchem es sich um reelle und imaginäre Elemente handelt, lautet die analytische Definition der Homographie zweier ebener Systeme, wie folgt: Werden mit x, y die Cartesischen Coordinaten eines Punkts der einen Ebene und mit x', y' die Coordinaten des entsprechenden Punkts der zweiten bezeichnet, so sind die beiden Systeme homographisch, wenn die Relationen

$$x' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}$$

gelten, und die Determinante $(ab'c'')$ von Null verschieden ist.

Oder auch: Sind u, v die Coordinaten einer Geraden der ersten und u', v' die Coordinaten der entsprechenden Geraden der zweiten Ebene, so sind die beiden Systeme homographisch, wenn Relationen vom Typus

$$u' = \frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''}, \quad v' = \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''}$$

bestehen.

Zwei sich entsprechende gerade Punktreihen oder zwei sich entsprechende Strahlenbüschel, welche in zwei homographischen ebenen Systemen enthalten sind, müssen immer projectiv sein.

Die Homographie zwischen zwei ebenen Systemen ist bestimmt, wenn festgestellt ist, dass den vier Ecken eines Vierecks in der einen die vier Ecken eines Vierecks in der anderen oder den vier Seiten eines Vierseits in der einen die vier Seiten eines Vierseits in der anderen Ebene entsprechen.

Zwei homographische ebene Systeme heissen *affin*, wenn der unendlich fernen Geraden des einen die unendlich ferne Gerade des anderen entspricht.

Die Affinitätsgleichungen haben den Typus

$$x' = ax + by + c, \quad y' = a'x + b'y + c'.$$

Die Affinität ist bestimmt, wenn die Zuordnung zwischen drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten der einen und drei nicht in einer Geraden gelegenen Punkten der anderen Ebene oder auch zwischen drei nicht demselben Büschel angehörigen Strahlen der einen und drei Strahlen der anderen Ebene festgestellt ist.

Bei affiner Zuordnung sind zwei sich entsprechende Punktreihen ähnlich und ist das Verhältniss zwischen den Flächeninhalten zweier sich entsprechender Dreiecke constant.

Ein specieller Fall der Affinität ist die *Aehnlichkeit*. Zwei ebene Systeme heissen *ähnlich*, wenn die sich entsprechenden Winkel jedesmal gleich sind.

In zwei ähnlichen Systemen ist das Aehnlichkeitsverhältniss zwischen zwei sich entsprechenden Punktreihen immer dasselbe und sind die sich entsprechenden Strahlenbüschel gleich.

Wenn die beiden homographischen ebenen Systeme conlocal sind (ineinander liegen), so kann man sich die Aufgabe stellen, die Punkte (oder Geraden), die sich selbst entsprechen, (Doppelpunkte bez. -Gerade) aufzufinden.

Es gibt im Allgemeinen drei Doppelpunkte und drei Doppelstrahlen, welche die Ecken bez. Seiten desselben Dreiecks sind.

Man erhält die drei Doppelpunkte, indem man zuerst die Wurzeln t der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a-t & b & c \\ a' & b'-t & c' \\ a'' & b'' & c''-t \end{vmatrix} = 0$$

ermittelt und alsdann den einzigen Punkt sucht, welcher den drei Geraden

$$\begin{aligned} ax + by + c &= tx \\ a'x + b'y + c' &= ty \\ a''x + b''y + c'' &= t \end{aligned}$$

gemeinschaftlich ist.

Vertauscht man darin x, y mit u, v, so ergibt sich das Verfahren zur Ermittelung der Doppelstrahlen, wenn die Homographie in Geradencoordinaten ausgedrückt ist.

Zwei homographische ebene Systeme sind *homolog oder perspectiv*, wenn die Verbindungslinien der sich entsprechenden Punkte durch denselben Punkt, *das Centrum der Perspectivität oder der Homologie* gehen. *In diesem Fall schneiden sich die entsprechenden Strahlen in Punkten einer Geraden (des perspectiven Durchschnitts* oder *der perspectiven Axe* oder *der Homologieaxe).* Man kann auch diese zweite Eigenschaft der Definition zu Grunde legen; die erste würde sich dann als Folge aus ihr ableiten lassen.

Die perspective Verwandtschaft oder Homologie ist eine Homographie, bei welcher eine Gerade von Doppelpunkten (die Homologieaxe) und ein Büschel von Doppelstrahlen existirt, dessen Scheitel das Homologiecentrum ist.

Wenn in zwei homographischen ebenen Systemen drei Punkte einer Geraden sich selbst zu entsprechenden Punkten haben, so sind die beiden Systeme perspectiv.

Die Homologie findet statt, wenn die Minoren 2^ter Ordnung der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a-t & b & c \\ a' & b'-t & c' \\ a'' & b'' & c''-t \end{vmatrix}$$

für einen gewissen Werth von t sämmtlich Null werden. Dieser Werth von t ist alsdann die zweifache oder dreifache Wurzel der Gleichung $D = 0$; in dem letzteren Fall liegt das Centrum der Homologie auf der Homologieaxe.

Zwei homographische (nicht affine) ebene Systeme lassen sich immer in eine solche Lage bringen, dass sie homolog werden.

Zwei homologe ebene Systeme werden durch das Centrum, die Axe der Homologie und ein Paar sich entsprechender Punkte definirt.

Zwei homographische und conlocale ebene Systeme lassen sich durch eine endliche Anzahl von Homologien wie auch durch eine endliche Anzahl von Projectionen und Schnitten auseinander ableiten.

Die Grenz- oder Fluchtgeraden zweier homologer ebener Systeme, d. h. die Geraden einer Ebene, welche den unendlich fernen Geraden der anderen entsprechen, sind der Homologieaxe parallel.

Eine Homologie zweier conlocaler ebener Systeme heisst *harmonisch* oder *involutorisch*, wenn zwei Punkte (und zwei Strahlen) sich auf doppelte Art entsprechen, d. h. einem Punkt P immer derselbe andere Punkt P' entspricht, mag man nun annehmen, P gehöre der einen oder der anderen Ebene an, und wenn dasselbe für die beiden Strahlen gilt.

Bei der involutorischen Homologie werden zwei sich entsprechende Punkte harmonisch durch das Centrum und die Axe der Homologie getrennt. (Daher kommt die Benennung *harmonisch.*) *Dasselbe gilt für zwei sich entsprechende Gerade.*

Bemerkenswerth ist der Satz: *Eine (ebene) Homographie, bei welcher die Verwandtschaft (in dem oben angegebenen Sinn) involutorisch ist, muss nothwendiger Weise eine Homologie sein.*

Wenn die Homologieaxe die unendlich ferne Gerade ist, heissen die beiden ebenen Systeme *homothetisch* (ähnlich und ähnlich gelegen). Liegt auch das Centrum im Unendlichen, so sagt man, die beiden Systeme seien *congruent*.

Bei der homothetischen Verwandtschaft fallen die Grenzgeraden im Unendlichen zusammen.

Bei dieser Verwandtschaft ist das Verhältniss zweier geradliniger sich entsprechender Strecken constant (das Homothetieverhältniss).

Die homothetischen Systeme sind ein specieller Fall der ähnlichen Systeme.

Ein allgemeinerer Fall der involutorischen Homographie ist *die cyclische Homographie n^{ter} Ordnung* zweier conlocaler ebener Systeme. Man erhält sie, wenn man zu einem Punkt A den entsprechenden A' sucht, alsdann annimmt, A' gehöre dem ersten ebenen System an und unter dieser Annahme den A' entsprechenden Punkt sucht u. s. w., und wenn man nach n solchen Operationen wieder zu dem Punkt A zurückkehrt.

Benutzt man homogene Coordinaten für die Punkte der Ebene und wählt das Fundamentaldreieck so, dass seine Ecken in drei Doppelpunkte der cyclischen Homographie n^{ter} Ordnung fallen, so lassen sich die Gleichungen dieser Homographie immer auf die Form

$$x_1' = \varepsilon_1 x_1, \quad x_2' = \varepsilon_2 x_2, \quad x_3' = \varepsilon_3 x_3$$

reduciren, worin die ε, n^{te} primitive Wurzeln aus der Einheit sind.

Wenn die (reellen) Elemente zweier conlocaler oder nicht conlocaler ebener Systeme so einander zugeordnet werden, dass den Punkten des einen die Geraden des anderen entsprechen und umgekehrt, und dass Punkten, welche in der Geraden p der einen Ebene liegen, in der anderen Gerade entsprechen, die durch den p entsprechenden Punkt P gehen und umgekehrt, so sagt man, die beiden Ebenen stehen in *correlativer* oder *dualer* oder *reciproker Correspondenz*.

In dem allgemeineren Fall, in welchem reelle und imaginäre Elemente in Betracht kommen, wird die *Dualität* analytisch durch Relationen vom Typus

$$u' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad v' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}$$

definirt, worin x, y Coordinaten von Punkten, u', v' Coordinaten von Geraden sind und die Determinante $(a b' c'')$ von Null verschieden ist.

Die Dualität ist bestimmt, wenn man den vier Ecken eines Vierecks die vier Seiten eines Vierseits entsprechen lässt.

Zwei ebene zu einem dritten duale Systeme sind homographisch zueinander.

Eine Reciprocität oder Dualität zweier conlocaler ebener Systeme kann *involutorisch* sein, d. h. so, dass einem Punkt immer dieselbe Gerade entspricht, mag man den Punkt als zum ersten oder als zum zweiten ebenen System gehörig betrachten; eine solche involutorische Dualität wird *Polarität* genannt.

Der Punkt und die Gerade, welche sich entsprechen, heissen in diesem Fall *Pol* bez. *Polare.*

Eine Dualität, bei der ein Dreieck existirt, dessen Ecken, als Punkte eines der beiden ebenen Systeme betrachtet, in dem anderen System die gegenüberliegenden Seiten entsprechen (Polardreieck, zu sich selbst reciprokes, sich selbst conjugirtes Dreieck), ist eine Polarität.

In jeder Polarität gibt es unendlich viele Polardreiecke.

Eine Polarität wird dadurch bestimmt, dass man ein Polardreieck feststellt, also ein solches, welches die vorstehend angegebene Eigenschaft besitzt, und die Polare eines Punktes angibt, der nicht auf einer Seite dieses Dreiecks liegt.

In einer Polarität heissen zwei Punkte *reciprok*, wenn der eine auf der Polaren des anderen liegt.

Eine ähnliche Definition gilt für *zwei reciproke Gerade.*

Wenn die Polare eines Punkts durch den Punkt selbst geht, so heisst der Punkt *Doppelpunkt* und seine Polare *Doppelgerade* der Polarität.

Analytisch wird die Polarität durch ähnliche Relationen definirt, wie die Dualität, wobei jedoch

$$a' = b, \; a'' = c, \; b'' = c' \text{ ist.}$$

Benutzt man homogene Coordinaten für die Punkte und die Geraden der Ebene, so lauten die Gleichungen der Dualität:

$$u_i = \sum_k a_{ik} x_k, \; (i, k = 1, 2, 3);$$

die Gleichungen der Polarität sind dieselben, nur ist $a_{ik} = a_{ki}$.

Die Doppelpunkte sind durch die Relation gegeben:

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0,$$

und liegen daher auf einem Kegelschnitt (siehe Kap. 3).

Wenn das Fundamentaldreieck der Coordinaten zu sich selbst reciprok ist, hat dieser Ausdruck den Typus

$$\sum a_{ii} x_i^2 = 0.$$

Wir halten es nicht für nöthig, die Geometrie der beiden anderen Grundgebilde 2ter Stufe, des Strahlen- und Ebenenbündels eingehend zu besprechen und bemerken nur, dass sich die Eigenschaften des Bündels aus denen des ebenen Systems ableiten lassen, wenn man sich das letztere von einem ausserhalb desselben liegenden Punkt projicirt denkt. Die Definitionen von *homographischen oder projectiven, correlativen oder reciproken* etc. *Bündeln* und die Grundeigenschaften dieser Beziehungen sind analog, wie bei den ebenen Systemen.

§ 4. Die Geometrie der Grundgebilde 3ter Stufe. Das räumliche Punkt- und Ebenensystem.

Zwischen den Tetraedern, welche zu Ecken vier von sechs gegebenen Punkten A, B, C, D, E, F des Raums haben, besteht die Relation:

$$ABEF \cdot CDEF + BCEF \cdot ADEF + CAEF \cdot BDEF = 0;$$

für sieben Punkte ist:

$$ABCG \cdot DEFG + ACDG \cdot BEFG + ADBG \cdot CEFG = \\ = BCDG \cdot AEFG,$$

und für acht Punkte schliesslich:

$$BCDE \cdot AFGH + ACED \cdot BFGH + ADEB \cdot CFGH + \\ + ABEC \cdot DFGH + ABCD \cdot EFGH = 0$$

(Monge, Möbius).

Bezeichnet man mit $\delta_{12}, \delta_{13}, \cdots$ die Abstände zwischen fünf Punkten des Raums, so ist:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \delta_{51}^2 & \delta_{52}^2 & \delta_{53}^2 & \delta_{54}^2 \\ 1 & \delta_{15}^2 & 0 & \delta_{12}^2 & \delta_{13}^2 & \delta_{14}^2 \\ 1 & \delta_{25}^2 & \delta_{21}^2 & 0 & \delta_{23}^2 & \delta_{24}^2 \\ 1 & \delta_{35}^2 & \delta_{31}^2 & \delta_{32}^2 & 0 & \delta_{34}^2 \\ 1 & \delta_{45}^2 & \delta_{41}^2 & \delta_{42}^2 & \delta_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die letztere Relation hat Lagrange, *Mém. de Berlin,* 1773 angegeben, jedoch in anderer Form. Später beschäftigte sich mit ihr: Carnot in einer speciellen Arbeit, *Sur la relation, qui existe* etc., Paris 1806 und Cayley, welcher ihr die Gestalt einer Determinante gab, *Cambr. math. Journ.,* 2.

Diese Beziehungen in Verbindung mit den analogen für die Gerade und Ebene wurden auch von Schering untersucht, *Gött. Nachr.*, 1870; D'Ovidio, *Giorn. di Batt.*, 11; Study, *Zeitschr. für Math. und Physik,* 27 und neuerdings von De Tilly, *Mém. de Belg.*, 1893 und Mansion, *Société scient. de Bruxelles,* 1895.

Wir wollen annehmen, es seien im Raum drei Gerade (*Coordinatenaxen*) festgesetzt, die sich in einem Punkt O (dem *Coordinatenanfang*) treffen. Die drei Geraden bestimmen drei Ebenen (*Coordinatenebenen*) und durch jeden Punkt P des Raums gehen drei andere den drei ersten bez. parallele Ebenen.

Die Schnitte dieser letzteren mit den Coordinatenaxen ergeben drei Punkte auf den Axen, die man als Projectionen des gegebenen Punkts des Raums ansehen kann; jedem Punkt des Raums entsprechen so drei Projectionspunkte, je einer auf jeder der drei gegebenen Geraden; wenn man daher in jeder dieser Geraden ein Coordinatensystem zur Bestimmung der Punkte dieser Geraden festsetzt, *so kann man die drei Coordinaten der drei Projectionen von P als Coordinaten von P annehmen.* Man erhält so das Coordinatensystem, welches man das *Cartesische* zu nennen pflegt.

Am häufigsten kommt es vor, dass die Coordinaten auf den drei geraden Punktreihen Cartesische Coordinaten sind, die den gemeinschaftlichen Anfangspunkt O haben und durch dieselbe Masseinheit gemessen werden.

Stehen die drei Axen zu je zweien senkrecht aufeinander, so heisst das Coordinatensystem *rechtwinklig* oder *orthogonal.*

Wir wollen ferner annehmen, es sei ein Punkt O (der *Pol*) gegeben, eine durch ihn gehende Gerade (die *Polaxe*) und eine durch diese gelegte Ebene (die *Polebene*).

Jeder Punkt P des Raums kann bestimmt werden, wenn sein Abstand ϱ von O, der Winkel θ, den die Gerade OP mit der Polaxe macht, und der Winkel φ bekannt ist, der den Flächenwinkel misst, welcher von der Polebene und der durch P und die Polaxe gelegten Ebene eingeschlossen wird.

Die drei Zahlen ϱ, θ, φ kann man zu Coordinaten von P nehmen; man erhält so das *Polarcoordinatensystem*. Man kann festsetzen, dass ϱ eine immer positive Grösse sein, θ immer zwischen 0 und π, φ dagegen zwischen 0 und 2π liegen soll.

Gibt man nun weiter den drei Coordinaten eines Punkts des Raums die Form

$$x = \frac{x_1}{x_4},\ y = \frac{x_2}{x_4},\ z = \frac{x_3}{x_4},$$

so heissen die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4 *homogene Coordinaten.*

Von Systemen solcher Coordinaten ist besonders das der *Tetraedercoordinaten* bemerkenswerth, welches auch den Namen der *quadriplanaren (Vierebenen-)* oder *tetrametrischen Coordinaten* führt.

Nehmen wir vier Ebenen des Raums, welche ein *(Fundamental-) Tetraeder* bilden. Es seien p, q, r, s die Abstände eines Punktes P von den vier Ebenen, a, b, c, d vier Constante und x_1, x_2, x_3, x_4 mögen proportional zu

$$\frac{p}{a},\ \frac{q}{b},\ \frac{r}{c},\ \frac{s}{d} \quad \text{gesetzt werden.}$$

Die vier Ecken des Tetraeders heissen die *Fundamentalpunkte*, die vier Ebenen die *Fundamentalebenen*. Der Punkt U, dessen Coordinaten sämmtlich gleich sind, der Punkt also, dessen Abstände von den vier Seitenflächen proportional zu a, b, c, d sind, heisst der *Einheitspunkt.*

Aehnlich, wie in § 3, erkennt man, dass *die Verhältnisse zweier beliebiger dieser homogenen Coordinaten den Doppelverhältnissen der vier Ebenen eines Büschels gleich sind, welches eine der Kanten des Tetraeders zur Axe hat, und dessen vier Ebenen die folgenden sind: die zwei Seitenflächen des Tetraeders, welche durch diese Kante gehen*, *sowie die durch U und die durch P gehende Ebene.*

Die so definirten Coordinaten sind daher *projective.*

Wenn eine der Ebenen des Tetraeders die unendlich ferne Ebene ist, so reducirt sich das Tetraedercoordinatensystem auf ein Cartesisches, wie in § 3.

Wie bei der Ebene, so tritt uns auch hier zuerst das Problem der *Coordinatentransformation* entgegen, d. h. die Ermittelung der Formeln, mittelst welcher sich die Coordinaten eines gev ·s durch die eines anderen ausdrücken lassen.

Sind die beiden Systeme Cartesische, so bestehen die Relationen:

$$x = \frac{X\cos(Xx') + Y\cos(Yx') + Z\cos(Zx')}{\cos(xx')} + a,$$

$$y = \frac{X\cos(Xy') + Y\cos(Yy') + Z\cos(Zy')}{\cos(yy')} + b,$$

$$z = \frac{X\cos(Xz') + Y\cos(Yz') + Z\cos(Zz')}{\cos(zz')} + c,$$

worin (x, y, z), (X, Y, Z) die Coordinaten desselben Punkts in dem einen und in dem anderen System bedeuten, (a, b, c) die Coordinaten des Anfangspunkts des zweiten Systems in Bezug auf das erste bezeichnen, x', y', z' die Richtungen der Lothe auf die Ebenen yz, zx, xy und

$$\cos(xx'), \cdots, \cos(Xx'), \cdots$$

die Cosinus der von den Geraden $x, x', \cdots$ bez. $X, x', \cdots$ gebildeten Winkel sind.

Für rechtwinklige Systeme werden die Formeln einfacher:

$$x = a + X\cos(Xx) + Y\cos(Yx) + Z\cos(Zx),$$
$$y = b + X\cos(Xy) + Y\cos(Yy) + Z\cos(Zy),$$
$$z = c + X\cos(Xz) + Y\cos(Yz) + Z\cos(Zz).$$

In diesem Fall gibt es zwischen den neun Cosinus $\cos(Xx), \cdots$ verschiedene Beziehungen, nämlich:

(1) $\cos^2(Xx) + \cos^2(Xy) + \cos^2(Xz) = 1,$

(2) $\cos^2(Xx) + \cos^2(Yx) + \cos^2(Zx) = 1,$

(3) $\cos(Yx)\cos(Zx) + \cos(Yy)\cos(Zy) + \cos(Yz)\cos(Zz) = 0,$

(4) $\cos(Xy)\cos(Xz) + \cos(Yy)\cos(Yz) + \cos(Zy)\cos(Zz) = 0,$

und je zwei weitere, die man durch Vertauschung von X mit Y bez. Z aus der ersten, von x mit y bez. z aus der zweiten und durch cyclische Vertauschung von X, Y, Z aus der dritten und von x, y, z aus der vierten Gleichung erhält.

Im Ganzen sind es also 12 Relationen, von denen jedoch nur 6 unabhängig voneinander sind.

Die Formeln, mittelst welcher die Polarcoordinaten durch orthogonale Cartesische und umgekehrt ausgedrückt werden, lauten, wenn man annimmt, der Anfangspunkt der orthogonalen Cartesischen Coordinaten falle mit dem Pol des Polarcoordinatensystems, die Polaxe mit der z-Axe und die Polebene mit der xz-Ebene zusammen:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \sin\theta \cos\varphi, & \varrho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ y &= \varrho \sin\theta \sin\varphi, & \cos\theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ z &= \varrho \cos\theta, & \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Bei dem Cartesischen Coordinatensystem liegen drei Punkte mit den Coordinaten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) *in einer Geraden, wenn*

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

ist, oder, was dasselbe bedeutet, wenn die Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{matrix} \right\|$$

verschwinden. Dabei reicht es aus, wenn nur zwei dieser Determinanten Null werden.

Der Abstand eines Punktes (x, y, z) *vom Coordinatenanfang ist durch die Formel*

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2yz\cos(yz) + 2zx\cos(zx)$$

gegeben.

Zwischen den Cosinus der Winkel, welche eine Gerade r mit den drei Coordinatenaxen bildet, besteht die Relation:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(rx) & \cos(ry) & \cos(rz) \\ \cos(xr) & 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(yr) & \cos(yx) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(zr) & \cos(zx) & \cos(zy) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Für rechtwinklige Axen ist einfach

$$\cos^2(rx) + \cos^2(ry) + \cos^2(rz) = 1.$$

Der Winkel, den zwei Gerade r, r' *miteinander bilden, ist bei rechtwinkligen Axen durch die Formeln*

$$\cos(rr') = \cos(xr)\cos(xr') + \cos(yr)\cos(yr') + \cos(zr)\cos(zr'),$$

$$\sin^2(rr') = \left\| \begin{matrix} \cos(xr) & \cos(yr) & \cos(zr) \\ \cos(xr') & \cos(yr') & \cos(zr') \end{matrix} \right\|^2$$

gegeben.

Der Flächeninhalt A des Dreiecks, dessen Ecken die Punkte mit den Coordinaten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) sind, wird (in rechtwinkligen Coordinaten) durch

$$4A^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \quad \textit{bestimmt.}$$

Das Volumen V des durch die vier Punkte x_1, y_1, z_1 etc. bestimmten Tetraeders ist seinem absoluten Werth nach in beliebigen Cartesischen Coordinaten

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(yx) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(zx) & \cos(zy) & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Für rechtwinklige Axen wird die erste Determinante gleich 1.

Die Cartesischen Coordinaten x, y, z des Punkts einer Ebene genügen einer Gleichung 1^{ten} Grads vom Typus:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \textit{(Gleichung der Ebene)}$$

und jede so beschaffene Gleichung stellt eine Ebene dar.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit vier Punkte in einer Ebene liegen, ist:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

worin die drei ersten Elemente jeder Zeile die Cartesischen Coordinaten eines der vier Punkte sind.

Die Ebene, welche durch die drei Punkte mit den Coordinaten

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3)$$

geht, wird durch dieselbe Gleichung dargestellt. Darin sind alsdann $(x\,y\,z)$ die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der Ebene (die laufenden Coordinaten).

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ *ist die Gleichung der Ebene, welche auf den Axen, vom Anfangspunkt aus gemessen, die Strecken p, q, r abschneidet.*

Zwei Ebenen

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sind dann und nur dann parallel, wenn

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \textit{ist.}$$

Eine Gerade im Raum wird durch zwei Gleichungen dargestellt, welche die Gleichungen zweier durch sie gehender Ebenen sind.

Drei Ebenen gehören einem Büschel an, d. h. sie haben eine Gerade gemeinschaftlich, wenn die Determinanten 3^{ter} Ordnung der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{Vmatrix}$$

verschwinden; dabei reicht es hin, wenn nur zwei Determinanten Null werden.

Vier Ebenen gehen durch einen Punkt, wenn die Determinante 4^{ter} Ordnung der 16 Coefficienten der Gleichungen der vier Ebenen verschwindet.

Bezeichnet man mit α, β, γ die Winkel, welche das Loth auf die Ebene mit den Axen bildet, und mit ϱ den Abstand des Coordinatenanfangs von der Ebene, so lässt sich die Gleichung der Ebene schreiben:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \varrho = 0 \quad \textit{(die Normalform).}$$

Bei rechtwinkligen Axen reducirt sich die allgemeine Gleichung der Ebene auf die Normalform, wenn man sie mit

$$\frac{1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

multiplicirt, wobei dem Radical das Vorzeichen gegeben werden muss, welches dem Vorzeichen des konstanten Terms der Gleichung entgegengesetzt ist.

Den Abstand eines Punkts X, Y, Z von einer Ebene erhält man, wenn in der negativ genommenen linken Seite der Normalgleichung der Ebene an die Stelle der laufenden Coordinaten diejenigen des Punkts gesetzt werden.

Der Winkel α zweier Ebenen ist für rechtwinklige Axen durch

$$\cos\alpha = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix}\right\|^2}{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)} \quad \textit{gegeben.}$$

Die Bedingung dafür, dass zwei Ebenen lothrecht aufeinander stehen, ist für rechtwinklige Axen:

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Gibt man der Gleichung der Ebene die Form

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

so können die Coefficienten u, v, w als *Coordinaten der Ebene* betrachtet werden.

Es lassen sich nun ähnliche Betrachtungen anstellen, wie über die Coordinaten von Geraden in der Ebene; doch wollen wir uns dabei nicht aufhalten.

Zwei Räume (von drei Dimensionen) sind *homographisch* oder *collinear* oder *projectiv*, wenn sie sich so entsprechen, dass jedem (reellen) Punkt P und jeder (reellen) Ebene p des einen Raums ein Punkt P' und eine Ebene p' des anderen zugeordnet ist, und dabei, wenn P in p liegt, auch der entsprechende Punkt P' der entsprechenden Ebene p' angehört; oder mit anderen Worten: wenn sich in dem ersten Raum ein Punkt in einer Ebene bewegt, so verschiebt sich auch der entsprechende Punkt in dem zweiten Raum in der Ebene, welche der ersten Ebene entspricht.

Die analytischen Definitionen (welche die vorstehende enthalten und auch den Fall imaginärer Elemente umfassen) für zwei homographische Räume sind die folgenden: Versteht man unter x, y, z und x', y', z' die Coordinaten der sich in den beiden Räumen entsprechenden Punkte, so heissen diese Räume *homographisch*, wenn die Beziehungen bestehen:

$$x' = \frac{ax + by + cz + d}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''},$$

$$y' = \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''},$$

$$z' = \frac{a''x + b''y + c''z + d''}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''},$$

worin die Determinante $(a\, b'\, c''\, d''')$ von Null verschieden ist; oder auch: wenn zwischen den Coordinaten u, v, w; u', v', w' der zwei sich in den beiden Räumen entsprechenden Ebenen den vorstehenden ähnliche linear gebrochene Relationen bestehen.

Es gibt im Allgemeinen vier Doppelpunkte und -Ebenen (d. h. Punkte und Ebenen, die sich selbst entsprechen).

Die Homographie zwischen zwei Räumen ist bestimmt, wenn festgestellt ist, dass die vier Ecken (oder die vier Seitenflächen) eines Tetraeders in dem einen den Ecken (oder Seitenflächen) eines Tetraeders in dem anderen Raum zugeordnet sind, und dass ferner eine Ebene des ersten Raums, welche nicht durch einen der vier Punkte geht (oder ein Punkt, welcher nicht in einer der vier Seitenflächen liegt) einer Ebene des zweiten Raums zugeordnet ist, welche nicht durch einen der vier entsprechenden Punkte geht (oder einem Punkt, welcher nicht in einer der vier entsprechenden Seitenflächen liegt).

Wenn die unendlich fernen Ebenen zweier Räume sich entsprechen, so wird die Homographie zur *Affinität.*

Die Affinität zweier Räume wird bestimmt, indem man feststellt, dass vier Seitenflächen (oder Ecken) eines Tetraeders in dem einen vier Seitenflächen (oder Ecken) eines Tetraeders in dem anderen Raum entsprechen.

In zwei affinen Räumen sind zwei sich entsprechende Punktreihen ähnlich und zwei sich entsprechende Ebenen affin.

In zwei affinen Räumen haben die Abstände zweier sich entsprechender Punkte von zwei festen Ebenen ein constantes Verhältniss.

Die Volumina zweier sich entsprechender Körper in zwei affinen Räumen stehen in constantem Verhältniss.

Ein specieller Fall der Affinität ist die *Aehnlichkeit.* Zwei Räume heissen *ähnlich*, wenn die sich entsprechenden Winkel gleich sind.

In zwei ähnlichen Räumen sind zwei sich entsprechende ebene Systeme ebenfalls ähnlich (vergl. § 3).

Zwei homographische Räume, welche ein Bündel von Doppelelementen oder auch ein ebenes System von Doppelelementen enthalten (*das Eine ist die Folge des Anderen*) heissen *homolog*; der Mittelpunkt des Bündels heisst das *Centrum der Homologie* und die Ebene die *Homologieebene.* Wenn die Correspondenz zwischen den beiden Räumen involutorisch ist, so erhält man, wie gewöhnlich, die *involutorische oder harmonische Homologie.*

Zwei homologe Räume werden durch das Centrum, die Ebene der Homologie und die Zuordnung zweier Punkte definirt, die mit dem Centrum der Homologie nothwendiger Weise in einer Geraden liegen müssen, und von denen keiner mit diesem Centrum zusammenfällt.

Liegt das Centrum unendlich fern, so ergibt sich die *affine Homologie*, liegt dagegen die Homologieebene im Unendlichen, so erhält man die *Homothetie.*

Die Homothetie ist ein specieller Fall der Aehnlichkeit. Daher:

Im Fall der Homothetie ist das Verhältniss zweier sich entsprechender geradliniger Strecken constant.

Zwei ähnliche Räume können immer in homothetische Lage gebracht werden.

Bemerkenswert ist auch die *axiale Homographie*, welche alle Punkte zweier windschiefen Geraden (die dann auch Enveloppen von Doppelebenen sind) zu Doppelpunkten hat.

Bei der axialen Homographie liegen zwei sich entsprechende Punkte immer auf einer Geraden, welche die beiden Geraden der Doppelpunkte in zwei Punkten schneidet, die mit den ersteren in constantem anharmonischem Verhältniss stehen.

Eine solche Homographie wird involutorisch, wenn dieses Quadrupel von Punkten harmonisch ist.

Jede involutorische räumliche Homographie kann entweder eine involutorische Homologie oder eine involutorische axiale Homographie sein.

Ein allgemeinerer Fall der involutorischen Homographie ist auch hier die *cyclische Homographie von der n^{ten} Ordnung*, für welche die analoge Definition, wie in den vorigen Paragraphen, gilt.

Zwischen den Punkten und Ebenen eines Raums und den Ebenen und Punkten eines anderen kann man sich eine ein-eindeutige Zuordnung denken, welche derjenigen ähnlich ist, von der in § 3 die Rede war; sie heisst *Dualität* oder *Correlativität* oder *Reciprocität.*

In homogenen Coordinaten von Punkten und Ebenen lauten die Gleichungen der räumlichen Dualität

$$u_i' = \sum_k a_{ik} x_k, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Die Dualität ist in zwei Fällen involutorisch: wenn $a_{ik} = a_{ki}$ und wenn $a_{ik} = -a_{ki}$ ist, woraus $a_{ii} = 0$ folgt. In dem ersten

Fall heisst sie *gewöhnliche Polarität*, in dem zweiten *Nullpolarität* oder *Nullsystem.*

Bei der gewöhnlichen Polarität ist der Ort der Punkte, die auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen, eine Fläche zweiter Ordnung; vergl. Kap. 4.

Bei dem Nullsystem liegt jeder Punkt in der ihm entsprechenden Ebene, geht jede Ebene durch ihren eigenen Pol und ist die Gesammtheit der Doppelgeraden ein linearer Complex, vergl. Kap. 14, § 3.

Mit den *Nullpolaritäten* oder *Nullsystemen* haben sich zuerst Giorgini, *Mem. della Soc. it. delle scienze*, 20, 1827, später Möbius, Chasles, v. Staudt, etc. beschäftigt, vergl. Kap. 10, § 2.

Wir wollen nun die sogenannten *Antiprojectivitäten* Segre's kurz besprechen.

Es seien x_i die homogenen Coordinaten der (reellen oder complexen) Punkte eines Raums (von 2 oder 3 Dimensionen) und ähnlich u_i die homogenen Coordinaten des dem Punkt in diesem Raum dualen Elementes (d. h. der Geraden oder der Ebene, je nachdem der Raum 2 oder 3 Dimensionen hat). Wir bezeichnen die zu x_i, u_i *conjugirt complexen Grössen* mit $\bar{x}_i$, $\bar{u}_i$.

Wir ersetzen dann die gewöhnlichen Relationen der Homographie und der Dualität durch die folgenden:

$$x_i' = \sum_k a_{ik}\,\bar{x}_k,$$
$$u_i' = \sum_k a_{ik}\,\bar{x}_k.$$

Durch diese Formeln werden zwei ein-eindeutige Zuordnungen zwischen den Elementen x, x' oder x, u' zweier Räume festgestellt. Bei der ersten entsprechen Punkten einer Geraden oder einer Ebene, wie bei der Homographie, wieder Punkte einer Geraden oder einer Ebene; bei der zweiten entsprechen Punkten einer Geraden oder Ebene, wie bei der Dualität, Gerade oder Ebenen eines Büschels oder auch Ebenen eines Bündels.

Diese Zuordnungen heissen *Anticollineation* (oder *Antiprojectivität*) bez. *Antidualität.*

Für sie bleibt die Eigenschaft bestehen, dass harmonischen Elementen harmonische Elemente entsprechen.

Sind diese Correspondenzen involutorisch, so erhält man die *Antiinvolutionen* und *Antipolaritäten.*

Die Betrachtung der Doppelelemente einer Antipolarität führt zu den sogenannten *Hyperkegelschnitten* und *Hyperquadriflächen*, welche durch eine Gleichung vom Typus

$$\sum a_{ik}\, x_i\, \bar{x}_k = 0$$

dargestellt werden, worin $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ ist.

Die linke Seite dieser Gleichung eines Hyperkegelschnitts oder einer Hyperquadrifläche führt zur Betrachtung von Formen:

$$\sum a_{ik}\, x_i\, \bar{x}_k,$$

wobei $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ ist; eine derartige Form heisst, welches auch immer die Zahl der Variabelen sei, eine Hermite'sche *Form*; Hermite, Crelle, 47, 52, 53. Siehe auch Repert. I, Kap. 12, §§ 15, 22.

Ueber diese Zuordnungen vergl. die vier Artikel von Segre, *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, *Atti di Torino*, 1890 und *Math. Ann.* 40. Siehe auch C. Juel, *Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie, Acta math.*, 14, p. 1—30.

Die älteste analytische Geometrie ist wohl die im Jahr 1637 in erster Auflage erschienene *Géometrie* von Descartes gewesen, deren spätere Ausgabe mit Anmerkungen von De Beaune und Schooten versehen ist. Siehe das Namenregister.

In diesem Buch wird zum ersten Mal in wissenschaftlicher Art der Begriff der Coordinaten in der Ebene eingeführt, während der Begriff der Coordinaten in der geraden Punktreihe wohl von Vieta, 1540—1603 (siehe das Namenregister) herrührt. Die barycentrischen Coordinaten sind von Möbius, *der barycentrische Calcül*, Leipzig 1827, die projectiven von Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage,* 2 Hfte., Nürnberg 1856, 1857 und von Fiedler, *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*, 3. Aufl., 3 Thle., Leipzig 1883, 85, 88 eingeführt worden; die *homogenen* haben Möbius, Plücker und Hesse eingehend studirt.

Der Begriff des *Doppelverhältnisses* findet sich bei Möbius, der ihn *Doppelschnittverhältniss* nannte, und bei Chasles, der ihm den Namen *anharmonisches Verhältniss* gab. Andere Untersuchungen sind von Steiner und namentlich von Staudt, der den Begriff unabhängig von dem Begriff der Länge definirte.

Das Princip der Homologie hat Poncelet, *Propriétés projectives des figures,* Paris 1822 angewendet, das der Homographie

Möbius, Steiner und Chasles und das Princip der Dualität verdankt man speciell Gergonne, *Ann. des math.*, 1827, Chasles und Plücker.

Die *Involution* von Punkten wurde, abgesehen von den alten Griechen, unter den Neueren zuerst von Desargues (1593—1662) studirt, von welchem auch der Name herrührt.

Die *projective Geometrie*, d. h. diejenige, welche die projectiven Eigenschaften der Figuren behandelt, hat sich etwa in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts zur Wissenschaft ausgebildet. Die ersten wichtigen Werke sind von Poncelet, *Traité des propr. project. des figures*, Metz et Paris, 1822; Steiner, *System. Entwickl.* etc., Berlin 1832; auch in Ostwald's Klassikern, Nr. 82, 83, vergl. Namenregister; Staudt, *Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847; Chasles, *Traité de Géom. supér.*, Bruxelles 1852, *Traité de Sect. coniques*, Paris 1865. Von den Neueren citiren wir Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, Leipzig 1876, 1891; Cremona, *Elementi di Geometria projettiva*, Torino 1878 (deutsch von Trautvetter), von welchen Uebersetzungen in verschiedenen Sprachen existiren; Reye, *Geometrie der Lage*, 2 Bde., Hannover 1877—1880; Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882; Weyr, *Die Elemente der projectivischen Geometrie*, 2 Hfte., Wien 1883, 1887; die neuesten sind Sannia, Napoli, 1891, 1894 und Enriques, Bologna, 1898.

Zu diesen Werken könnte man die Bücher über *darstellende Geometrie* hinzufügen, die auch die projective Geometrie behandeln, wie z. B. die berühmten Werke von Fiedler, *Darstell. Geom.*, Leipzig 1883—1888 und Wiener, *Lehrbuch der darst. Geom.*, 2 Bde., Leipzig 1884, 1887. Man beachte, dass die projective Geometrie von den verschiedenen Autoren verschiedene Namen erhalten hat; Chasles nannte sie *neue oder höhere Geometrie*, Carnot, Cayley, v. Staudt, Gergonne und Andere *Geometrie der Lage*, Cremona, Klein etc. *projective Geometrie.*

Nahe verwandt mit der projectiven Geometrie ist die sogenannte *darstellende*, deren Zweck es ist, räumliche Figuren durch Centralprojectionen oder rechtwinklige Parallelprojectionen auf einer Ebene darzustellen und die Eigenschaften dieser Abbildungen zu untersuchen.

Man verdankt Monge, *Géom. descr.*, Paris 1795 auch in Ostwald's Klassikern, N. 117 (vergl. Namenregister) die erste systematische Behandlung der darstellenden Geometrie, die im Anfang des 19ten Jahrhunderts durch Monge, Lacroix, Olivier, Hachette, Dupin weiter entwickelt wurde. Eine eingehende Geschichte der darstellenden Geometrie findet man in dem ersten Kapitel des oben citirten Werks von Wiener und in einem neuen Buche von Obenrauch, *Gesch. der darst. und project. Geom.*, Brünn 1897.

Unter den Begriffen, die dazu gedient haben, den geometrischen Resultaten grössere Einheit und Einfachheit sowie allgemeinere Gültigkeit zu geben und unnöthige Classificationen von Ausnahmsfällen zu vermeiden, sind besonders die Begriffe der *unendlich fernen* und *der imaginären Elemente* hervorzuheben. Der erste geht bis auf Desargues zurück; der zweite ist eine Folge der Anwendung der Analysis auf die Geometrie.

Verschiedene Autoren haben versucht, den letzteren Begriff unabhängig von allen analytischen Begriffen in die reine Geometrie einzuführen. Dazu können die *elliptischen Involutionen* dienen, deren Doppelpunkte, wie man weiss, imaginär sind und deren Paare von reellen Punkten sich mithin zur Definition eines Paares imaginärer Punkte benutzen lassen. Untersuchungen dieser Art hat hauptsächlich Staudt angestellt; die modernen Darstellungen der projectiven Geometrie z. B. das oben citirte Buch von Sannia entwickeln diese Begriffe ins Einzelne.

Von den Werken über *analytische Geometrie* citiren wir die allgemein bekannten Bücher von Salmon, die verschiedene Ausgaben und Uebersetzungen erlebt haben (siehe Namenregister); Baltzer, *Analytische Geometrie,* Dresden 1882; Hesse, Leipzig 1866—76 (siehe Namenregister) und D'Ovidio, *Geometria analitica*, Torino 1896. Vergl. zu dem letzteren die Besprechung im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Berlin 1896, in welcher die Vorgeschichte des Buches behandelt wird, das aus zwei verschiedenen in den Jahren 1873 und 1885 erschienenen Büchern zusammengeschmolzen wurde.

Zur Einführung in die analytische Geometrie ist zu empfehlen: F. Schur, *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Leipzig 1898; Ganter und Rudio, *Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes,* Leipzig 1897, 1899; M. Simon, *Analytische Geometrie der Ebene,* Leipzig 1897; derselbe, *Analytische Geometrie des Raums,* Leipzig 1898.

Kapitel II.

Die Geometrie der unstetigen Gebilde.

§ 1. Allgemeines.

Die Gebilde, die wir in diesem Kapitel betrachten werden, sind Figuren, die aus Punkten, Geraden und Ebenen in endlicher Anzahl bestehen; man pflegt sie im Gegensatz zu den im vorigen Kapitel betrachteten Figuren *unstetige Gebilde* zu nennen, weil man offenbar von einem ihrer Elemente zu einem anderen stetig nicht übergehen kann, wenn dabei immer nur in dem Gebilde enthaltene Elemente derselben Art durchlaufen werden.

Eine Gruppe einer endlichen Anzahl von Punkten einer Punktreihe oder einer Ebene oder eines Raums oder auch eine Gruppe einer endlichen Anzahl von Geraden oder Ebenen eines Büschels etc. sind *unstetige Gebilde*. Ausser ihnen gibt es noch die folgenden:

Ein vollständiges ebenes n-Eck ist ein System von n Punkten (*Ecken*) einer Ebene, von denen keine drei in derselben Geraden liegen, in Verbindung mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden (*Seiten*), welche sie zu je zweien miteinander verbinden.

Der Schnitt zweier Seiten, welche nicht beide durch einen der n Punkte gehen, heisst *Diagonalecke*.

Die Anzahl dieser Ecken beträgt $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Ein vollständiges ebenes n-Seit ist ein System von n Geraden (*Seiten*) einer Ebene, von denen keine drei sich in demselben Punkt treffen, in Verbindung mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten (*Ecken*), in denen sie sich zu je zweien schneiden. Jede Gerade, welche zwei nicht auf derselben Seite liegende Ecken verbindet, heisst *Diagonale*.

Die Anzahl dieser Diagonalen beträgt $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Ein einfaches ebenes n-Eck oder n-Seit ist ein System von n in einer gegebenen cyclischen Reihenfolge betrachteten Punkten einer Ebene, wenn es mit dem System der n Geraden zusammengefasst wird, welche jeden Punkt mit dem folgenden verbinden.

Projicirt man das vollständige ebene n-Eck von einem Punkt ausserhalb seiner Ebene, so erhält man einen *vollständigen n-kantigen Winkel* (ein *vollständiges n-Kant*) und durch Projection des n-Seits von einem Punkt ausserhalb seiner Ebene den *vollständigen n-flachigen Winkel* (das *vollständige n-Seit im Strahlenbündel).*

Ein vollständiges windschiefes n-Eck ist ein System von n Punkten, von denen keine vier in derselben Ebene liegen, in Verbindung mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden, welche durch je zwei von ihnen gehen und mit den

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$$

Ebenen (*Seitenflächen*), welche durch je drei von ihnen gelegt sind.

Ein vollständiges n-Flach ist die der vorigen correlative Figur, d. h. das System von n Ebenen, von denen keine vier durch denselben Punkt gehen, in Verbindung mit allen ihren Schnittgeraden und Schnittpunkten.

Zwei auf einander bezogene vollständige ebene n-Ecke heissen *perspectiv*, wenn die Verbindungsgeraden der sich entsprechenden Ecken in demselben Punkt zusammenlaufen, sie heissen *homolog*, wenn sich die entsprechenden Seiten in Punkten derselben Geraden *(der Homologieaxe)* schneiden.

Zwei aufeinander bezogene vollständige ebene n-Seite nennt man *perspectiv*, wenn sich die entsprechenden Seiten in Punkten derselben Geraden treffen; sie heissen *homolog*, wenn die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken durch denselben Punkt (*das Homologiecentrum*) gehen.

Aehnliche Definitionen gelten für zwei n-Seite im Strahlenbündel und für zwei n-Kante.

Zwei aufeinander bezogene windschiefe vollständige n-Ecke heissen *perspectiv*, wenn die Geraden, welche die entsprechenden Ecken verbinden, durch denselben Punkt gehen, und heissen *homolog*, wenn die entsprechenden Seitenflächen sich in Geraden schneiden, die in derselben Ebene (der *Homologieebene*) liegen.

Zwei n-Ecke sind *projectiv*, wenn sich das eine aus dem anderen durch eine endliche Anzahl von Projectionen und Schnitten ableiten lässt.

Zwei perspective in verschiedenen Ebenen gelegene n-Ecke sind nothwendiger Weise auch homolog. Ein ähnlicher Satz gilt für zwei perspective n-Flache mit verschiedenen Centren.

Zwei Dreiecke, zwei Dreiseite, zwei Dreiflache oder zwei Dreikante sind, wenn sie perspectiv sind, auch homolog.

Zwei ebene Vierecke sind immer projectiv.

Zwei perspective vollständige windschiefe Vierecke sind auch homolog.

Wenn in zwei vollständigen n-Ecken

$$A_1 A_2 \cdots A_n, \quad A_1' A_2' \cdots A_n',$$

welche aufeinander bezogen werden und entweder in derselben oder in verschiedenen Ebenen liegen, eine Seite $A_1 A_2$ des ersten und alle übrigen $2n - 4$ Seiten, welche durch A_1 oder A_2 gehen, die entsprechenden Seiten des anderen n-Ecks in ebensovielen Punkten einer Geraden s schneiden, so sind die beiden n-Ecke homolog; bezeichnet man mit S das Homologiecentrum, so liegen zwei beliebige sich entsprechende Diagonalecken P, P' der beiden n-Ecke mit S in derselben Geraden.

Ein ähnlicher Satz gilt für zwei *vollständige ebene n-Seite*, zwei *vollständige n-flachige Winkel* und zwei *vollständige n-Kante*.

Die Definitionen in diesem Paragraphen rühren zum grossen Theil von Steiner her, *ges. Werke*, herausg. von Weierstrass, 2 Bde., Berlin 1882, 1, p. 288—396.

§ 2. Projective Eigenschaften der Gruppen von Punkten auf einer Geraden. Polarität. Harmonische Mittelpunkte.

Eine Gruppe von n Punkten auf einer Geraden kann analytisch durch die Wurzeln einer binären Form von der n^{ten} Ordnung dargestellt werden. Das Studium der Invarianten und Covarianten dieser Form führt zu der Ermittelung specieller invarianter oder, geometrisch ausgedrückt, projectiver Eigenschaften der Gruppe von Punkten.

Für die Werthe $n = 2, 3, 4, \cdots$ haben wir in Bd. 1, Kap. 12 die Resultate angegeben, die man vom Standpunkt der analytischen Theorie der Formen aus erhält. Wir wollen im nächsten Paragraphen die geometrischen Resultate mittheilen, die jenen analytischen entsprechen, und bitten den Leser, sich die damals gefundenen Ergebnisse, Begriffe und Benennungen gegenwärtig zu halten. Hier sollen zunächst die Polarität und die harmonischen Mittelpunkte besprochen werden.

Polarität. Wenn eine Form a_x^n gegeben ist, so können wir die Polaren $a_x^{n-1}a_y$, $a_x^{n-2}a_y^2, \cdots$ bilden und die Wurzelpunkte dieser gleich Null gesetzten Formen betrachten, wenn angenommen wird, y sei ein gegebener Punkt. Diese Gruppen von Punkten heissen bezüglich die 1te, 2te, $\cdots$ *Polargruppe von* y. Man nennt sie auch *harmonische Gruppen von* y oder *harmonische Mittelpunkte* vom $n-1^{\text{ten}}$, $n-2^{\text{ten}}, \cdots$ Grad. Jonquières, *Journ. de Liouville*, 1851. Die letzte Polargruppe wird durch einen einzigen Punkt gebildet, den Poncelet, *Crelle*, 3 *das Centrum der harmonischen Mittel* nannte.

Wenn der Pol ins Unendliche rückt, so wird das Centrum der harmonischen Mittel das *Centrum der mittleren Abstände*, welches die Eigenschaft besitzt, dass *die algebraische Summe seiner Abstände von den n Punkten Null ist.*

Wir wollen nun einige Grundeigenschaften der *harmonischen Mittelpunkte*, oder, wie man auch sagt, der *Polarsysteme* angeben.

Ist M ein harmonischer Mittelpunkt r^{ten} Grades eines gegebenen Systems von n Punkten in Bezug den Pol O, so ist umgekehrt O ein harmonischer Mittelpunkt $(n-r)^{\text{ten}}$ Grads desselben Systems in Bezug auf den Pol M.

Sind $M_1, M_2, \cdots, M_r$ die harmonischen Mittelpunkte r^{ten} Grades eines Systems von n Punkten bez. eines Pols O, so sind die harmonischen Mittelpunkte vom s^{ten} Grad $(s<r)$ des Systems $M_1, \cdots, M_r$ bez. des Pols O auch die harmonischen Mittelpunkte vom s^{ten} Grad des gegebenen Systems bez. desselben Pols O.

Wenn $M_1, \cdots, M_r$ die harmonischen Mittelpunkte r^{ten} Grades bez. eines Pols O_r und $N_1, \cdots, N_s$ diejenigen s^{ten} Grads bez. eines Pols O_s sind, so fallen die harmonischen Mittelpunkte vom $(r+s-n)^{\text{ten}}$ Grad des Systems $M_1, \cdots, M_r$ bez. des Pols O_s mit den harmonischen Centren $(r+s-n)^{\text{ten}}$ Grades des Systems $N_1, \cdots, N_s$ bez. des Pols O_r zusammen.

Ist A_1 der harmonische Mittelpunkt 1^{ten} Grades des Systems $A_2, A_3, \cdots, A_n$ bez. eines Pols O, so ist er auch der harmonische Mittelpunkt 1^{ten} Grades des Systems $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ bez. desselben Pols.

Fallen r Punkte des Systems $A_1, \cdots, A_n$ in einen einzigen zusammen, so fallen auch $r-p$ harmonische Mittelpunkte $(n-p)^{\text{ten}}$ Grades bez. eines beliebigen Pols mit diesem Punkt zusammen.

Die harmonischen Mittelpunkte r^{ten} Grades bez. eines zum Pol genommenen s-fachen Punkts des gegebenen Systems bestehen aus diesem s-mal gerechneten Punkt und den harmonischen Mittelpunkten $(r - s)^{\text{ten}}$ Grads der übrigen $n - s$ Punkte des gegebenen Systems bez. desselben Punkts.

Wenn in dem gegebenen System s Punkte in einen zusammenfallen, so sind die harmonischen Centren r^{ten} Grads $(r < s)$ bez. dieses Punkts als Pol unbestimmt.

Die Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte sind projectiv.

Wenn a_x^n symbolisch die binäre Form bezeichnet, welche, gleich Null gesetzt, die Gruppe von n Punkten liefert, so stellt $H = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$, worin a, b äquivalente symbolische Coefficienten sind, die sogenannte *Hesse'sche Form* der gegebenen Gruppe dar. Vergl. *Repert.* I, Kap. 12, § 5. Nun gilt der Satz:

Es gibt eine Form vom $(2n - 4)^{\text{ten}}$ Grad, die so beschaffen ist, dass die Gruppen harmonischer Mittelpunkte $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ihrer Nullpunkte (der Steiner'schen Gruppe) die Nullpunkte der Hesse'schen Form $H = 0$ zu Doppelpunkten haben. Diese Form vom Grad

$$2n - 4$$

erhält man durch Elimination von z aus

$$a_x a_z^{n-2} a_1 = 0$$

und

$$b_x b_z^{n-2} b_2 = 0 .$$

Es existiren $3n - 6$ Pole, deren Gruppen harmonischer Centren $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung bez. der gegebenen Form und $(2n - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung bez. der Hesse'schen Form einen Punkt gemeinschaftlich haben. — Die gemeinschaftlichen Punkte sind, wenn die bei der symbolischen Rechnung üblichen Bezeichnungen benutzt werden, durch

$$T = (ab)(bc)^2 a_x^{n-1} b_x^{n-2} c_x^{n-3}$$

gegeben.

Das identische Verschwinden der Hesse'schen Form ist die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die n Punkte der gegebenen Gruppe in einen einzigen zusammenfallen.

Man beachte ferner:

Wenn die Wurzeln der gegebenen Form sämmtlich verschieden von einander und reell sind, so müssen alle Wurzeln der Hesse'schen Form imaginär sein. Gerbaldi und Schoute, *Rend. Palermo,* 3, 1889.

§ 3. Lineare Systeme von Punktgruppen. Allgemeine Involutionen. Geometrie der binären Formen ersten bis vierten Grads.

Es mögen $k+1$ linear unabhängige*) binäre Formen vom Grade n, $(k \leqq n)$

$$a_x^n,\ b_x^n, \cdots$$

vorliegen und man habe mit $k+1$ homogenen Parametern die Form

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \lambda_3 c_x^n + \cdots$$

gebildet.

Diese Form n^{ten} Grades, gleich Null gesetzt, stellt, so oft die Werthe für die Constanten λ gegeben sind, eine Gruppe von n Punkten dar; es wird mithin durch die $k+1$ gegebenen Formen ein k-fach unendliches lineares System oder es werden, wie man gewöhnlich sagt, ∞^k Gruppen von n Punkten durch diese Formen bestimmt. Dieses System heisst eine *Involution vom n^{ten} Grad und der k^{ten} Stufe.* Die Gleichung

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \cdots = 0$$

wird die *Gleichung der Involution* genannt.

Für $n=2$, $k=1$ erhält man die gewöhnliche Involution, d. h. die unendlich vielen Punktepaare, die sich in diesem Fall ergeben, sind die Paare conjugirter Punkte der gewöhnlichen Involution, die durch die beiden Punktepaare bestimmt wird, welche von den zwei gegebenen quadratischen Formen dargestellt werden.

Eine Involution vom Grade n und der Stufe k wird durch $k+1$ Gruppen von n Punkten bestimmt, die keiner Involution geringerer Stufe angehören.

Wenn r Punkte einer Gruppe einer Involution in einen Punkt zusammenfallen, so sagt man, dieser Punkt sei für die Involution *r-fach.*

Jede Involution vom Grade n und der Stufe k besitzt eine endliche Anzahl von $(k+1)$fachen Punkten und zwar $(k+1)(n-k)$, Cremona, *Preliminari* etc., Bologna, Acc. Mem. 6, 7, 1866, 1867, deutsch von Curtze.

---

*) Man sagt, die gegebenen Formen seien *linear unabhängig*, wenn keine homogene lineare Relation identisch zwischen ihnen besteht, d. h. wenn sich keine constanten Parameter $r_1, r_2, \ldots$ derart bestimmen lassen, dass durch bez. Multiplication der gegebenen Formen mit ihnen die Summe der so gebildeten Producte identisch Null ist.

Eine Involution vom Grade n und der Stufe k enthält

$$\frac{2^k (n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!}$$

Gruppen, von denen jede mit k Doppelpunkten ausgestattet ist.

Besonderes Interesse bieten die Involutionen n^{ten} Grads und erster Stufe. *In ihnen gibt es* $2n-2$ *Doppelpunkte, welche durch die Funktionaldeterminante* (*Repert.* I, p. 280)

$$(ab)a_x^{n-1}b_x^{n-1}=0$$

bestimmt werden.

Die Gesammtheit der ersten Polaren einer Gruppe von n Punkten bildet eine Involution $(n-1)^{\text{ten}}$ *Grads und 1. Stufe.*

Die Involutionen kann man einander *projectiv* zuordnen, wenn man *bilineare* Relationen zwischen den Parametern der einen und denen einer anderen feststellt.

Bei zwei Involutionen 1. Stufe und von den Graden m und n, die superponirt und projectiv einander zugeordnet sind, kommt es $m+n$ *mal vor, dass ein Punkt der einen mit einem der ihm entsprechenden in der anderen zusammenfällt.* Dieses Theorem ist ein specieller Fall des sogenannten *Correspondenzprincips* von Chasles; vergl. Kap. 1, § 2.

Quadratische Formen. Ermittelt man zu einem gegebenen Punkt den Polpunkt bez. einer quadratischen Form (das harmonische Centrum 1. Grads), so liegen die beiden Elemente dieser Form, der gegebene und der Polpunkt in Harmonie.

Das Verschwinden der Invarianten $A_{f\varphi}$ *der beiden quadratischen Formen f und* φ *(vergl. Repert. I, p. 280) zeigt an, dass die Nullpunkte der ersten Form harmonisch zu den Nullpunkten der zweiten liegen.*

Die durch die Covariante $\vartheta=0$ *(die Funktionaldeterminante) dargestellten Punkte sind Doppelpunkte einer Involution; zwei Paare von conjugirten Punkten dieser Involution sind die Punkte von* $f=0$ *und* $\varphi=0$.

Oder anders ausgedrückt: *Es giebt zwei Punkte, von denen der eine bez. einer jeden zweier gegebener quadratischer Formen der Pol des anderen und daher harmonisch mit ihm conjugirt ist; solche Punkte sind die von* $\vartheta=0$.

Das Verschwinden der Invariante R dreier quadratischer Formen zeigt an, dass die drei Punktepaare derselben Involution angehören.

Jede quadratische Form lässt sich durch lineare Transformation auf die canonische Form $X_1^2 + X_2^2$ zurückführen, d. h. auf eine solche Form, welche nur die Quadrate der Coordinaten enthält. Dazu reicht es aus: 1) als neue Fundamentalpunkte der homogenen Coordinaten zwei Punkte zu wählen, die einander conjugirt harmonisch bez. der quadratischen Form sind, d. h. den beliebigen Punkt y und den Punkt x, der die Wurzel von $a_x a_y = 0$ ist, und überdies 2) den Einheitspunkt auf passende Art anzunehmen.

Wählt man als Fundamentalpunkte der homogenen Coordinaten die beiden Wurzelpunkte von $\vartheta = 0$, so reducirt sich jede der beiden quadratischen Formen auf die canonische Form. Diese Theoreme sind auch deshalb von Interesse, weil ähnliche Sätze in der Theorie der Kegelschnitte und der Flächen 2. Grads vorkommen. Vergl. darüber Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*, Leipzig 1871, §§ 33, 37. Sie sind auch specielle Fälle der Sätze, die wir *Repert.* I, p. 303, 304 bei der Apolarität erwähnt haben. Siehe auch *Repert.* I, Kap. 12, § 15.

Cubische Formen. Die Punkte einer cubischen Form $f = 0$ seien a, b, c. Es gilt der Satz:

Von den beiden Punkten, aus denen die Polargruppe 1. Ordnung eines Punkts a der cubischen Form besteht, fällt der eine mit a zusammen, während der andere harmonisch conjugirt zu a in Bezug auf das Paar b, c ist.

Man erhält so drei andere Punkte a', b', c', welche die Wurzelpunkte der Covariante $Q = 0$ sind.

Der Polpunkt eines jeden Elements von Q (Gruppe 2. Ordnung) in Bezug auf die cubische Form fällt mit einem Punkt dieser gegebenen cubischen Form f zusammen.

Die Punkte von f bilden in Verbindung mit denen von Q drei Punktepaare einer Involution, deren Doppelpunkte die Punkte der Hesse'schen Determinante $\Delta = 0$ sind.

Jeder der beiden Punkte von $\Delta = 0$ hat bez. der cubischen Form eine Polargruppe 1. Ordnung, welche aus zwei coincidirenden Elementen besteht, mit denen auch der Polpunkt 2. Ordnung des betreffenden Elements von $\Delta = 0$ bez. der cubischen Form zusammenfällt.

Wenn man in Bezug auf eine cubische Form und ihre Funktionaldeterminante die Paare von Polarelementen 1. Ordnung eines beliebigen Elements aufsucht, so sind diese Paare harmonisch *conjugiert zueinander und bilden bei der Variation des beliebigen Elements eine Involution, deren Doppelpunkte die Punkte von* $\Delta = 0$ *sind.*

Wenn die beiden Polarelemente 1. Ordnung eines Punkts in Bezug auf die cubische Form miteinander zusammenfallen, so bildet dieser Punkt in Verbindung mit den drei Elementen der cubischen Form ein äquianharmonisches Quadrupel (siehe Kap. 1, § 2); *daher bildet jeder Punkt der Hesse'schen Determinante mit den drei Punkten der cubischen Form ein äquianharmonisches Quadrupel.*

Nimmt man die Punkte von $\Delta = 0$ *zu Fundamentalpunkten homogener Coordinaten, so reducirt sich die cubische Form auf die canonische Form, d. h. eine solche, welche nur die Cuben der beiden Variabelen enthält; dasselbe gilt alsdann auch für* Q. Siehe *Repert.* I, Kap. 12, § 8.

Die drei Elemente von f *(wie auch die von* Q*) stehen zueinander in cyclischer Projectivität, deren Doppelelemente die Elemente von* $\Delta = 0$ *sind.*

In zwei zueinander apolaren Tripeln von Elementen abc, $\alpha\beta\gamma$ *sind zwei beliebige Punkte der ersten Gruppe, z. B.* a, b *mit der ersten Polargruppe von* c *in Bezug auf das Tripel* $(\alpha\beta\gamma)$ *harmonisch conjugirt.*

Zwei cubische Formen sind apolar zu einander, wenn die Invariante $J = (f, \varphi)^3$ *Null ist*).*

Nimmt man zu jedem Element einer cubischen Form das harmonisch conjugirte in Bezug auf die beiden anderen, so erhält man drei Punkte; die Bedingung, damit diese Punkte zu denen einer anderen cubischen Form apolar seien, besteht darin, dass die Invariante $A_{\Delta\Theta}$ *oder* $A_{\nabla\Theta}$ *dritten Grads in den Coefficienten der einen cubischen Form und 1. Grads in den Coefficienten der anderen Form verschwinde.*

$\Omega = 0$ *ist die Bedingung, damit die zwei Punktetripel, die man auf diese eben angegebene Art aus jeder der beiden cubischen Formen erhält, apolar seien.*

Das Verschwinden von $A_{\Delta\nabla}$ *zeigt an, dass das Paar von Punkten, von denen jeder ein äquianharmonisches Quadrupel mit den Elementen der ersten cubischen Form bildet, harmonisch zu dem analogen Paar in Bezug auf die zweite cubische Form liegt.*

---

*) Ueber die hier gebrauchten Bezeichnungen siehe *Repert.*, I, p. 284.

Biquadratische Formen). Verschwindet die Invariante j, so liegen die vier durch eine binäre biquadratische Form dargestellten Punkte harmonisch; ist dagegen i gleich Null, so liegen die vier Punkte äquianharmonisch; in dem letzteren Fall ist f apolar zu sich selbst.*

Die Hesse'sche Determinante einer biquadratischen Form stellt vier Elemente dar; von jedem dieser Elemente fällt die Polargruppe 3. Ordnung bez. der Form mit der aus coincidirenden Elementen bestehenden Polargruppe 2ter Ordnung zusammen. Jeder Punkt von H bildet mit den drei Punkten seiner eigenen ersten Polargruppe ein äquianharmonisches Quadrupel.

Die Form $T = 0$ stellt sechs Elemente dar; die 3te Polargruppe bez. f eines jeden dieser Elemente fällt mit einem der drei Punkte der ersten Polargruppe zusammen, und das betreffende Element bildet mit den drei Punkten ein harmonisches Quadrupel.

Die drei durch die Elementepaare der biquadratischen Form oder ihrer Hesse'schen Determinante bestimmten Involutionen haben die Elemente der Covariante T zu Doppelelementen und jedes dieser drei Paare von Doppelelementen stellt auch die Doppelelemente der durch die beiden anderen bestimmten Involution dar.

Ist $j = 0$, so lässt sich f auf eine canonische Form reduciren, die nur die vierten Potenzen zweier linearer Formen, nämlich der Formen eines der Paare von T, enthält. In diesem Fall bilden die Elemente von f eine cyclische Projectivität, deren Doppelelemente zwei der Elemente von T sind. Vergl. *Repert.* I, Kap. 12, § 8.

Diese Betrachtungen über die geometrische Darstellung der binären Formen finden sich ausser bei den deutschen Autoren und ins Besondere in dem classischen Werk von Clebsch, *Bin. Form.*, Leipzig 1871 auch in älteren Abhandlungen von Battaglini, *Acc. Napoli*, 1864 u. ff.

§ 4. Projective Eigenschaften der Dreiecke, Vierecke, Sechsecke etc.

Wenn in zwei vollständigen ebenen aufeinander bezogenen Vierecken fünf Seiten des ersten die entsprechenden Seiten des zweiten in fünf Punkten einer Geraden schneiden, so treffen sich auch die sechsten Seiten in einem Punkt derselben Geraden und

*) Wir geben hier die bereits in Bd. 1 des Repertoriums mitgetheilten Sätze nicht noch einmal an.

die Verbindungslinien der sich entsprechenden Ecken gehen durch einen einzigen Punkt; die Diagonaldreiecke ferner liegen homolog.

Daraus folgt: *Wenn ein vollständiges Viereck derart deformirt wird, dass fünf seiner Seiten durch feste Punkte einer Geraden gehen, so rotirt auch die sechste um einen festen Punkt derselben Geraden, und dieser bildet mit den fünf ersten eine Involution von sechs Punkten.*

Die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von einer beliebigen Transversalen in drei Paaren involutorisch conjugirter Punkte geschnitten.

Daher: *Wenn eine Transversale die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in A und A', B und B', C und C' trifft, so besteht zwischen den Strecken der Transversalen die Relation:*

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A = 0.$$

Selbstverständlich lassen sich für das Vierseit den vorstehenden correlative Sätze aufstellen.

Die drei Kreise, welche zu Durchmessern die drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits haben, gehen durch dieselben Punkte.

Die drei Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden.

In einem vollständigen Viereck werden zwei sich in einer Diagonalecke schneidende Seiten harmonisch durch die beiden anderen getrennt.

In einem vollständigen Vierseit wird jede Diagonale harmonisch durch die beiden anderen getheilt.

Bezeichnet man mit L, L'; M, M'; N, N' die Punkte, welche in Verbindung mit einer Transversalen s die Seiten AB, CD, AC, BD, AD, BC eines vollständigen Vierecks harmonisch theilen, so gehen die Geraden LL', MM', NN' durch einen Punkt, der in Verbindung mit s die Geraden LL', MM', NN' harmonisch theilt.

Wenn eine Transversale die Seiten eines Dreiecks RSQ in drei Punkten A', B', C' schneidet, die bez. paarweise mit drei anderen Punkten A, B, C derselben Transversalen in Involution liegen, so treffen sich die Geraden RA, SB, QC in einem Punkt, dem *harmonischen Pol* der Transversalen in Bezug auf das Dreieck.

Wenn man von einem Punkt S aus die Ecken eines Dreiseits rsq durch drei Strahlen a', b', c' projicirt, welche paarweise mit drei anderen von S ausgehenden Strahlen a, b, c in Involution *sind, so liegen die Punkte ra, sb, qc in einer Geraden,* der *harmonischen Polaren* von S in Bezug auf das Dreiseit.

Wenn die Seiten eines Dreiecks von einer beliebigen Transversalen geschnitten werden, und wenn die Ecken von einem beliebigen Punkt aus auf die gegenüberliegenden Seiten projicirt werden, so ist das Product der anharmonischen Verhältnisse der Gruppen von vier Punkten, welche man auf den drei Seiten erhält, die negative Einheit.

Wenn drei von einem Punkt aus gezogene Gerade durch die Ecken eines Dreiecks ABC gehen und die gegenüberliegenden Seiten in A', B', C' treffen, so besteht zwischen den Segmenten der Seiten die Relation

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + AC' \cdot CB' \cdot BA' = 0$$

oder

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = -1 \text{ (das Ceva'sche Theorem, 1678);}$$

und umgekehrt: wenn für drei Punkte A', B', C' auf den Seiten eines Dreiecks die vorstehende Relation besteht, so laufen die Verbindungslinien AA', BB', CC' in einen Punkt zusammen.

Schneidet eine Transversale die Seiten eines Dreiecks ABC in drei Punkten A', B', C', so gilt für die Segmente der Seiten die Beziehung:

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' - AC' \cdot CB' \cdot BA' = 0$$

oder

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = 1 \text{ (Satz von Menelaus)}$$

und umgekehrt.

Wenn man die Seiten eines Dreiecks ABC in den Punkten $A', B', C', A'', B'', C''$ derart harmonisch theilt, dass

$$\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} = \frac{AB''}{B''C} \cdot \frac{BC''}{C''A} \cdot \frac{CA''}{A''B} = 1 \quad \textit{ist,}$$

so gehen die Kreise mit den Durchmessern AA'; BB'; CC' durch dieselben beiden Punkte P, P', für welche

$$AP : BP : CP = AP' : BP' : CP' \quad \textit{ist,}$$

und die Sehne PP' wird harmonisch und senkrecht von dem Kreis geschnitten, der durch die drei Punkte A, B, C bestimmt wird.

Liegen die Eckpunkte ungerader Ordnung eines einfachen ebenen Sechsecks in einer Geraden und diejenigen gerader Ordnung in einer anderen, so schneiden sich die drei Paare von Gegenseiten in Punkten, die ebenfalls in einer Geraden liegen.

Wenn sich in einem einfachen ebenen Sechsseit die Seiten ungerader Ordnung in einem Punkt treffen und die gerader Ordnung in einem anderen, so gehen auch die Verbindungslinien der drei Paare von Gegenecken durch einen und denselben Punkt.

Diese beiden Sätze sind specielle Fälle der sogenannten Pascal'schen und Brianchon'schen Theoreme über die Kegelschnitte (vergl. weiter unten Kap. 3, § 2) und lassen sich aus dem allgemeinen Fall ableiten, wenn man annimmt, der zu Grunde liegende Kegelschnitt zerfalle in zwei Gerade oder in zwei Punkte.

§ 5. Die metrische Geometrie des ebenen Dreiecks. Formeln der ebenen Trigonometrie.

Bezeichnet man mit a, b, c die drei Seiten und mit A, B, C die gegenüberliegenden Winkel eines geradlinigen Dreiecks, *so bestehen die Relationen:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

und die beiden anderen, die man aus der letzteren durch Vertauschen der Buchstaben a, b, c, A, B, C erhält.

Wenn man ferner mit s die halbe Summe der Seiten bezeichnet, so gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} a &= \frac{b}{\cos C + \sin C \operatorname{cotg} A}, \\ &= b \cos C + b \sin C \operatorname{cotg} B, \\ &= b \cos C \pm \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 C}, \\ &= b \cos C + c \cos B, \\ &= \frac{2s \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}, \\ &= \frac{s \sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ &= \frac{\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2bc}, \end{aligned}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C},$$

$$(a-b)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(A+B) = (a+b)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$
(die Napiersche Analogie),

$$(s-a)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}A = (s-b)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}B = (s-c)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}C,$$
$$s = (s-a)\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}C,$$
$$c\sin(A-B) = a\sin A - b\sin B,$$
$$\left.\begin{aligned} a\cos\tfrac{1}{2}(B-C) &= (b+c)\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\\ a\sin\tfrac{1}{2}(B-C) &= (b-c)\sin\tfrac{1}{2}(B+C)\end{aligned}\right\}\ \text{(das Doppeltheorem von Gauss)},$$
$$a^2\sin(B-C) = (b^2-c^2)\sin(B+C),$$
$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C,$$
$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C,$$
$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C + 1,$$
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A\cos B\cos C - 1,$$
$$\mathrm{tg}\,A + \mathrm{tg}\,B + \mathrm{tg}\,C = \mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C,$$
$$\mathrm{cotg}\,A + \mathrm{cotg}\,B + \mathrm{cotg}\,C = \mathrm{cotg}\,A\,\mathrm{cotg}\,B\,\mathrm{cotg}\,C + \mathrm{cosec}\,A\,\mathrm{cosec}\,B\,\mathrm{cosec}\,C,$$
$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C,$$
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks lässt sich durch die folgenden Formeln ausdrücken:

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{2}\,\frac{c^2\sin A\sin B}{\sin C},\\ &= \tfrac{1}{2}\,ab\sin C,\\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\end{aligned}$$

§ 6. Die metrische Geometrie des Dreiflachs und des sphärischen Dreiecks. Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Wir wollen drei Ebenen betrachten, die *nicht* durch dieselbe Gerade gehen, also einem Bündel und nicht einem Büschel angehören. Nimmt man an, die drei Ebenen seien durch die Geraden begrenzt, in welchen sie sich zu je zweien schneiden, und durch den gemeinschaftlichen Schnittpunkt, so erhält man ein *Dreiflach* (*Trieder*), *körperliches Dreieck, dreiseitige Ecke*; denkt man sich dieses Dreiflach mit einer Kugel vom Radius 1 geschnitten, deren Mittelpunkt mit dem Centrum des Bündels zusammenfällt, so ergibt sich auf der Kugel ein *sphärisches Dreieck*, dessen Seiten Bogen von grössten Kreisen sind und durch die Winkel am Centrum der Kugel, d. h. durch die in den

Seitenflächen des Dreiflachs liegenden Winkel gemessen werden. Die Winkel des sphärischen Dreiecks ferner sind die Winkel, welche die in den Ecken des Dreiecks an die Seiten gezogenen Tangenten mit einander machen; sie sind also die Winkel zwischen den Seitenflächen des Dreiflachs, d. h. die Winkel der in dem Dreiflach enthaltenen Zweiflache. Die metrische Geometrie des Dreiflachs, die sogenannte *Triedrometrie*, fällt auf diese Art mit der des sphärischen Dreiecks, der *sphärischen Trigonometrie* zusammen.

Man unterscheidet rechtwinklige, doppelt und dreifach rechtwinklige sphärische Dreiecke. Die letzteren werden durch drei Bogen grösster Kreise gebildet, die zu je zweien senkrecht aufeinander stehen; *alle Seiten und alle Winkel betragen neunzig Grade.*

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist jede der drei Seiten kleiner als 90 Grade oder nur eine der Seiten ist kleiner als 90 Grade.

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck sind ein nicht rechter Winkel und seine gegenüberliegende Seite beide grösser oder beide kleiner als 90 Grade.

Auch wenn in einem sphärischen Dreieck jede Seite und jeder Winkel kleiner als 180⁰ ist, so beträgt doch die Summe der Winkel immer mehr als 180⁰. Die Differenz zwischen dieser Summe und 180⁰ heisst der sphärische Excess.

Das sphärische Dreieck ist in diesem Fall einem anderen doppelt-rechtwinkligen sphärischen Dreieck flächengleich, dessen dritter Winkel der sphärische Excess des gegebenen Dreiecks ist. Dieses Theorem wurde im Jahr 1629 unvollständig von Girard, 1632 dann auf einfache Art von Cavalieri bewiesen.

Nimmt man als *Einheit* zum Messen der Flächeninhalte sphärischer Dreiecke das doppelt-rechtwinklige Dreieck, dessen dritter Winkel die *Winkeleinheit* ist, so ergibt sich der Satz, *dass der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks seinem sphärischen Excess gleich ist.*

Ist ein grösster Kreis auf der Kugel gegeben, so werden die beiden Endpunkte des auf ihm senkrechten Durchmessers *die Pole des grössten Kreises* genannt. Denkt man sich den grössten Kreis in einem gewissen Sinn (welcher der *positive* heissen mag) von Jemand durchwandert, der die Füsse auf die Kugel setzt, so heisst im engeren Sinn *Pol* des Kreises derjenige von den beiden, der zur Linken des Wanderers bleibt; wenn daher der Pol eines Kreises gegeben ist, so ist die positive Richtung des

Wegs auf ihm bestimmt. Die Seite der Ebene des grössten Kreises, welche dem Pol zugekehrt ist, heisst die *positive*.

Lässt man einen grössten Kreis um einen seiner Durchmesser rotiren und dabei einen gewissen Winkel beschreiben, so verschiebt sich der Pol um denselben Winkel.

Es sei ein sphärisches Dreieck ABC gegeben; wir wollen die Pole bez. der Seiten BC, CA, AB suchen und annehmen, der positive Sinn gehe auf diesen Seiten in den Richtungen BC, CA, AB.

Diese drei Pole, welche wir mit A', B', C' bezeichnen, bilden ein zweites sphärisches Dreieck, welches das *zum gegebenen polare oder reciproke* genannt wird.

Das Dreieck A', B', C' hat seinerseits zum polaren das Dreieck ABC.

Die Winkel eines Dreiecks sind die Supplemente der Seiten des Polardreiecks.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks und der Umfang des Polardreiecks ergeben zusammen die Summe von 360^0.

Wir wollen annehmen, der Umfang eines sphärischen Dreiecks werde in einem gewissen Sinn z. B. in der Richtung ABC durchlaufen, und dies sei der positive Sinn auf jedem der grössten Kreise AB, BC, CA; die *in diesem Sinn durchlaufenen* Seiten mögen die Werthe c, a bez. b haben.

Unter dem Winkel BAC verstehen wir den Winkel zwischen den beiden Richtungen AB, AC, von denen daher die eine positiv, die andere negativ ist; dasselbe gilt für die Winkel ACB, CBA. Man bezeichnet diese Winkel mit A, C, B.

Versteht man unter dem *Winkel zweier Ebenen des* dem sphärischen Dreieck entsprechenden *Dreiflachs* den zwischen den beiden Seiten, einer positiven und einer negativen, der zwei Ebenen enthaltenen Winkel, so gilt der Satz:

Die Winkel des spärischen Dreiecks sind die Supplemente der Winkel, welche die drei Ebenen des dem gegebenen Dreieck entsprechenden Dreiflachs mit einander bilden.

Nennt man *dagegen* den zwischen den beiden *positiven Seiten* enthaltenen Winkel den *Winkel der beiden Ebenen des Dreiflachs,* so sind die Winkel zwischen den drei Seitenflächen des Dreiflachs bezüglich den mit A, B, C bezeichneten gleich, welche *nicht* die von den *positiven* Richtungen der grössten Kreise gebildeten Winkel sind.

Unter der Annahme, es sei $A = 90^0$, lauten die wichtigsten Formeln für die *rechtwinkligen* sphärischen Dreiecke:

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

$$\begin{cases} \cos b = \sin a \sin B, \\ \cos c = \sin a \sin C, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C = \sin c \operatorname{tg} B, \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B = \sin b \operatorname{tg} C, \end{cases}$$

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C,$$

$$\begin{cases} \cos B = \cos b \sin C, \\ \cos C = \cos c \sin B. \end{cases}$$

Die Fundamentalformeln für *beliebige* sphärische Dreiecke sind:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

und diejenigen, welche man aus den vorstehenden durch Vertauschen der Buchstaben erhält.

Die erste dieser Formeln findet man schon in den Werken der alten Geometer, Menelaus, *Spherica*, 3, herausg. von Halley, Oxonia (Oxford), 1707; die übrigen heissen *die Euler'schen Formeln, Mém. de Berlin,* 1753. Aus ihnen lassen sich alle Formeln der sphärischen Trigonometrie ableiten; es geschah dies zum ersten Mal von Lagrange, *Journ. de l'Éc. polyt.*, 1799 und von Gauss; siehe dessen *Zusätze* am Ende der 1810 in Altona erschienenen Schumacher'schen Uebersetung der „*Géométrie de position* von Carnot, Paris 1803".

Setzt man $a + b + c = 2s$, $A + B + C = 2S$, so erhält man weiter:

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A,$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}{\sin b \sin c},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(S-B) \cos(S-C)}{\sin B \sin C}},$$

aus welchen sich durch Division leicht die Formeln für $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A$, $\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} a$ ergeben, die sich besonders zur numerischen Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten oder einer Seite aus den drei Winkeln eignen.

Wenn alle Winkel und Seiten des sphärischen Dreiecks kleiner als 180^0 sind, so gelten die sogenannten Gauss'schen oder Delambre'schen Formeln:

$$\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2}(A - B) \sin \tfrac{1}{2} c &= \sin \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2} C, \\
\cos \tfrac{1}{2}(A - B) \sin \tfrac{1}{2} c &= \sin \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C, \\
\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2} c &= \cos \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2} C, \\
\cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2} c &= \cos \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C.
\end{aligned}$$

Sie wurden fast gleichzeitig von Delambre, *Connaiss. des temps*, 1808 und von Mollweide, *v. Zach, Monatl. Corresp.*, 1808, Bd. 18 veröffentlicht und finden sich auch in der *Theoria motus*, 1809 von Gauss, durch den sie allgemein bekannt wurden.

Dividirt man diese Formeln unter sich, so erhält man die Werthe für

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A + B), \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B), \\
&\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b), \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b);
\end{aligned}$$

sie heissen *die Napier'schen Analogien*, weil dieser Autor sie zuerst im Jahr 1614 bekannt gemacht hat.

Andere von Gauss benutzte Formeln sind:

$$\begin{aligned}
(\sin A - \sin B) \sin c &= (\sin a - \sin b) \sin C, \\
(\sin A + \sin B) \sin c &= (\sin a + \sin b) \sin C, \\
(\cos A + \cos B) \sin c &= \sin (a + b)\, (1 - \cos C), \\
\sin (A + B)\, (1 + \cos c) &= (\cos a + \cos b) \sin C.
\end{aligned}$$

Wir wollen von jedem Eckpunkt des sphärischen Dreiecks einen grössten Kreis senkrecht auf die gegenüberliegende Seite ziehen; er zerlegt den Winkel und die gegenüberliegende Seite in je zwei Theile M, N; m, n, so dass $M + N = A$, $m + n = a$ ist, wenn der Kreis von der Ecke A senkrecht zur Seite a gezogen wird. Es bestehen dann die Relationen:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(M+N)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(M-N)=\frac{\sin(b-c)}{\sin(b+c)},$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(m+n)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(m-n)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b-c),$$
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(M-N)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(M+N)}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C),$$
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(m-n)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(m+n)}=\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)},$$
$$\frac{\operatorname{tg}M}{\operatorname{tg}N}=\frac{\operatorname{tg}m}{\operatorname{tg}n},$$
$$\frac{\sin(M+N)}{\sin(M-N)}=\frac{\sin(m+n)}{\sin(m-n)}.$$

Die oben, S. 64, mit S bezeichnete Grösse steht, wie wir schon gesagt haben (S. 62), in Beziehung zum Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks; für sie gelten die folgenden wichtigen Formeln:

$$\begin{aligned}\sin S&=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}\\&=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\&=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\\\operatorname{tg}S&=-\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b+\cos C}{\sin C},\\\operatorname{cotg}S&=-\frac{\sin a\sin b\sin C}{1+\cos a+\cos b+\cos c},\end{aligned}$$
$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(S-90^0)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(s-c).$$

Analog sind selbstverständlich die Formeln, aus welchen sich der Umfang $2s$ des sphärischen Dreiecks berechnen lässt; man braucht nur statt des gegebenen Dreiecks sein Polardreieck zu substituiren und auf dieses die vorstehenden Formeln anzuwenden.

Wenn in einem sphärischen Dreieck ein Winkel und das Product der Tangenten der Hälften der diesen Winkel einschliessenden Seiten constant bleibt, so ändert sich der Flächeninhalt des Dreiecks nicht.

Bleibt in einem sphärischen Dreieck eine Seite und das Product der Tangenten der halben, dieser Seite anliegenden Winkel constant, so bleibt der Umfang des Dreiecks derselbe.

Wenn die Seiten des sphärischen Dreiecks im Verhältniss zum Radius der Kugel klein sind, so übertreffen die Winkel des spärischen Dreiecks die entsprechenden Winkel des ebenen Drei-

ecks, dessen Seiten der Reihe nach denen des sphärischen Dreiecks gleich sind, annähernd um den dritten Theil des sphärischen Excesses. Das Legendre'sche Theorem, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 1787.

Das Studium der sphärischen Trigonometrie, welche ihre Anwendung hauptsächlich in der Astronomie findet, geht bis auf die alten Griechen zurück. Von den neueren Untersuchungen sind die von Euler, *Mém. de Berlin*, 1753 und *Nova Acta Petrop.* 1799 wichtig. Diese beiden Abhandlungen von Euler, dem eigentlichen Schöpfer der modernen Trigonometrie, sind auch in Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften, mit Anmerkungen versehen, von Hammer herausgegeben worden. Es folgen Legendre, *Mém. de l'Ac. de Par.,* 1787; Lexell, *Nova Acta Petrop.*, 1782; Lagrange, *Journ. de l'Ec. polyt.*, Hft. 6 und Gauss. Ferner sind zu nennen die Arbeiten von Möbius, *Analyt. Sphärik*, Abh. bei Begr. der Sächs. Ges. der Wissensch., 1846 u. Gudermann, *Lehrbuch der nied. Sphärik*, Münster 1836.

Von neueren Werken citiren wir ausser dem bekannten Buch von Serret, *Éléments de Trigonométrie,* 7. Ausg., Paris 1887 die vortreffliche gedrängte Darstellung in Baltzer's *Elementen der Mathematik,* 2 Bde., 7. Aufl., Leipzig 1885, die von Cremona ins Italienische übersetzt wurden, Genua 1881 und bereits die 3. Aufl. erlebten; Study, *Abh. der Leipz. Ges. der Wiss.,* 1893 und Hammer, *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie,* 2. Aufl., Stuttgart 1897.

§ 7. Moderne Geometrie des Dreiecks. Lemoine'sche und Brocard'sche Punkte und Kreise. Euler'sche Gerade. Der Neunpunkte- oder Feuerbach'sche Kreis. Kreise Taylor's, Tucker's. Simpson'sche Gerade.

Es wird dem Leser willkommen sein, in diesem Paragraphen die Hauptresultate der sogenannten *Dreiecksgeometrie* zusammengestellt zu finden.

Ist ein Dreieck ABC gegeben, so heisst eine Gerade, welche dieselbe Neigung gegen die Seiten AB, AC hat, wie BC gegen die Seiten AC, AB, eine zu BC *antiparallele (gegenparallele)* Gerade.

Die Mittelpunkte aller zu einer Seite eines Dreiecks Gegenparallelen liegen in einer Geraden, welche durch die gegenüberliegende Ecke geht; diese Gerade wird nach dem Vorschlag von Maurice d'Ocagne von den Franzosen *Symmediane* genannt;

in Deutschland ist auch die Bezeichnung *Gegenmittellinie* gebräuchlich.

Die drei Gegenmittellinien gehen durch einen Punkt, der von den Franzosen nach Lemoine, welcher mehrere wichtige Eigenschaften desselben fand, als *Lemoine'scher Punkt* bezeichnet wird; jedoch war derselbe schon früher von Grebe, *das geradlinige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkt seiner Ebene auf seine Seiten fällen kann, Grunert's Archiv,* 9, 1847 untersucht worden; daher nennt man ihn in Deutschland auch den *Grebe'schen Punkt.*

Die Abstände des Lemoine'schen Punkts von den drei Seiten sind den Seiten selbst proportional und die Summe der Quadrate dieser Abstände ist ein Minimum.

Zieht man von dem Lemoine'schen Punkt aus Parallelen zu den drei Seiten des Dreiecks, so bilden die sechs Punkte, in denen diese die Seiten treffen, *das Lemoine'sche Hexagon*; *diese sechs Punkte liegen auf einem Kreis (dem ersten Kreis Lemoine's oder wegen der hier folgenden Eigenschaft dem Kreis des dreifachen Verhältnisses).*

Nennt man nämlich die auf einer jeden der drei Seiten des Dreiecks liegenden Ecken des Lemoine'schen Hexagons bez. D, D'; E, E'; F, F', *so verhalten sich die Strecken* DD', EE', FF' *wie die Cuben der Seiten, auf denen sie liegen.*

Das Centrum des ersten Lemoine'schen Kreises ist der Mittelpunkt der Strecke, welche den Lemoine'schen Punkt mit dem Centrum des dem Dreieck umschriebenen Kreises verbindet.

Wenn durch den Lemoine'schen Punkt die Antiparallelen zu den Seiten des Dreiecks gezogen werden, so liegen die sechs Punkte, in denen sie die Seiten schneiden, zu denen sie nicht antiparallel sind, auf einem Kreis, welcher *der zweite Lemoine'sche Kreis oder der Cosinus-Kreis* genannt wird.

Die auf den Seiten des Dreiecks durch diesen Kreis abgeschnittenen Strecken sind den Cosinus der Winkel des Dreiecks proportional.

Ist ein Dreieck ABC gegeben, so existirt ein Punkt O der Ebene, für den die Winkel OAB, OBC, OCA gleich sind, und ein Punkt O', für den die Winkel $O'CB, O'BA, O'AC$ gleich sind. Der erste heisst *der positive Punkt Brocard's,* der zweite *der negative Punkt Brocard's.* Selbstverständlich haben diese Unterschiede nur dann einen bestimmten Werth, wenn man die gegenseitige Lage der Ecken des Fundamentaldreiecks festsetzt; wir nehmen daher an, der Weg AB, BC, CA habe die zu der Richtung, in welcher sich der Uhrzeiger bewegt, *entgegengesetzte* Richtung.

Der Winkel OAB ist dem Winkel $O'BA$ gleich und dasselbe gilt für die anderen; der gemeinschaftliche Werth dieser Winkel heisst ***der Brocard'sche Winkel;*** *er kann nicht grösser als der dritte Theil eines Rechten sein.*

Er ist durch die Formel

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C$$

gegeben, wenn ω den Brocard'schen Winkel und A, B, C die Dreieckswinkel bedeuten.

Der dem ersten Lemoine'schen Kreis concentrische Kreis, der durch den Lemoine'schen Punkt und mithin durch das Centrum des dem Dreieck umschriebenen Kreises geht, heisst ***der Brocard'sche Kreis.***

Fällt man von dem Centrum des dem Dreieck umschriebenen Kreises Lothe auf die Seiten und nennt die Punkte, in welchen diese den Brocard'schen Kreis treffen, bez. A', B', C', *so schneiden sich die Geraden BA', CB', AC' in dem positiven Brocard'schen Punkt und die Geraden AB', BC', CA' in dem negativen Brocard'schen Punkt.*

Der Brocard'sche Kreis geht durch die beiden Brocard'schen Punkte.

Nennt man L_1, L_2 die Radien der beiden Lemoine'schen Kreise, B den Radius des Brocard'schen und R den Radius des dem Dreieck umschriebenen Kreises, so bestehen die Relationen

$$R^2 = 3L_1^2 + B^2, \quad L_1^2 = L_2^2 + B^2.$$

Der Brocard'sche Kreis heisst auch *Fünfpunktekreis* oder *Siebenpunktekreis.*

Wenn von einem Punkt aus Parallele zu den Seiten eines Dreiecks gezogen werden, so liegen die sechs Punkte, in denen sie die Seiten treffen, auf einem Kegelschnitt (dem Sechspunktekegelschnitt); dieser wird ein Kreis (1ter Lemoine'scher Kreis), wenn der Punkt, von dem aus die Parallelen gezogen werden, der Lemoine'sche Punkt ist.

Der Lemoine'sche Punkt und der Schwerpunkt des Dreiecks lassen sich durch die in Kap. 17 für die *Desarguesische Transformation* angegebene Construction auseinander ableiten, d. h. von diesen beiden Punkten ist *jeder der Desarguesische transformirte des anderen.*

Die beiden Brocard'schen Punkte stehen in analoger Beziehung zu einander.

In jedem Dreieck liegen der gemeinschaftliche Schnittpunkt H der drei Höhen, der auch das *Orthocentrum* genannt wird, *der Schnittpunkt S der drei Medianen oder Mittellinien,* der auch *Barycentrum* heisst und der Schwerpunkt des Dreiecks ist, *und der Schnittpunkt M der in den Mittelpunkten der Seiten errichteten drei Lothe (das Centrum des umschriebenen Kreises) in einer und derselben Geraden,* der sogenannten *Euler'schen Geraden. Novi Comm. Petrop.,* 11, 1765, p. 114.

Die Strecke HM wird durch den in ihrem Inneren gelegenen Punkt S in dem Verhältniss $HS : SM = 2 : 1$ *getheilt.*

Der Neunpunktekreis, der irriger Weise (siehe den unten citirten Mackay) von einigen Autoren auch *der Euler'sche Kreis* genannt wird, ist der durch die drei Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks gehende Kreis. *Er geht auch durch die Fusspunkte der drei Höhen und durch die drei Mittelpunkte der von den Ecken nach dem Orthocentrum (dem Schnittpunkt der drei Höhen) gezogenen Strecken.*

Das Centrum N des Neunpunktekreises hat eine solche Lage auf der Euler'schen Geraden, dass die Strecke MN innerhalb durch S und ausserhalb durch H in dem Verhältniss $2 : 1$ *getheilt wird.*

Der Radius des Neunpunktekreises ist die Hälfte des Halbmessers des umschriebenen Kreises.

Der Neunpunktekreis berührt in vier Punkten die vier dem Dreieck von innen und von aussen eingeschriebenen Kreise.

Dieses Theorem ist von Feuerbach, *Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks,* Nürnberg 1822; der Neunpunktekreis ist deshalb von einigen Autoren auch *der Feuerbach'sche Kreis* genannt worden.

Der Neunpunktekreis berührt auch jeden der zwölf von innen und von aussen eingeschriebenen Kreise der vier Dreiecke, deren Ecken in dem Orthocentrum und je zweien der drei Eckpunkte des Dreiecks liegen. Theorem von W. Hamilton, *Nouv. Ann.,* 1862, p. 183.

Auf dem Neunpunktekreis gibt es noch andere bemerkenswerthe Punkte: *zwei Schröter'sche Punkte,* Nouv. Ann., 1865, p. 178, *einen Vigarié'schen Punkt, Mathesis,* 1888, *einen Lemoine'-*

schen Punkt, Journ. de math. élém. de Longchamps, 1889, p. 93; 1890, p. 118, *zwei Boubals'sche Punkte,* ib., 1891, p. 215.

Der Neunpunktekreis ist ein specieller Fall des *Neunpunktekegelschnitts,* d. h. des Kegelschnitts, der durch die sechs Mittelpunkte der Seiten eines vollständigen Vierecks und die drei Diagonalecken geht.

Wenn eine der Ecken des Vierecks das Orthocentrum für die übrigen drei ist, so wird aus diesem Kegelschnitt ein Kreis, und wenn die vier Ecken auf der Peripherie eines Kreises liegen, so wird der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel.

Der Neunpunktekegelschnitt ist der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels, welches zu Basispunkten die vier Ecken des Vierecks hat.

Als Literatur über den Neunpunktekreis und -Kegelschnitt führen wir an: Brianchon und Poncelet, *Ann. de Gerg.*, 11, 1820, p. 215; Steiner, ib., 19, 1828, p. 86; *Die geometr. Construct. mittelst der geraden Linien und eines festen Kreises.* Berlin 1833, p. 55; *Giornale arcadico di Roma,* 1844; Hamilton, Hart, Salmon, Casey, *Quart. Journ.*, 4, 1860; Kücher, *Grunert's Arch.*, 47; Schröter, *Crelle,* 68; *Math. Ann.*, 7; Lappe, *Crelle,* 71; Baur, *Schlömilch's Zeitschr.*, 12; Schubert, ib., 16; Battaglini, *Rend. Acc. Napoli,* 1862; Trudi, *Giorn. di mat.*, 1; Beltrami, *Giorn. di mat.*, 1; *Memorie Acc. Bologna,* (2), 2, 1863; (3), 5, 7, 1875, 1877. Ueber die Geschichte des Neunpunktekreises siehe Mackay, *Proc. of the R. Soc. of Edinburgh,* 11, 1892, 1893.

Der *Taylor'sche Kreis* wird durch die Eigenschaft charakterisirt, dass er durch die sechs Punkte geht, welche die rechtwinkligen Projectionen der Fusspunkte der Höhen auf die Seiten des Grunddreiecks sind. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 20, 1889.

Betrachtet man ein beliebiges zu dem Grunddreieck homothetisches (ähnliches und ähnlich liegendes) Dreieck und nimmt den Lemoine'schen Punkt zum Homothetiecentrum, *so schneiden sich die Seiten der beiden Dreiecke in sechs auf demselben Kreis liegenden Punkten;* solche Kreise heissen Tucker'sche.

Der umschriebene Kreis, die beiden Lemoine'schen Kreise und der Taylor'sche Kreis sind specielle Fälle der Tucker'schen; der Ort der Mittelpunkte aller Tucker'schen Kreise ist eine Gerade (der Durchmesser des Brocard'schen Kreises).

Die Enveloppe der Tucker'schen Kreise ist eine sogenannte *Brocard'sche Ellipse,* die zu Brennpunkten die beiden Brocard'-

schen Punkte hat, dem Dreieck eingeschrieben ist und die Seiten in den Fusspunkten der Symmedianen berührt. Brocard, *Ann. de Toulouse,* 1887; *Journ. des math. spéciales,* 1889; Catalan, *Mém. de Belgique,* 49, 1891.

Ein anderer elementarer aber interessanter Satz aus der Dreiecksgeometrie ist der folgende:

Wenn von einem Punkt der einem Dreieck umschriebenen Kreisperipherie Lothe auf die drei Seiten gefällt werden, so liegen die Fusspunkte dieser Lothe in einer Geraden (der Simpson'schen oder Wallace'schen Geraden, der Fusspunktgeraden des Dreiecks).

Die Enveloppe der Simpson'schen Geraden ist eine dreispitzige Hypocycloide (Steiner); vergl. Kap. 17, § 12.

Das Pedalentheorem theilte Servois, *Ann. de Gerg.,* 4, 1813, 1814, p. 251 mit und schrieb es Simpson zu; Gergonne, ib. gab einen analytischen Beweis des Satzes und wollte ihn auf das Tetraeder ausdehnen, machte dabei jedoch Fehler, die Durrande erkannte, ib., 7. Steiner, ib., 19 vervollständigte das Theorem durch den eben erwähnten Satz über die Enveloppe. Mit einer Erweiterung beschäftigte sich Beltrami, *Mem. Acc. Bologna,* (3), 5, 7, 1875, 1877.

Siehe auch: Brocard, *Bull. Soc. math.,* 1872, 1877 und Mackay, *Soc. math. Edinb.,* 9, 1890; *Assoc. Franç.,* 1893. Weitere literarische Angaben findet man in dem *Interm. des math.,* 3, p. 160; 4, p. 7.

Das Studium der sogenannten *Dreiecksgeometrie* begann erst in neuerer Zeit.

Wir sehen von anderen vereinzelten Arbeiten ab, die älter sind oder bereits oben citirt wurden und erwähnen von den ersten wichtigen Untersuchungen in Bezug auf die Dreiecksgeometrie: Lemoine, *Nouv. Ann.,* 1873; *Ass. Franç.,* 1873, 1874; Brocard, *Nouv. Corr. math. de Catalan,* 3, 1877, 1879, 1880; Neuberg, ib., 1879, 1880; *Ass. Franç.,* 1888; *Mém. de Belgique,* 1890; Schoute, *Acad. d'Amsterdam,* 1886; Cesàro, *Nouv. Ann.,* 1887; *Mathesis,* 1890; etc. Siehe auch Lemoine, *Bull. Soc. math.,* 12, p. 72; 14, p. 167.

Den grössten Theil der Resultate findet man in dem englischen Werk von Casey, *A sequel to Euclid,* 1888 zusammengestellt, von welchem auch eine französische Uebersetzung existirt, *Géom. élém. récente,* Paris, 1890; ein anderes Werk derselben Art ist von Poulain, *Nouv. géom. du triangle,* Paris 1892, Croville-Morant, éditeur.

Eine sehr kurz gefasste Uebersicht über einige Resultate ist in dem von Lugli redigirten *Periodico di mat.,* 6 erschienen.

Ueber den geschichtlichen Theil siehe Vigarié, *Esquisse historique sur ... la géom. du triangle, Assoc. Franç.,* 1889.

Die bis jetzt gemachten Erweiterungen der oben angeführten Sätze betreffen ins Besondere das Vierseit, Hexagon, etc. und dann das Tetraeder.

Die ersteren sind von Neuberg, *Mathesis,* 1885; Tucker, *Educat. Times,* 1885; Casey, *Irish Acad.,* 1886; *Mathesis,* 1890; Neuberg und Tarry, *Ass. Franç.,* 1886; etc.

Erweiterungen auf das Tetraeder sind von Piquet, *Assoc. Franç.,* 1874; Neuberg, *Mém. de l'Acad. de Belgique,* 1884 und andere von Beltrami, l. c.

Von deutschen Arbeiten sind die werthvolle Zusammenstellung von Lieber, *Programm der Stettiner Friedrich-Wilhelm-schule,* 1886/87: *Ueber die Gegenmittellinie und den Grebe'schen Punkt; über den Brocard'schen Kreis* und Emmerich, *die Brocard'schen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks,* Berlin 1891 hervorzuheben. Selbstständige Untersuchungen sind aus den Kreisen der deutschen Gymnasiallehrer im Aufgabenrepertorium der Hoffmann'schen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht sowie in Programmabhandlungen veröffentlicht worden. Wir erwähnen nur die *Bromberger Programmabhandlungen* von Kiehl 1881, 1888 und die *Recklinghauser* von Artzt, 1884, 1886.

Kapitel III.

Die Kegelschnitte.

§ 1. Die projective Erzeugung der Kegelschnitte. Unmittelbar daraus hervorgehende Eigenschaften.

Die Theorie der Kegelschnitte lässt sich auf synthetische projective Art und auf analytische Art entwickeln.

Nach der projectiven Methode können die Kegelschnitte folgendermassen definirt werden.

Man denke sich zwei homologe Ebenen (vergl. Kap. 1), die entweder conlocal sind oder nicht, und welche das Homologiecentrum S und die Homologieaxe s haben. Den Punkten eines in der einen Ebene gelegenen Kreises entsprechen in der anderen die Punkte einer Kurve, welche *Kegelschnitt* heisst und die beiden Fundamentaleigenschaften besitzt:

1) *dass jede Gerade ihrer Ebene sie in zwei Punkten oder einem einzigen Punkt oder keinem schneidet;*

2) *dass sich von jedem Punkt der Ebene zwei Tangenten oder eine Tangente oder keine an sie ziehen lässt.*

Daraus ergibt sich die Definition, welche die alten Griechen der ganzen Theorie zu Grunde gelegt haben, dass der Kegelschnitt die durch den Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene erzeugte Curve ist; denn auf diese Art sind der Kreis und der Kegelschnitt in perspective Lage gebracht.

Die Tangenten an den Kreis entsprechen den Tangenten an den Kegelschnitt.

Wenn in der ersten der beiden homologen Ebenen die Grenzgerade, d. h. die Gerade, welche der unendlich fernen Geraden der zweiten Ebene entspricht, den Kreis in zwei Punkten schneidet, so hat der entsprechende Kegelschnitt zwei reelle unendlich ferne Punkte und heisst Hyperbel; wenn die Grenzgerade den Kreis berührt, so hat der Kegelschnitt nur einen unendlich fernen Punkt *und wird* P a r a b e l *genannt; trifft schliesslich die Grenzgerade den Kreis nicht, so hat der Kegelschnitt überhaupt keine reellen unendlich fernen Punkte und heisst* E l l i p s e.

Definirt man die Kegelschnitte als die Curven, welche durch die Schnitte eines Kreiskegels mit einer Ebene entstehen, d. h. als die perspective Figur eines Kreises, so entsprechen die drei verschiedenen Kegelschnitte den drei verschiedenen Lagen, welche die schneidende Ebene in Bezug auf den Kegel annehmen kann: sie kann *alle* Erzeugenden schneiden (*Ellipse*) oder *einer* Erzeugenden parallel sein (*Parabel*) oder *zweien* parallel sein (*Hyperbel*).

Eine andere projective Definition der Kegelschnitte ist die folgende:

Man habe in einer Ebene zwei projective Strahlenbüschel mit verschiedenen Scheiteln O, O'. Die Schnittpunkte der sich entsprechenden Strahlen bilden einen K e g e l s c h n i t t, *welcher durch die beiden Scheitel der Büschel geht und dessen Tangenten in diesen Punkten die der Verbindungslinie OO' entsprechenden Geraden sind.*

Und correlativ:

Man habe in einer Ebene zwei projective Punktreihen mit verschiedenen Trägern. Die Geraden, welche die sich entsprechenden Punkte verbinden, sind die Tangenten an einen Kegelschnitt, der die beiden zu Grund liegenden Geraden in den Punkten berührt, die ihrem Schnittpunkte entsprechen.

Eine andere Definition der Kegelschnitte lässt sich auch auf Grund der Betrachtungen in Kap. 1, § 3 geben:

Der Kegelschnitt ist der Ort der Doppelpunkte einer involutorischen Dualität oder Polarität.

Oder auch:

Der Kegelschnitt ist die Einhüllende der Doppelgeraden einer Polarität.

Die Parabel wird von der unendlich fernen Geraden der Ebene berührt.

Es gibt zwei Gerade der Ebene, welche sich in endlicher Entfernung schneiden und die Hyperbel in ihren beiden unendlich fernen Punkten berühren. Diese Geraden heissen die *Asymptoten* der Hyperbel.

Wenn der Scheitel O' in einer gegebenen Richtung unendlich fern liegt, so kann der Strahl des Büschels (O'), welcher dem der gegebenen Richtung parallelen Strahl von (O) entspricht, im Endlichen oder Unendlichen liegen; in dem ersten Fall erhält man eine Hyperbel, in dem zweiten eine Parabel.

Wenn die beiden Scheitel O, O' in zwei verschiedenen Richtungen im Unendlichen liegen, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

Die Geraden, welche die Paare sich entsprechender Punkte in zwei ähnlichen Punktreihen verbinden, hüllen eine Parabel ein.

Aus diesen Definitionen ergibt sich sofort:

Das anharmonische Verhältniss der vier Geraden, welche von vier Punkten des Kegelschnitts nach einem variabelen Punkt des Kegelschnitts gezogen werden, ist constant und pflegt das anharmonische Verhältniss der vier Punkte des Kegelschnitts genannt zu werden.

Das anharmonische Verhältniss der vier Punkte, in denen irgend vier feste Tangenten eines Kegelschnitts von einer variabelen Tangente geschnitten werden, bleibt bei dem Variiren dieser 5ten Tangente constant. Es heisst das anharmonische Verhältniss der vier Tangenten des Kegelschnitts.

Das anharmonische Verhältniss von vier Tangenten eines Kegelschnitts ist dem der vier Berührungspunkte gleich.

Die Tangenten an eine Parabel schneiden zwei feste Tangenten an die Parabel in Punkten, welche zwei ähnliche Punktreihen bilden.

Daraus folgt: *Von zwei festen Tangenten an eine Parabel schneiden alle anderen Tangenten proportionale Theile ab.*

Und umgekehrt: *Die Geraden, welche die sich entsprechenden Punkte zweier in einer Ebene liegender ähnlicher Punktreihen verbinden, hüllen eine Parabel ein, welche die beiden Geraden, die Träger der Punktreihen sind, berührt.*

Bei einem Kegelschnitt ist das Product der Segmente constant, welche eine variabele Tangente auf zwei festen parallelen Tangenten bestimmt, wenn die Segmente von den Berührungspunkten der Tangenten aus gerechnet werden.

§ 2. Die projectiven Fundamentaleigenschaften der Kegelschnitte. Die Theoreme von Pascal, Brianchon, Desargues.

Wenn ein Sechseck einem Kegelschnitt eingeschrieben wird, so schneiden sich die drei Paare von Gegenseiten in drei Punkten einer und derselben Geraden. Das Pascal'sche Theorem, 1640.

Wird ein Sechseck einem Kegelschnitt umschrieben, so treffen sich die Geraden, welche die drei Paare von Gegenecken verbinden, in demselben Punkt. Das Brianchon'sche Theorem, 1806.

Sind zwei Dreiecke homolog, so gehören die Punkte, in denen die Seiten [illegible] die nicht entsprechenden des anderen schneiden, *einem Kegelschnitt an, und die Geraden, die von den Ecken des einen nach den nicht entsprechenden Ecken des anderen gehen, berühren einen zweiten Kegelschnitt. Das Steiner'sche Theorem.*

Wenn ein Dreieck derart deformirt wird, dass seine Seiten um feste Punkte rotiren, während zwei Eckpunkte sich auf zwei festen Geraden bewegen, so beschreibt der dritte Eckpunkt einen Kegelschnitt. Das Maclaurin'sche Theorem, 1721.

Wird ein Dreieck so deformirt, dass seine Eckpunkte sich auf festen Geraden bewegen, während zwei Seiten um feste Punkte rotiren, so hüllt die dritte Seite einen Kegelschnitt ein.

Wenn ein Fünfeck in einen Kegelschnitt eingeschrieben wird, so liegen der Schnittpunkt zweier nicht aufeinander folgender Seiten, der Schnittpunkt zweier anderer nicht consecutiver Seiten und der Punkt, in dem die fünfte Seite die in der gegenüberliegenden Ecke berührende Tangente trifft, in einer Geraden und correlativ.

Wird ein Viereck in einen Kegelschnitt eingeschrieben, so liegt der Punkt, in welchem sich die in zwei Gegenecken an den Kegelschnitt gelegten Tangenten schneiden, in einer Geraden mit den beiden Schnittpunkten der Paare von Gegenseiten.

Das vollständige von vier Tangenten an einen Kegelschnitt gebildete Vierseit und das vollständige von den vier Berührungspunkten gebildete Viereck haben dasselbe Diagonaldreieck. Vergl. Kap. 2.

Wenn ein Vierseit um einen Kegelschnitt beschrieben wird, so gehen die Geraden, welche die Berührungspunkte zweier Gegenseiten verbinden, durch den Schnittpunkt der Diagonalen. Durch diesen Punkt gehen auch die Diagonalen des eingeschriebenen Vierseits, welches zu Ecken die vier Berührungspunkte der vier Seiten des ersteren hat, und die vier Diagonalen bilden eine harmonische Gruppe. Ferner liegen die Schnittpunkte der Paare von Gegenseiten der beiden Vierseite in einer Geraden und bilden ebenfalls eine harmonische Gruppe.

Beschreibt man ein Dreieck in einen Kegelschnitt, so treffen die Tangenten in den Eckpunkten die gegenüberliegenden Seiten in Punkten einer Geraden.

Wenn ein Dreieck um einen Kegelschnitt beschrieben wird, so gehen die Geraden, welche die Eckpunkte mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, durch denselben Punkt.

Eine Transversale schneidet einen Kegelschnitt und die Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks in drei Paaren involutorisch conjugirter Punkte (Desargues) und correlativ.

Wenn ein Viereck, welches beständig in einem Kegelschnitt eingeschrieben bleibt, so deformirt wird, dass drei seiner Seiten um drei feste in einer Geraden liegende Punkte rotiren, so dreht sich auch die vierte Seite um einen anderen festen Punkt derselben Geraden.

In einem umschriebenen Dreieck wird jede Seite durch ihren Berührungspunkt und durch die Gerade, welche die Berührungspunkte der beiden anderen Seiten verbindet, harmonisch getheilt. Der correlative Satz gilt für das eingeschriebene Dreieck.

Wenn die Sehne, welche die Berührungspunkte zweier Tangenten verbindet (d. h. die Berührungssehne zweier Tangenten), durch den Schnittpunkt zweier anderer Tangenten geht, so werden die beiden ersten Tangenten harmonisch durch die letzteren getheilt und umgekehrt.

Wenn zwei Tangenten an einen Kegelschnitt sich in einem Punkt der Berührungssehne zweier anderer Tangenten treffen, so liegt umgekehrt auch der Schnittpunkt der letzteren auf der Berührungssehne der ersteren.

Der Schnittpunkt S zweier Tangenten und die Berührungssehne s heissen *Pol* bez. *Polare*; d. h. S wird der *Pol* von s und s die *Polare* von S genannt.

Der Pol und die Polare bez. eines Kegelschnitts fallen mit dem Pol und der Polaren in einer Polarität zusammen, für welche der Kegelschnitt der Ort der Doppelpunkte ist.

Die Polare s eines Punkts S kann auch als der Ort der Schnittpunkte der Paare von Gegenseiten der eingeschriebenen Vierecke, deren Diagonalen durch S gehen, definirt werden, oder auch als der Ort eines Punktes P, der harmonisch zu S in Bezug auf die Schnittpunkte von SP mit dem Kegelschnitt liegt.

Die Polare eines Punkts des Kegelschnitts ist die Tangente in diesem Punkt.

Wenn ein Punkt sich auf einer Geraden bewegt, so rotirt seine Polare um einen Punkt.

Zwei Punkte, von denen jeder auf der Polaren des anderen liegt, heissen *conjugirt oder reciprok bez. des Kegelschnitts* und ebenso werden zwei Gerade, von denen jede durch den Pol der anderen geht, *conjugirt oder reciprok* genannt.

Sind zwei Punkte reciprok, so sind auch ihre Polaren reciprok.

Ein Dreieck, von dem jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seite ist, heisst *ein bez. des Kegelschnitts sich selbst conjugirtes Dreieck (Polardreieck).*

Die Diagonalecken des durch vier Punkte eines Kegelschnitts bestimmten vollständigen Vierecks bilden ein Polardreieck und correlativ bilden auch die Diagonalseiten des durch vier Tangenten an einen Kegelschnitt bestimmten vollständigen Vierseits ein Polardreieck.

Wenn ein Dreieck in einen Kegelschnitt eingeschrieben wird, so schneidet die einer Seite bez. des Kegelschnitts reciproke Gerade die beiden anderen Seiten in zwei reciproken Punkten. Staudt.

Wenn zwei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits bez. eines reellen oder imaginären Kegelschnitts reciproke Punkte einer Polarität sind, Kap. 1, § 3, *so müssen auch die beiden übrigen Gegenecken in derselben Polarität reciprok sein. Hesse.*

Wenn von zwei Dreiecken das eine in einer Polarität dem anderen polar ist, so sind sie homolog, und umgekehrt sind zwei homologe Dreiecke stets in einer Polarität polar zu einander.

Bei zwei Dreiecken hat jede der folgenden drei Eigenschaften die beiden übrigen zur Folge:

1. *dass sie in derselben Polarität sich selbst conjugirt sind;*
2. *dass sie bei einem Kegelschnitt eingeschrieben sind;*
3. *dass sie bei einem Kegelschnitt umschrieben sind.*

§ 3. Hauptformeln der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.

Die analytische Definition der Kegelschnitte lautet:

Es seien x_1, x_2, x_3 die homogenen Coordinaten eines Punktes der Ebene. Der *Kegelschnitt* ist dann der analytisch durch eine Beziehung 2ten Grads zwischen den x vom Typus

$$f(x) = \sum_1^3 a_{ij} x_i x_j = 0, \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

dargestellte geometrische Ort; darin sind $a_{11}, a_{22}, \ldots$ constante Coefficienten. (*Die Gleichung der Kegelschnitte.*)

Daher pflegt man die Kegelschnitte auch *Kurven zweiter Ordnung* zu nennen.

Wenn das Fundamentaldreieck der Coordinaten ein sich selbst conjugiertes Dreieck ist, so reducirt sich die Gleichung des Kegelschnitts auf die canonische Form $\sum a_{ii} x_i^2 = 0$, *so dass also die Coefficienten* a_{ij}, *bei denen* $i \gtrless j$ *ist, Null werden.*

Nehmen wir dagegen an, u_1, u_2, u_3 seien die homogenen Coordinaten einer Geraden der Ebene, so stellt eine ähnliche

Relation 2^{ten} Grades zwischen den u eine *Enveloppe* dar, d. h. eine Curve, welche alle Gerade, deren Coordinaten dieser Relation genügen, zu Tangenten hat, siehe Kap. 1, S. 28. Diese Curve ist ebenfalls ein *Kegelschnitt*. Man nennt den Kegelschnitt daher auch *Kurve 2*$^{\text{ter}}$ *Classe*.

Die Gleichung in *Punkt*coordinaten pflegt man *Punktgleichung*, die in Geradencoordinaten *Tangentialgleichung* zu nennen.

Aus der Gleichung des Kegelschnitts geht hervor, dass der Kegelschnitt bestimmt ist, wenn die Werthe der Verhältnisse von *fünf* Coefficienten der Gleichung zu dem letzten Coefficienten festgesetzt sind.

Ein Kegelschnitt ist auf eine endliche Anzahl von Arten bestimmt, wenn r Punkte gegeben sind, durch welche er gehen, und s Gerade, welche er berühren soll, und dabei $r + s = 5$ ist.

Speciell gilt:

durch 5 Punkte geht nur ein Kegelschnitt;

durch vier Punkte gehen zwei Kegelschnitte, die eine gegebene Gerade berühren;

durch 3 Punkte vier Kegelschnitte, die zwei gegebene Gerade.

durch 2 Punkte vier Kegelschnitte, die drei gegebene Gerade.

durch einen Punkt zwei Kegelschnitte, die vier gegebene Gerade berühren.

Es gibt nur einen Kegelschnitt, der fünf gegebene Gerade berührt.

Eine reichhaltigere Sammlung von Sätzen dieser Art findet man in Kap. 15, § 4.

Wir wollen (die Discriminante)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

setzen und die algebraische Adjungirte des Elements a_{ij} dieser Determinante (d. h. die mit $(-1)^{i+j}$ multiplicirte Determinante, welche durch Streichen der i^{ten} Zeile und j^{ten} Columne aus der Determinante A hervorgeht) mit A_{ij} und die Adjungirte A_{33} dann mit B bezeichnen.

Die Gleichung des Kegelschnitts in Cartesischen Coordinaten x, y erhält man aus der allgemeinen Gleichung auf Seite 79, wenn $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ gesetzt wird. Es sei ω der Winkel zwischen den beiden schiefen Cartesischen Axen und ausserdem

$$C = a_{11} + a_{22} - 2\,a_{12} \cos \omega.$$

Man erhält dann das folgende wichtige Resultat:

Bei jeder beliebigen Transformation der Cartesischen Coordinaten bleiben die Ausdrücke

$$\frac{A}{\sin^2\omega}, \quad \frac{B}{\sin^2\omega}, \quad \frac{C}{\sin^2\omega}$$

*unverändert (sind invariant).**)

Daraus folgt:

Bei jeder beliebigen Transformation der Cartesischen Coordinaten behalten die Grössen A, B, C immer dasselbe Vorzeichen.

Bei rechtwinkligen Coordinaten wird die Grösse C gleich $a_{11} + a_{22}$; mithin:

Geht man von rechtwinkligen Axen zu anderen ebenfalls rechtwinkligen Axen über, so bleibt die Grösse $a_{11} + a_{22}$ unverändert.

Je nach den Werthen der Coefficienten, die *reell* vorausgesetzt werden, hat der durch die Gleichung 2^{ten} Grads dargestellte Ort verschiedene Gestalten. Behält man die eben für die *Ellipse, Parabel* und *Hyperbel* gegebenen Definitionen bei (siehe oben), so gelten die Sätze:

Nimmt man an, A sei von Null verschieden, so erhält man für $B > 0$ eine Ellipse, für $B < 0$ eine Hyperbel und für $B = 0$ eine Parabel.

Für $B > 0$ besteht die Ellipse nur dann aus reellen Punkten, wenn $Aa_{11} < 0$ und $Aa_{22} < 0$ ist, wobei die eine dieser Ungleichheiten für $B > 0$ die Folge der anderen ist; im anderen Fall erhält man eine Ellipse, deren Punkte imaginär sind (eine imaginäre Ellipse). Ist ferner $B < 0$ oder $B = 0$, so ergibt sich immer eine reelle Hyperbel oder eine reelle Parabel, wenn nur A von Null verschieden ist.

Wenn schliesslich $A = 0$ ist, so erhält man in jedem Fall ein Paar Gerade und nicht, wie bisher, einen eigentlichen Kegelschnitt; dieses Paar besteht aus imaginären Geraden, die sich in einem reellen Punkt in endlicher Entfernung schneiden, wenn $B > 0$ ist,

---

*) Zwischen diesem Satz und der Behauptung *Repert.* 1, Kap. 12, § 16, p. 334, dass das System eines einzigen Kegelschnitts *keine* absoluten Invarianten habe, besteht kein Widerspruch. Die Invarianten, von denen oben die Rede ist, hängen nicht nur von den Coefficienten des Kegelschnitts, sondern auch von den Coordinatenaxen ab, die immer *Cartesische Axen* bleiben müssen; mithin sind die Transformationen, von denen wir hier sprechen, *nicht alle möglichen*, wie *Repert.* 1, p. 334, sondern nur diejenigen, welche die unendlich ferne Gerade der Ebene unverändert lassen.

und aus reellen Geraden, die sich in einem reellen Punkt in endlicher Entfernung treffen, wenn $B < 0$ *ist, und schliesslich aus zwei parallelen reellen oder imaginären Geraden, oder auch aus zwei in eine einzige reelle Gerade zusammenfallenden Geraden für* $B = 0$.

Wenn der Kegelschnitt eine reelle Ellipse ist, so kann man seine Gleichung (in nicht homogenen Coordinaten) durch geeignete Wahl der Coordinatenaxen auf die Gestalt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bringen, und wenn die Ellipse imaginär ist, auf

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so lässt sich seiner Gleichung bei passender Wahl der Axen die Gestalt

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

geben.

Ist er schliesslich eine Parabel, so lautet die einfachste Form der Gleichung:

$$y^2 = px.$$

Eine allgemeine Gleichung 2^{ten} *Grads von dem gewöhnlichen Typus, deren Terme* 2^{ten} *Grads ein vollständiges Quadrat bilden, stellt eine Parabel dar, wenn* A *von Null verschieden ist.*

Jede homogene rationale Gleichung 2^{ten} *Grades zwischen* x *und* y *mit reellen Coefficienten stellt ein Paar Gerade dar, die durch den Anfangspunkt gehen.*

Soll die allgemeine Gleichung 2^{ten} *Grades ein Paar Gerade darstellen, so ist es nöthig, dass sich ihre linke Seite in zwei rationale Factoren* 1^{ten} *Grads in* x *und* y *zerlegen lasse.*

Die allgemeine Gleichung 2^{ten} *Grades stellt einen Kreis dar, wenn* A *von Null verschieden,* $a_{22} = a_{11}$ *und* $a_{12} = a_{11} \cos\omega$ *ist, wobei unter* ω *der Winkel zwischen den Axen verstanden wird. Der Kreis ist reell oder imaginär, je nachdem* $A a_{11} < 0$ *oder* $A a_{11} > 0$ *ist.*

Für rechtwinklige Axen muss daher

$$a_{11} = a_{22},\ a_{12} = 0 \quad \textit{sein.}$$

Der Gleichung des Kreises kann man bei rechtwinkligen Axen die Gestalt

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

geben, worin α *und* β *die beiden Mittelpunktscoordinaten und* r *den Radius bezeichnen; bei schiefen Axen dagegen lässt sich die Gleichung auf die Form*

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2$$

reduciren, wenn ω *den Axenwinkel bedeutet.*

Ist die allgemeine Gleichung des Kreises

$$a_{11}(x^2+xy\cos\omega+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

gegeben, so sind die Mittelpunktscoordinaten:

$$\alpha=\frac{-a_{13}+a_{23}\cos\omega}{a_{11}\sin^2\omega},$$

$$\beta=\frac{a_{13}\cos\omega-a_{23}}{a_{11}\sin^2\omega},$$

und der Radius ist durch

$$r^2=\frac{a_{13}{}^2+a_{23}{}^2-2a_{13}a_{23}\cos\omega-a_{11}a_{33}\sin^2\omega}{a_{11}{}^2\sin^2\omega}\quad \textit{bestimmt.}$$

Eine Hyperbel, deren Asymptoten rechtwinklig aufeinander stehen, heisst *gleichseitig.*

Für die gleichseitige Hyperbel muss

$$a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega=0\quad \textit{sein.}$$

Alle Kreise der Ebene werden von der unendlich fernen Geraden in denselben beiden imaginären Punkten geschnitten, welche die imaginären unendlich fernen Kreispunkte der Ebene genannt werden.

Jeder Kegelschnitt, der durch die beiden imaginären Kreispunkte geht, ist ein Kreis.

Die Tangentialgleichung der beiden imaginären Kreispunkte ist

$$u^2+v^2=0.$$

Die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die in diesen Punkten an den Kreis gezogenen Tangenten mit der x*-Axe bilden, sind* $\operatorname{tg}\alpha=\pm i=\pm\sqrt{-1}$; *die Tangenten an alle Kreise in den imaginären Kreispunkten sind daher als parallel anzusehen.*

Der Winkel α *muss als unendlich gross betrachtet werden.*

Die Gleichung der Tangente an den Kegelschnitt in einem Punkt mit den Coordinaten x', y' lautet:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y \\ + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0.$$

Die Normale, d. h. das Loth auf die Tangente in dem Berührungspunkt, hat bei orthogonalen Axen die Gleichung:

$$\frac{x - x'}{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}} = \frac{y - y'}{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}}.$$

Bezeichnet man mit $f(x, y)$ die linke Seite der Kegelschnittsgleichung, *so sind die Tangenten, welche man von einem Punkt x', y' an den Kegelschnitt ziehen kann, reell und verschieden, reell und zusammenfallend oder imaginär, je nachdem das Product*

$$Af(x', y')$$

negativ, Null oder positiv ist.

Die Bedingung, damit die Gerade mit der Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0$$

eine Tangente an den gegebenen Kegelschnitt mit der gewöhnlichen Gleichung sei, ist

$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0,$$

worin $A_{11}, A_{22}, \ldots$ die algebraischen Adjungirten der gleichnamigen Elemente in der Determinante A sind.

Wenn u, v als Geradencoordinaten interpretirt werden, so ist die vorstehende Relation die *Tangentialgleichung des Kegelschnitts* oder die *Gleichung des Kegelschnitts in Liniencoordinaten.*

Die Gleichung

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y + \\ + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0,$$

worin x', y' nicht, wie bisher, die Coordinaten eines Punkts der Curve, sondern allgemein eines beliebigen Punkts der Ebene sind, stellt die *Polare* (siehe § 2) des Punkts x', y' (*des Pols*) in Bezug auf die Curve dar.

Damit zwei Punkte (x', y'), (x'', y'') conjugirt seien (§ 2), muss

$$a_{11}x'x'' + a_{12}(x'y'' + x''y') + a_{22}y'y'' + a_{13}(x' + x'') \\ + a_{23}(y' + y'') + a_{33} = 0 \text{ sein.}$$

Der Pol der Geraden

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

hat zu Coordinaten:

$$x' = \frac{A_{11}\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu}{A_{13}\lambda \qquad\qquad A_{33}\nu}, \quad y' = \frac{A_{12}\lambda + A_{22}\mu + A_{32}\nu}{A_{13}\lambda + A_{23}\mu + A_{33}\nu}.$$

Zu jeder Geraden gehört bez. eines Kegelschnitts nur ein Pol; eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn der Kegelschnitt in ein Geradenpaar ausartet, also $A = 0$ ist. In diesem Fall haben alle durch den Schnittpunkt des Geradenpaares gehenden Geraden unendlich viele Pole, welche ebenfalls eine durch den Schnittpunkt gehende Gerade erfüllen; die Polare des Schnittpunkts ist in diesem Fall unbestimmt.

Die Bedingung, unter welcher zwei Gerade

$$\lambda' x + \mu' y + \nu' = 0,$$
$$\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' = 0$$

conjugirt sind, lautet:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mu'' & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \nu'' & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Der Ort der Mittelpunkte eines Systems von Sehnen, welche derselben Richtung parallel sind, ist eine Gerade, die ***Durchmesser*** *des Kegelschnitts genannt wird.*

Der Durchmesser ist die Polare des in der Richtung der von ihm halbirten Sehnen unendlich fern gelegenen Punkts.

Alle Durchmesser gehen durch einen Punkt, welcher der ***Mittelpunkt*** *des Kegelschnitts heisst. Jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade ist ein Durchmesser.*

Der Mittelpunkt ist der Pol der unendlich fernen Geraden der Ebene.

Die Tangenten in den Punkten, in welchen ein Durchmesser die Curve trifft, sind den von dem Durchmesser halbirten Sehnen parallel.

Wenn der Coordinatenanfang in dem Mittelpunkt des Kegelschnitts liegt, so fehlen in der Gleichung des Kegelschnitts die Terme ersten Grads in den Coordinaten.

Die Gleichung des Durchmessers, welcher die Sehnen halbirt, die parallel zur Geraden $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ sind, lautet:

$$(a_{11} m + a_{12} n)x + (a_{21} m + a_{22} n)y + (a_{31} m + a_{32} n) = 0.$$

Speciell gilt für die Durchmesser, welche die Sehnen halbiren, die den Coordinatenaxen parallel sind:

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} = 0,$$
$$a_{21} x + a_{22} y + a_{23} = 0.$$

Bei der Parabel liegt der Mittelpunkt unendlich fern und sind daher alle Durchmesser parallel.

Die Coordinaten x_0, y_0 des Mittelpunkts eines Kegelschnitts sind:

$$x_0 = \frac{a_{23}a_{21} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$
$$y_0 = \frac{-a_{23}a_{11} + a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}.$$

Bei der Ellipse und Hyperbel heissen zwei *Durchmesser conjugirt*, wenn der eine die dem anderen parallelen Sehnen halbirt.

Die unendlich vielen Paare conjugirter Durchmesser bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen die (bei der Hyperbel reellen, bei der Ellipse imaginären) Asymptoten sind.

Zwischen den Winkelcoefficienten) $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ zweier conjugirter Durchmesser besteht die Relation*

$$a_{11}mm' + a_{12}(mn' + m'n) + a_{22}nn' = 0.$$

Der Winkelcoefficient der Durchmesser der Parabel ist

$$-\frac{a_{12}}{a_{11}} \text{ oder } -\frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

Die Winkelcoefficienten $\frac{m}{n}$ der beiden Asymptoten der Hyperbel sind durch die Gleichung

$$a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0 \quad \textit{gegeben.}$$

Die vereinigte Gleichung für die beiden durch den Coordinatenanfang parallel zu den Asymptoten gezogenen Geraden lautet:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Der Flächeninhalt des aus der Tangente und den beiden Asymptoten gebildeten Dreiecks ist bei der Hyperbel constant.

Bei der Ellipse und der Hyperbel gibt es unter den unendlich vielen Paaren conjugirter Durchmesser ein Paar, dessen Durchmesser senkrecht aufeinander stehen. Diese beiden Durchmesser heissen die *Axen* und ihre Schnittpunkte mit der Curve die *Scheitel*.

---

*) Eigentlich pflegt man Winkelcoefficient einer Geraden das mit umgekehrtem Vorzeichen genommene Verhältniss zwischen den Coefficienten von x und y in der auf *rechtwinklige* Cartesische Coordinaten bezogenen Gleichung der Geraden zu nennen. Wir wollen diese Benennung aber hier auch auf *schiefe* Coordinaten ausdehnen.

Bei der Parabel gibt es nur einen Durchmesser, der auf den von ihm halbirten Sehnen senkrecht steht; auch er wird *Axe* genannt.

Die Axen sind immer reell und sind Symmetricaxen der Curve.

Bei der Hyperbel halbiren die Axen die Winkel zwischen den Asymptoten. Die eine von ihnen trifft die Curve in zwei reellen Punkten und heisst die *Hauptaxe* oder die *reelle* oder *focale* oder auch *transversale Axe,* die andere wird die *imaginäre Axe* genannt.

Die vereinigte Gleichung für die Axen des Kegelschnitts lautet

$$(a_{11}\cos\omega - a_{12})(x-x_0)^2 + (a_{11}-a_{22})(x-x_0)(y-y_0) - \\ -(a_{22}\cos\omega - a_{12})(y-y_0)^2 = 0,$$

worin ω *der Winkel zwischen den Coordinatenaxen ist und* x_0, y_0 *die Coordinaten des Mittelpunkts bedeuten.*

Die Gleichung für die Axe der Parabel ist:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \frac{(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) + (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\cos\omega}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega} = 0.$$

Wenn die Coordinatenaxen zwei conjugirte Durchmesser sind (speciell mit den Axen des Kegelschnitts zusammenfallen), so hat die Gleichung des Kegelschnitts die Gestalt

$$\frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1;$$

die Grössen a_1, b_1 *heissen die Längen der conjugirten Halbmesser.*

Wenn die Coordinatenaxen die Axen des Kegelschnitts sind, so werden die Grössen a_1, b_1 *die Halbaxen* genannt. *Schneidet die Axe den Kegelschnitt, so sind die Halbaxen die Abstände des Mittelpunkts von den Schnittpunkten.*

Die Längen der Halbaxen erhält man aus den Formeln

$$\sqrt{-\frac{A}{B\varrho_1}}, \quad \sqrt{-\frac{A}{B\varrho_2}},$$

worin ϱ_1, ϱ_2 *die beiden Wurzeln der Gleichung*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho, & a_{12} - \varrho\cos\omega \\ a_{12} - \varrho\cos\omega, & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

oder der Gleichung

$\sin^2\omega \cdot \varrho^2 - C \cdot \varrho + B = 0$ *bezeichnen* (*siehe oben,* S. 80).

Die auf die Aymptoten bezogene Gleichung der Hyperbel hat die Form

$$xy + p = 0.$$

Die Gleichung der Ellipse oder Hyperbel in Bezug auf einen Durchmesser als x-Axe und die Tangente in einem seiner Endpunkte als y-Axe ist von dem Typus

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 x = 0.$$

Die Gleichung der Parabel lautet in diesem Fall

$$y^2 = px.$$

Die Zahl p heisst der dem gewählten Durchmesser entsprechende *Parameter*; ist der Durchmesser die *Axe*, so wird p der *Hauptparameter* genannt.

Die Polargleichung der Ellipse oder Hyperbel ist in Bezug auf das Centrum als Pol:

$$\varrho^2 = \frac{a_{22}{}^2}{\pm (1 - e^2 \cos^2 \theta)},$$

worin das positive Zeichen für die Ellipse, das negative für die Hyperbel gilt und e die sogenannte numerische Excentricität ist (§ 5).

§ 4. Die hauptsächlichsten metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte.

Wenn ein Kegelschnitt die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks in den Punkten D, D'; E, E'; F, F' schneidet, so besteht die Relation:

$$\frac{BD \cdot BD'}{CD \cdot CD'} \cdot \frac{CE \cdot CE'}{AE \cdot AE'} \cdot \frac{AF \cdot AF'}{BF \cdot BF'} = 1;$$

das Carnot'sche Theorem, Géom. de posit., p. 437; *und umgekehrt, wenn die Punkte D, D'; E, E'; F, F' auf den Seiten eines Dreiecks dieser Relation genügen, so liegen sie auf einem Kegelschnitt.*

Bei der Ellipse ist die Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser constant, bei der Hyperbel dagegen die Differenz der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser.

Bei der Ellipse sowohl wie bei der Hyperbel ist der Flächeninhalt des über zwei conjugirten Halbmessern construirten Parallelogramms constant.

Das Rechteck aus den Segmenten, welche zwei conjugirte Durchmesser auf einer festen Tangente vom Berührungspunkt aus bestimmen, ist constant dem Quadrat über dem der festen Tangente parallelen Halbmesser gleich.

Wenn man ein Parallelogramm über zwei conjugirten Halbmessern der Hyperbel construirt, so ist eine seiner Diagonalen eine Asymptote und die andere der zweiten Asymptote parallel.

Das Rechteck aus den Segmenten, welche eine veränderliche Tangente auf zwei festen parallelen Tangenten von ihren Berührungspunkten aus bestimmt, ist constant dem Quadrat über dem den festen Tangenten parallelen Halbmesser gleich.

Das Rechteck aus den Segmenten, welche zwei veränderliche parallele Tangenten von einer festen Tangente abschneiden, ist dem Quadrat über dem der festen Tangente parallelen Halbmesser gleich.

Das über zwei Halbmessern construirte Parallelogramm hat den gleichen Inhalt, wie das aus den beiden zu ihnen conjugirten Halbmessern gebildete Parallelogramm.

Die beiden von einem Punkt aus an den Kegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel) gezogenen Tangenten sind den ihnen parallelen Halbmessern proportional.

Das Product aus den beiden Segmenten einer durch einen festen Punkt gehenden Secante ist dem Quadrat des ihr parallelen Halbmessers proportional.

Die Quadrate eines Systems paralleler Sehnen sind den Producten der Segmente proportional, die von den Sehnen auf dem ihrer Richtung conjugirten Durchmesser bestimmt werden.

Die Producte der Segmente, welche eine Gerade, die einer Asymptote der Hyperbel parallel ist, oder ein Durchmesser der Parabel auf einem System paralleler Sehnen bestimmt, sind den Segmenten proportional, welche die Sehnen von dieser Geraden abschneiden.

Das Product der Segmente, welche von einer beliebigen Tangente an eine Hyperbel auf den beiden Asymptoten, von ihrem Schnittpunkt an gerechnet, bestimmt werden, hat einen constanten Werth.

Der Flächeninhalt des von einer Tangente an die Hyperbel und von den Asymptoten gebildeten Dreiecks ist constant.

Der zwischen den Asymptoten liegende Theil einer Tangente an die Hyperbel wird von dem Berührungspunkt halbirt.

Die beiden Segmente, welche eine Hyperbel und ihre Asymptoten von einer Transversalen abschneiden, haben denselben Mittelpunkt.

Wenn ein Viereck in einen Kegelschnitt eingeschrieben wird, so hat das Product der Abstände eines beliebigen Punkts der Curve von zwei Gegenseiten ein constantes Verhältniss zu dem Product der Abstände desselben Punkts von den beiden anderen Gegenseiten. Das Pappus'sche Theorem.

Wird ein Vierseit einem Kegelschnitt umschrieben, so hat das Product der Abstände einer beliebigen Tangente von zwei Gegenecken ein constantes Verhältniss zu dem Product der Abstände derselben Tangente von den beiden anderen Ecken.

Wenn man um zwei feste Punkte einer Hyperbel zwei Strahlen rotiren lässt, die sich beständig auf der Curve schneiden, so hat das von diesen Strahlen auf einer Asymptote abgeschnittene Segment immer dieselbe Länge.

Eine der Diagonalen des Parallelogramms, von welchem zwei Gegenecken auf der Hyperbel liegen und dessen Seiten den Asymptoten parallel sind, geht stets durch den Mittelpunkt.

Bei der Parabel ist die Subnormale, d. h. der Abstand des Fusspunkts des von einem Punkt der Parabel auf die Axe gefällten Lothes von dem Durchschnittspunkt der Normalen mit der Axe (vergl. Kap. 16, § 1), *constant und dem halben Hauptparameter gleich.*

Der Flächeninhalt des von drei Tangenten an die Parabel gebildeten Dreiecks ist die Hälfte des Inhalts des von den Berührungspunkten der Tangenten gebildeten Dreiecks.

Der Schnittpunkt der Höhen eines jeden in eine gleichseitige Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks liegt auf der Curve.

Bei jedem in eine gleichseitige Hyperbel eingeschriebenen rechtwinkligen Dreieck steht die Tangente in dem Scheitel des rechten Winkels senkrecht auf der Hypotenuse.

Der Kreis, welcher einem in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel conjugirten Dreieck eingeschrieben ist, geht durch den Mittelpunkt der Curve.

§ 5. Focale Eigenschaften der Kegelschnitte.

Es gibt im Allgemeinen vier (reelle oder imaginäre) Punkte von der Beschaffenheit, dass alle durch jeden von ihnen gehende Paare von conjugirten Geraden Paare von aufeinander senkrechten Geraden sind. Diese Punkte werden *Brennpunkte* genannt.

Bei der Ellipse und der Hyperbel existiren zwei reelle Brennpunkte in endlicher Entfernung, die auf der einen Axe symmetrisch zum Mit[illegible] *und sich innerhalb der Curve* *befinden, so dass die von ihnen nach der Curve gezogenen Tangenten imaginär sind.*

Bei der Parabel gibt es nur einen einzigen reellen in endlicher Entfernung auf der Axe und innerhalb der Curve gelegenen Brennpunkt.

Die Axe, auf welcher die reellen Brennpunkte liegen, heisst die *Hauptaxe,* auch *Brennpunktsaxe.*

Bezeichnet man mit α, β die Halbaxen der Ellipse oder Hyperbel, *so liegen die reellen Brennpunkte der Ellipse auf ihrer grossen Axe in dem Abstand* $\pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ *vom Centrum und die der Hyperbel in dem Abstand* $\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ *vom Centrum auf derjenigen der beiden Axen, welche die Curve in reellen Punkten trifft.*

Directrix heisst die Polare eines Brennpunkts.

Bei der Ellipse und Hyperbel gibt es zwei Directricen, die reell sind, und senkrecht auf der Brennpunktsaxe stehen; bei der Parabel dagegen nur eine reelle, die ebenfalls senkrecht zur Hauptaxe ist.

Die Gleichung der Directrix erhält man durch Substitution der Coordinaten eines Brennpunkts in die Gleichung der Polaren.

Das Verhältniss der Abstände eines Curvenpunkts vom Brennpunkt und von der entsprechenden Directrix ist constant. Es heisst *die numerische Excentricität und hat für die Ellipse den Werth*

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}, \text{ für die Hyperbel } \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha},$$

worin α und β, wie oben, die Halbaxen der beiden Curven sind.

Für die Ellipse ist die Excentricität kleiner, für die Parabel gleich und für die Hyperbel grösser als 1. Die Punkte der Parabel liegen also gleich weit von dem Brennpunkt und der Directrix entfernt.

Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel dagegen die Differenz der Strahlen constant, die von einem Punkt der Curve nach den beiden reellen Brennpunkten gezogen werden.

Das Product der Abstände der beiden Brennpunkte von einer Tangente an die Curve ist constant.

Die Tangente und die Normale in einem Punkt der Curve halbiren die Winkel der beiden Brennstrahlen.

Bei der Parabel halbiren die Tangente und die Normale in einem Punkt die Winkel zwischen dem Brennstrahl (Radius vector) und dem durch den betreffenden Punkt der Curve gehenden Durchmesser.

Die beiden reellen Brennpunkte der Ellipse liegen auf der grossen Axe; der Abstand eines jeden von ihnen vom Mittelpunkt ist die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete die kleine Halbaxe und dessen Hypotenuse die grosse Halbaxe ist.

Bei der Hyperbel ist der Abstand eines Brennpunkts vom Centrum die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Halbaxen sind.

Eine Ellipse und eine Hyperbel, die durch denselben Punkt gehen und dieselben Brennpunkte haben, schneiden sich rechtwinklig.

Die Normale zum Kegelschnitt zerlegt den Abstand zwischen den Brennpunkten in Theile, die den Brennstrahlen proportional sind.

Der zu einer Sehne gehörige Winkel, dessen Scheitel im Brennpunkt liegt, wird von der Geraden halbirt, welche den Brennpunkt mit dem Pol der Sehne verbindet.

Die Verbindungsgerade des Brennpunkts mit dem Pol einer durch diesen Brennpunkt gehenden Sehne steht senkrecht auf der Sehne.

Der Winkel, welcher dem zwischen zwei festen Tangenten enthaltenen Theil einer veränderlichen Tangente am Brennpunkt gegenüberliegt, ist constant.

Das Rechteck aus den Segmenten einer Brennpunktssehne hat stets dasselbe constante Verhältniss zur ganzen Sehne.

Die Summe zweier Brennpunktssehnen, welche zwei conjugirten Durchmessern parallel sind, ist constant.

Die Summe der reciproken Werthe zweier orthogonaler Brennpunktssehnen ist constant.

Der Abstand eines Punkts der Hyperbel vom Brennpunkt ist der von diesem Punkt parallel zu der Asymptote gezogenen und von der Directrix begrenzten Geraden gleich.

Bei der Parabel haben der Schnittpunkt einer Tangente mit der Hauptaxe und der Berührungspunkt gleichen Abstand vom Brennpunkt.

Der Winkel zwischen zwei Tangenten ist bei der Parabel dem halben Winkel zwischen den beiden nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen gleich.

Bei der Parabel geht der Kreis, welcher dem aus drei Tangenten gebildeten Dreieck umschrieben wird, durch den Brennpunkt.

Die drei Höhen des aus drei Tangenten gebildeten Dreiecks schneiden sich bei der Parabel auf der Directrix.

Die beiden von einem Punkt der Directrix nach der Parabel gezogenen Tangenten stehen senkrecht aufeinander.

Bei der Parabel ist der Parameter eines beliebigen Durchmessers (vergl. § 3) *dem vierfachen Abstand des Endpunkts des Durchmessers vom Brennpunkt gleich.*

Die Polargleichung der Ellipse oder Hyperbel lautet, wenn man einen der Brennpunkte als Pol wählt:

$$\varrho = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e \cos\theta},$$

worin a, b die Halbaxen und e die numerische Excentricität (vergl. S. 91) *bedeuten.*

Die Polargleichung der Parabel ist für den Brennpunkt als Pol

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\theta},$$

worin unter p der Hauptparameter der Parabel verstanden wird.

Wenn $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ *ein Kegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel) ist, so stellt die Gleichung*

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} \pm \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1,$$

in welcher λ ein beliebiger Parameter ist, einen zu dem gegebenen Kegelschnitt confocalen (homofocalen) Kegelschnitt dar, d. h. einen Kegelschnitt mit denselben beiden reellen Brennpunkten.

Die Kegelschnitte, als Schnitte eines Kreiskegels mit einer Ebene, haben schon die alten Griechen, Apollonius, Pappus etc. zum Gegenstand ihrer Forschungen gemacht und fast alle Haupteigenschaften der Brennpunkte, Asymptoten, conjugirten Durchmesser etc. aufgefunden.

Weitere Studien über die Kegelschnitte verdankt man Desargues, B. Pascal, Delahire, Newton, Maclaurin und anderen Mathematikern des 17. und 18. Jahrhunderts; von Desargues und Delahire rührt z. B. die systematische Einführung der Theorie der Pole und Polaren her, von Blaise Pascal die Entdeckung jenes berühmten Theorems (siehe § 2), das von so grosser Bedeutung für die projective Geometrie der Kegelschnitte geworden ist.

Durch die Coordinatenmethode, die Cartesius in seiner *Geometrie* 1637 einführte, wurde man in den Stand gesetzt, diese Curven von einem neuen Gesichtspunkt zu studiren, und durch analytische Formeln die Eigenschaften nachzuweisen, die man bisher auf synthetischem Weg bewiesen hatte.

Wir haben schon am Ende des ersten Kapitels verschiedene Lehrbücher über die Kegelschnitte, welche der einen oder der anderen Methode folgen, citirt; wir führen hier noch an: den ersten Band der *Vorlesungen über Geometrie* von Clebsch, herausgeg. v. Lindemann, Leipzig, 1875 und Steiner, *Vorlesungen über synthetische Geometrie,* 1. Thl. bearb. v. Geiser, 3. Aufl., Leipzig, 1887, 2. Thl. bearb. v. Schroeter, 3. Aufl., ib. 1898. Eingehende historische Nachweise findet man in dem *Aperçu historique* etc. 2. éd., Paris 1875 von Chasles.

Gundelfinger, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte,* 1895 behandelt die Kegelschnitte in homogenen Coordinaten.

§ 6. Kegelschnittbüschel.

Zwei Kegelschnitte schneiden sich in vier (reellen oder imaginären) Punkten und haben vier Tangenten gemeinschaftlich.

Wenn $f=0$, $f'=0$ die Gleichungen der beiden Kegelschnitte in Punkt- oder Geradencoordinaten sind, so stellt die Gleichung

$$f+\lambda f'=0,$$

in welcher λ ein beliebiger constanter Parameter ist, einen Kegelschnitt dar, welcher durch die vier Schnittpunkte der beiden gegebenen geht oder bez. die vier den beiden gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Tangenten berührt.

Wir wollen alle durch die Gleichung $f+\lambda f'=0$ dargestellten Kegelschnitte ein *Büschel* nennen, wenn $f=0$, $f'=0$ Gleichungen in Punktcoordinaten, und eine *Schar,* wenn $f=0$, $f'=0$ Gleichungen in Tangentencoordinaten sind.

Die vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte kann man *Basispunkte des Büschels* nennen.

Unter den Kegelschnitten des Büschels gibt es drei, welche in zwei Gerade zerfallen, unter den Kegelschnitten der Schar dagegen drei, die sich auf ein Punktepaar reduciren.

Das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks, welches zu Ecken die vier Basispunkte des Büschels hat, ist ein sich selbst in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirtes Dreieck.

Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt des Büschels und jede Gerade der Ebene wird von einem Kegelschnitt der Schar berührt.

Jede Gerade der Ebene wird von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt und durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Kegelschnitte der Schar.

Die Schnittpunkte der Kegelschnitte eines Büschels mit einer Geraden bilden auf dieser eine Involution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte derjenigen beiden Kegelschnitte des Büschels sind, welche die Gerade berühren. Der correlative Satz gilt für die Schar.

Der Ort der Centren der Kegelschnitte des Büschels ist ein Kegelschnitt, der durch die 6 Mittelpunkte der Seiten des aus den 4 Basispunkten des Büschels gebildeten Vierecks und durch die drei Diagonalecken geht (der Neunpunktekegelschnitt, vergl. S. 70, 71). *Liegen die 4 Basispunkte auf einem Kreis, so ist der Neunpunktekegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel.*

Wenn

$$f = \sum a_{ik} x_i x_k, \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$
$$f' = \sum b_{ik} x_i x_k, \quad (b_{ik} = b_{ki})$$

ist, *so hat die Discriminante* (vergl. § 3) *eines Kegelschnitts des Büschels $f - \lambda f' = 0$ die Gestalt:*

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31}, & a_{32} - \lambda b_{32}, & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix}.$$

Hat die Gleichung 3^{ten} Grads $\Delta(\lambda) = 0$ eine Doppelwurzel, so fallen zwei der Basispunkte des Büschels zusammen; das Büschel besteht demnach aus Kegelschnitten, die sich in einem Punkt berühren.

Wenn $\Delta(\lambda) = 0$ eine Doppelwurzel hat und alle Minoren 2^{ter} Ordnung der Determinante Δ für diesen Werth von λ verschwinden, so berühren sich alle Kegelschnitte des Büschels und mithin auch die beiden gegebenen in zwei Punkten; die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte heisst die *Doppelgerade des Büschels.*

In diesem Fall gibt es unendlich viele sich selbst in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels conjugirte Dreiecke; alle diese Dreiecke haben eine Seite, nämlich die Doppelgerade, gemeinschaftlich.

Wenn die sämmtlichen drei Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ einander gleich sind, ohne dass für diese Wurzel die Unterdeterminanten 2^{ter} Ordnung von Δ verschwinden, so haben alle Kegelschnitte des Büschels in einem Punkt eine Berührung 2^{ter} Ordnung (d. h. eine dreipunktige Berührung) und ausserdem noch einen anderen Punkt gemeinschaftlich. In diesem Fall gibt es nicht *mehr ein gemeinsames sich selbst conjugirtes Dreieck im eigentlichen Sinn.*

Sind schliesslich alle Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ einander gleich und verschwinden gleichzeitig für diesen Werth von λ die Unterdeterminanten 2ter Ordnung von Δ, so findet zwischen den beiden Kegelschnitten und mithin auch zwischen den Kegelschnitten des Büschels in einem Punkt eine Berührung 3ter Ordnung statt, d. h. die vier Schnittpunkte vereinigen sich in einen einzigen.

In Bezug auf das System zweier Kegelschnitte sind die sogenannten Poncelet'schen Theoreme über die dem einen Kegelschnitt eingeschriebenen und dem anderen umschriebenen Polygone von Interesse:

Man ziehe von einem Punkt A des ersten Kegelschnitts aus eine Tangente an den zweiten Kegelschnitt und verlängere sie, bis sie den ersten Kegelschnitt zum zweiten Mal in dem Punkt B trifft; von B aus lege man wieder eine Tangente an den zweiten Kegelschnitt bis zu ihrem Schnitt C mit dem ersten und fahre so fort. Wenn man nach n solchen Operationen wieder zu dem Ausgangspunkt A zurückkehrt, so ist offenbar ein geschlossenes Polygon von n Seiten entstanden, welches dem ersten Kegelschnitt eingeschrieben und dem zweiten umschrieben ist.

Nun besteht der bemerkenswerthe Satz (von Poncelet):

Wenn man, von einem Punkt A ausgehend, ein geschlossenes Polygon bilden kann, so lässt sich immer von jedem beliebigen anderen Punkt des ersten Kegelschnitts aus ein geschlossenes Polygon herstellen.

Wenn n eine gerade Zahl und A einer der Basispunkte des Büschels der beiden Kegelschnitte ist, so trifft man bei Ausführung der beschriebenen Operation nothwendiger Weise noch einen anderen Basispunkt; ist dagegen n ungerade, so trifft man, von dem Basispunkt A des Büschels ausgehend, auf dem ersten Kegelschnitt den Berührungspunkt einer der beiden Kegelschnitten gemeinsamen Tangenten.

Daraus folgt dann speciell:

Damit ein dem ersten Kegelschnitt eingeschriebenes und dem zweiten umschriebenes Dreieck existire, ist nothwendig und hinreichend, dass die in einem Basispunkt des Büschels an den zweiten Kegelschnitt gelegte Tangente und eine der beiden Kegelschnitten gemeinsamen Tangenten sich auf dem ersten Kegelschnitt treffen.

Soll ein dem ersten Kegelschnitt eingeschriebenes und dem zweiten umschriebenes Vierseit existiren, so ist nöthig und ausreichend, dass die in einem Basispunkt des Büschels an den zweiten Kegelschnitt gelegte Tangente und eine andere eben solche Tangente sich in einem Punkt des ersten Kegelschnitts schneiden.

Die Theorie der sogenannten *Poncelet'schen Polygone* wurde von Poncelet, *Propr. project. des figures*, 1822 eingeführt; später machte Jacobi, *Crelle* 3, eine sehr elegante und werthvolle Anwendung der Lehre von den *elliptischen Funktionen* auf sie: in diesem Sinn beschäftigten sich mit ihr auch Richelot, *Crelle*, 5 und 38, Rosanes und Pasch, *Crelle*, 64 etc.; siehe auch Halphen, *Fonct. ellipt.*, Bd. 2, p. 367, Paris 1888.

§ 7. Die geometrische Interpretation der invarianten Bildungen des Systems einer oder zweier quadratischer ternärer Formen.

Das volle System *einer* quadratischen ternären Form und das *zweier* solcher Formen ist in Bd. 1, Kap. 12, § 16 mitgetheilt worden.

Hier wollen wir die geometrischen Interpretationen dieser Invarianten und Covarianten angeben und benutzen dabei die dort gebrauchten Bezeichnungen.

Das System eines einzigen Kegelschnitts hat keine absoluten Invarianten) und dieser Satz bedeutet geometrisch, dass jeder Kegelschnitt durch Transformation sich in jeden anderen verwandeln lässt.*

Wenn f, f' die beiden Kegelschnitte sind, so ist das Product der vier Schnittpunkte von f und f' durch

$$FF' - F_{12}^2 = 0$$

gegeben und correlativ das Product der vier den beiden Kegelschnitten gemeinschaftlichen Tangenten durch

$$f \cdot f' - \Phi_{12}^2 = 0.$$

Die Gleichung $\Phi_{12} = 0$ stellt den Ort der Punkte dar, durch die zwei Paare von Tangenten an f und f' gehen, welche ein harmonisches System bilden; dual ist $F_{12} = 0$ die Enveloppe der

*) Zwischen dieser Behauptung und derjenigen in § 3 besteht kein Widerspruch; siehe die Fussnote zu § 3, S. 81.

Geraden, welche die beiden Kegelschnitte in vier harmonischen Punkten schneiden.

Wenn $A_{122} = 0$ ist, so gibt es eine einfach unendliche Anzahl (sich selbst conjugirter) Polardreiecke in Bezug auf f, welche dem Kegelschnitt f' umschrieben, und unendlich viele Polardreiecke in Bezug auf f', die f eingeschrieben sind. Die analoge Eigenschaft besteht für $A_{112} = 0$. Ueber Dreiecke dieser Art siehe: Smith, *Proc. Lond. math. Soc.*, 2, p. 94; Rosanes, *Math. Ann.*, 6; Darboux, *Bull. des sciences math.*, 1, p. 348.

Die Gleichung $N = 0$ stellt, auf die Coordinaten u bezogen, den Schnittpunkt der Polaren des Punktes (x) in Bezug auf die beiden Kegelschnitte dar.

$B_1 = 0$ ist, auf die Coordinaten x bezogen, die Gleichung einer Geraden, auf welcher alle Punkte liegen, deren Polaren bez. des Kegelschnitts f' der Geraden u in Bezug auf den Kegelschnitt f harmonisch conjugirt sind.

Die Gleichung $D = 0$ stellt die drei Seiten des f und f' gemeinschaftlichen Polardreiecks dar und $\Delta = 0$ die drei Ecken dieses Dreiecks.

Alle covarianten Kegelschnitte von f und f' (z. B. $\Phi_{12} = 0$) haben dasselbe Polardreieck $D = 0$ oder $\Delta = 0$ gemeinschaftlich.

Wenn die Invarianten A_{112} und A_{122} gleichzeitig verschwinden, so ist das anharmonische Verhältniss der vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte auf jedem der beiden äquianharmonisch.

Die Bedingung, unter welcher zwischen den beiden Kegelschnitten eine einfache Berührung stattfindet, ist

$$4(A_{111}A_{122} - A_{112}^2)(A_{112}A_{222} - A_{122}^2) - (A_{111}A_{222} - A_{112}A_{122})^2 = 0.$$

Soll zwischen den zwei Kegelschnitten in einem Punkt eine Berührung 2^{ter} Ordnung stattfinden, sollen also drei Schnittpunkte dort vereinigt sein, so muss

$$\frac{A_{111}}{A_{112}} = \frac{A_{112}}{A_{122}} = \frac{A_{122}}{A_{222}} \quad \textit{sein.}$$

Das System zweier Kegelschnitte hat zwei absolute Invarianten.

Zu solchen kann man als die einfachsten, wie schon in Bd. 1, p. 335 gesagt wurde,

$$A_1 = \frac{A_{112}^2}{A_{111}\,A_{122}},$$
$$A_2 = \frac{A_{122}^2}{A_{112}\,A_{222}} \quad \textit{wählen.}$$

Wichtig ist das folgende Theorem:

Das anharmonische Verhältniss α *der Geraden, welche einen Punkt von* f *mit den vier Schnittpunkten von* f *und* f' *verbinden, ist durch die Formel*

$$\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2} = \frac{(A_1-1)^3 A_1 A_2^2}{(3A_1A_2-2A_1^2A_2-1)^2}$$

gegeben und das anharmonische Verhältniss der vier Strahlen, welche einen Punkt von f' *mit den vier Schnittpunkten verbinden, durch eine analoge Formel.*

Literaturangaben in Bezug auf das System zweier oder mehrerer Kegelschnitte findet man in Bd. 1, Kap. 12, § 16.

Kapitel IV.

Die Flächen 2^{ter} Ordnung.

§ 1. Die projective Erzeugung der Flächen 2^{ter} Ordnung. Polarität.

Denken wir uns zwei Bündel, welche verschiedene Träger S, S' haben, und *correlativ* sind (vergl. Kap. 1, § 3); jedem Strahl des einen entspricht eine Ebene des zweiten und umgekehrt, und wenn sich der erste Strahl in einer Ebene bewegt, so dreht sich die entsprechende Ebene um eine Gerade. Die Schnittpunkte der Strahlen eines jeden Bündels mit den entsprechenden Ebenen des anderen bilden denselben Ort und dieser Ort ist eine sogenannte *Fläche 2^{ter} Ordnung.*

Es seien zwei ebene correlative, nicht conlocale Systeme gegeben. Die Ebenen, welche die Punkte des einen mit den entsprechenden Geraden des andern verbinden, *hüllen dieselbe Fläche ein* und diese ist wieder eine *Fläche 2^{ter} Ordnung.*

Diese projective Erzeugung der Flächen 2^{ter} Ordnung wird von Seydewitz, *Grunert's Arch.*, 9, 1847 und Steiner, *Werke*, 1, p. 325 behandelt. Siehe auch Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. d. Raum.*, 1, p. 333.

Eine andere Definition ist die folgende:

Die Fläche 2^{ter} Ordnung ist der Ort der Doppelpunkte einer involutorischen Raumdualität, d. h. einer Raumpolarität.

Oder auch:

Die Fläche 2^{ter} Ordnung ist die Enveloppe der Doppelebenen einer Raumpolarität.

Zwei beliebige Punkte der Fläche 2^{ter} Ordnung sind die Mittelpunkte zweier reciproker Bündel, durch welche sich die Fläche erzeugen lässt, und zwei beliebige Berührungsebenen an die Fläche 2^{ter} Ordnung sind die Träger zweier reciproker ebener Systeme, die zur Erzeugung der Fläche dienen können.

Eine willkürliche Gerade des Raums, welche nicht vollständig in der Fläche 2ter Ordnung liegt, trifft sie in höchstens zwei Punkten, und durch eine Gerade des Raums, die nicht in der Fläche gelegen ist, gehen höchstens zwei Berührungsebenen an die Fläche. Daher sagt man, die Fläche sei 2ter Ordnung und 2ter Classe.

Wenn durch einen Punkt der Fläche zwei verschiedene oder zusammenfallende Gerade der Fläche gehen oder auch keine, so gilt dasselbe auch für jeden anderen Punkt der Fläche.

Wenn es in einer Berührungsebene an die Fläche 2ter Ordnung zwei Gerade oder eine Gerade oder keine gibt, die der Fläche selbst angehört, so gilt dasselbe auch für jede andere Berührungsebene.

Jede Ebene schneidet die Fläche längs eines Kegelschnitts. Eine Ebene, welche die Fläche berührt, schneidet sie entweder in zwei reellen Geraden, die verschieden sind, oder zusammenfallen, oder in zwei imaginären Geraden.

Je nachdem durch jeden Punkt der Fläche 2ter Ordnung *zwei* reelle der Fläche angehörige Gerade oder eine einzige reelle Gerade oder zwei imaginäre Gerade gehen, heisst sie *eine Regelfläche 2ter Ordnung,* auch *windschiefe* oder *Fläche 2ter Ordnung mit hyperbolischen Punkten* genannt, ein *Kegel 2ter Ordnung,* der auch *Fläche 2ter Ordnung mit parabolischen Punkten* heisst, oder eine *Fläche 2ter Ordnung mit elliptischen Punkten.*

Wenn die Regelfläche 2ter Ordnung von der unendlich fernen Ebene in dem System zweier Geraden geschnitten (von der unendlich fernen Ebene berührt) wird, so ist sie ein *hyperbolisches Paraboloid;* wird sie in einem eigentlichen Kegelschnitt von ihr geschnitten, so ist sie ein *einfaches* oder *einschaliges Hyperboloid* (mit einer Mantelfläche).

Die Regelflächen 2ter Ordnung enthalten zwei Systeme reeller Geraden; die Geraden des einen Systems werden von denen des anderen in projectiven Punktreihen geschnitten. Daraus ergibt sich die Erzeugung dieser Flächen 2ter Ordnung mittelst zweier nicht in derselben Ebene liegender projectiver Punktreihen.

Das hyperbolische Paraboloid ist der Ort der Geraden, welche die Paare sich entsprechender Punkte in zwei ähnlichen, nicht in derselben Ebene liegenden Punktreihen verbinden.

Das hyperbolische Paraboloid ist auf zwei verschiedene Arten der Ort einer Geraden, welche sich so bewegt, dass sie auf zwei festen nicht in derselben Ebene gelegenen Geraden gleitet *und einer festen Ebene parallel bleibt, welche die Directrix (die Leitebene) der Fläche genannt wird.*

Es gibt zwei solche Leitebenen.

Das einschalige Hyperboloid ist der Ort einer Geraden, die sich so bewegt, dass sie auf drei festen sich nicht schneidenden Geraden gleitet, die nicht derselben Ebene parallel sind.

Aehnlich unterscheiden sich die Flächen 2ter Ordnung mit elliptischen Punkten nach der Art, wie sie von der unendlich fernen Ebene des Raums geschnitten werden. Sie können von dieser Ebene in einem reellen Kegelschnitt geschnitten werden, alsdann ergibt sich das *zweifache* oder *zweischalige Hyperboloid* (mit zwei Mantelflächen), oder in einem imaginären Kegelschnitt, in diesem Fall erhält man das *Ellipsoid;* werden sie schliesslich von der unendlich fernen Ebene *berührt,* d. h. in einem in zwei Gerade degenerirten Kegelschnitt getroffen, so hat man das *elliptische Paraboloid.*

Die Geraden eines Kegels 2ter Ordnung heissen *Erzeugende;* sie gehen sämmtlich durch denselben Punkt, der *Mittelpunkt* oder *Spitze* genannt wird. Mit Ausnahme dieses Punkts, in welchem sich also unendlich viele Gerade der Fläche schneiden, geht durch jeden der übrigen Punkte der Fläche immer nur *eine* Gerade dieser Fläche. Wenn die Spitze unendlich fern liegt, so ist die Fläche ein *Cylinder;* der Schnitt des Cylinders mit einer zu den Erzeugenden senkrechten Ebene heisst die *Basis des Cylinders.*

Die von einem Punkt P aus an eine Fläche 2ter Ordnung gelegten Berührungsebenen sind die Tangentialebenen eines Kegels 2ter Ordnung, dessen Spitze in P liegt und dessen Erzeugende die Geraden sind, welche P mit den Berührungspunkten der Tangentialebenen verbinden. Dieser Kegel heisst der *Tangenten-* oder *Berührungskegel der Fläche 2ter Ordnung; er berührt die Fläche längs einer ebenen Curve, welche mithin ein Kegelschnitt ist.* Die Ebene dieses Kegelschnitts heisst die *Polarebene* von P und P seinerseits der *Pol* dieser Ebene.

Die Zuordnung zwischen Polen und Polarebenen bez. der Fläche zweiter Ordnung ist eine involutorische Dualität. Vergl. Kap. 1, § 4.

Die Polarebene enthält die Polargeraden von P in Bezug auf alle Kegelschnitte, in welchen die durch P gelegten Ebenen die Fläche 2ter Ordnung schneiden.

Jede durch P gezogene Gerade schneidet die Fläche 2ter Ordnung in zwei Punkten Q, Q' und die Polarebene in einem Punkt P' derart, dass die Gruppe $PP'QQ'$ harmonisch ist.

Wenn sich P auf einer Geraden bewegt, so rotirt die Polarebene um eine andere Gerade, und wenn P sich in einer Ebene bewegt, so dreht sich die Polarebene um einen Punkt, welcher der Pol dieser Ebene ist.

Zwei Gerade heissen *reciprok polar*, wenn die Polarebenen aller Punkte der einen durch die andere gehen.

Wenn zwei reciprok polare Gerade sich schneiden, so gehört ihr Schnittpunkt der Fläche an und ihre Ebene berührt die Fläche.

Die Paare von reciprok polaren Geraden, welche in einer Berührungsebene liegen, sind in einer Involution conjugirt, deren Doppelgeraden die Geraden sind, längs welchen die Berührungsebene die Fläche schneidet.

Wenn zwei Gerade sich schneiden, so treffen sich auch ihre reciproken Polaren.

Conjugirt heissen:

zwei Punkte, wenn der eine in der Polarebene des anderen liegt;

ein Punkt und eine Gerade, wenn die Gerade in der Polarebene des Punkts liegt;

eine Ebene und eine Gerade, wenn die Gerade durch den Pol der Ebene geht;

zwei Gerade, wenn die eine in der Polarebene eines Punkts der anderen liegt;

zwei Ebenen, wenn die eine durch den Pol der anderen geht.

Conjugirt in Bezug auf eine Fläche 2ter Ordnung ist *ein Dreieck*, von welchem jede Ecke die beiden anderen zu conjugirten Punkten und mithin die gegenüberliegende Seite zur conjugirten Geraden hat.

Ein *Tetraeder* ist *Polartetraeder* (oder auch *sich selbst conjugirt, reciprok*) in Bezug auf die Fläche 2ter Ordnung, wenn jede seiner Ecken die übrigen drei zu conjugirten Punkten und mithin die gegenüberliegende Seitenfläche zur Polarebene hat.

Jedes Dreieck eines Polartetraeders ist ein conjugirtes Dreieck.

Je zwei Gegenkanten eines Polartetraeders sind reciprok polar in Bezug auf die Fläche 2ter Ordnung.

Wenn zwei Gerade conjugirt sind, so schneidet die reciproke Polare der einen die andere und umgekehrt.

Ist eine Gerade zwei anderen, die sich schneiden, conjugirt, so ist sie auch der Ebene und dem Schnittpunkt dieser Geraden conjugirt.

Der Pol der unendlich fernen Ebene heisst der *Mittelpunkt* der Fläche 2[ter] Ordnung, jede durch das Centrum gehende Gerade *Durchmesser* und jede Ebene durch dieses Centrum *Diametralebene.*

Der Mittelpunkt liegt in endlicher Entfernung, wenn die unendlich ferne Ebene die Fläche 2[ter] Ordnung nicht berührt, also bei dem einschaligen und zweischaligen Hyperboloid, dem Ellipsoid und dem Kegel 2[ter] Ordnung; diese Flächen heissen daher *Mittelpunktsflächen (centrale Flächen) 2[ter] Ordnung.*

Das hyperbolische und elliptische Paraboloid sind Flächen 2[ter] Ordnung ohne Mittelpunkt im Endlichen (nicht centrale Flächen).

Jede Diametralebene schneidet die Fläche in einem Kegelschnitt, dessen Centrum mit dem der Fläche zusammenfällt.

Die Durchmesser werden durch das Centrum halbirt.

Wenn sich drei Sehnen in einem Punkt halbiren und nicht in derselben Ebene liegen, so ist dieser Punkt das Centrum der Fläche 2[ter] Ordnung.

Jede Diametralebene ist der Ort der Mittelpunkte aller (parallelen) mit ihr conjugirten Sehnen.

Die Berührungspunkte der von dem Centrum an die Fläche 2[ter] Ordnung gelegten Tangentialebenen liegen unendlich fern (und sind reell oder imaginär); der Berührungskegel, der das Centrum zu Spitze hat, heisst daher *Asymptotenkegel.*

Es gibt drei Durchmesser, die zu je zweien senkrecht aufeinander stehen, und so beschaffen sind, dass die durch zwei von ihnen gehende Ebene die dem dritten Durchmesser parallelen und mithin auf dieser Ebene senkrechten Sehnen zu conjugirten Geraden hat. Sie heissen *Axen* oder *Hauptdurchmesser* und ihre Ebenen *Hauptebenen.*

Die Hauptebenen sind für die Fläche 2[ter] Ordnung Symmetrieebenen.

Bei dem Ellipsoid schneidet jede Diametralebene die Fläche in einer Ellipse; bei dem einschaligen Hyperboloid schneiden zwei Hauptebenen die Fläche in zwei Hyperbeln, welche die imaginäre Axe gemeinschaftlich haben, und die dritte Hauptebene schneidet die Fläche längs einer Ellipse; bei dem zweischaligen Hyperboloid schneiden zwei Hauptebenen die Fläche in zwei Hyperbeln, welche die reelle Axe gemeinschaftlich haben und die dritte Ebene schneidet sie in einer imaginären Ellipse.

Bei einem Paraboloid heisst jede Gerade, die durch den Berührungspunkt der Fläche mit der unendlich fernen Ebene geht, *Durchmesser.*

Alle Durchmesser eines Paraboloids sind einander parallel.

Unter den Durchmessern eines Paraboloids gibt es einen, auf welchem die Berührungsebene in seinem Schnittpunkt mit der Fläche senkrecht steht. Dieser Durchmesser heisst *Axe* und der Punkt, in welchem er die Fläche trifft, *Scheitel.*

Die Schnitte des (elliptischen oder hyperbolischen) Paraboloids mit Ebenen, die der Axe parallel laufen, sind Parabeln.

Die Schnitte des Paraboloids mit Ebenen, die senkrecht auf der Axe stehen, sind bei dem hyperbolischen Paraboloid Hyperbeln und bei dem elliptischen Ellipsen.

Die *Kugel* ist ein Ellipsoid, bei welchem jede Diametralebene senkrecht auf dem Durchmesser steht, der durch den Pol dieser Ebene geht.

Die Kugeln des Raums haben einen imaginären unendlich fernen Kreis gemeinschaftlich. Dieser Kreis heisst der *unendlich ferne imaginäre Kugelkreis* oder der *absolute* oder *Grenzkreis des Raums. Er enthält alle unendlich fernen imaginären Kreispunkte jeder Ebene des Raums.* Vergl. Kap. 3, § 3.

Chasles und P. Serret haben versucht, die Theoreme Pascal's und Brianchon's auf die Flächen 2^{ter} Ordnung auszudehnen; man vergleiche darüber Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. d. Raumes,* 1, Art. 144; Klein, *Math. Ann.* 22, 1883, p. 246.

§ 2. Die wichtigsten Formeln der analytischen Geometrie der Flächen 2^{ter} Ordnung.

Die *Fläche 2^{ter} O.* ist der Ort der Punkte, für die eine ganze rationale Funktion 2^{ten} Grads zwischen den drei Cartesischen Coordinaten eines Punkts des Raums verschwindet. Die allgemeine Gleichung einer solchen Fläche enthält 10 Coefficienten, nämlich die drei Coefficienten der Quadrate der drei Coordinaten, die drei, welche zu den Producten von je zweien der drei Coordinaten gehören, die drei der Glieder 1^{ten} Grads und schliesslich das von den Coordinaten unabhängige Glied. Der Ort hängt nur von den neun Verhältnissen von neun dieser Coefficienten zum letzten ab; man sagt daher, der Ort 2^{ten} Grads werde von nur *neun* nicht homogenen Coefficienten bestimmt.

Wenn wir die *homogenen* Coordinaten eines Punkts des Raums x_1, x_2, x_3, x_4 nennen, so erhält die Gleichung der Fläche 2^{ter} Ordnung die Gestalt:

$$f(x) = \sum_{i,j}^{1\dots 4} a_{ij} x_i x_j = 0\,, \quad (a_{ij} = a_{ji})\,,$$

worin sich die Summirung über alle möglichen Combinationen $i, j = 1, 2, 3, 4$ mit der Bedingung $a_{ij} = a_{ji}$ erstreckt. Setzt man $x_4 = 1$, so kommt man auf die Gleichung der Fläche 2^{ter} Ordnung *in nicht homogenen Coordinaten* zurück.

Wenn das Fundamentaltetraeder der Coordinaten sich selbst in Bezug auf die Fläche 2^{ter} Ordnung conjugirt ist (vergl. § 1), so reducirt sich die Gleichung auf die canonische Form

$$\sum_1^4 a_{ii} x_i^2 = 0 .$$

Es sei A die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{14} \\ a_{21}, & \ldots, & a_{24} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41}, & \ldots, & a_{44} \end{vmatrix} \quad \textit{(die Discriminante)}$$

und A_{ij} die algebraische Adjungirte von a_{ij} in A.

Bezeichnet man ferner die homogenen Coordinaten einer Ebene mit u_1, u_2, u_3, u_4, d. h. gibt man der Gleichung der Ebene die Form

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 ,$$

so lautet die Gleichung der Fläche 2^{ter} Ordnung in Ebenencoordinaten, falls A von Null verschieden ist:

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_{i,j}^{1\ldots 4} A_{ij} u_i u_j = 0, \; (A_{ij} = A_{ji}) .$$

Diese Gleichung stellt mithin die Fläche 2^{ter} Ordnung nicht als Ort von Punkten, sondern als Enveloppe von Berührungsebenen dar. Man kann sie auch als Bedingungsgleichung ansehen, der die Coefficienten der Gleichung einer Ebene genügen müssen, wenn diese Ebene die durch die ursprüngliche Gleichung gegebene Fläche 2^{ter} Ordnung berühren soll.

Eine Fläche 2^{ter} Ordnung ist bestimmt, wenn 9 Punkte gegeben sind, durch die sie gehen, oder 9 Ebenen, die sie berühren soll.

In dem vorigen Paragraphen haben wir die geometrischen Eigenschaften der verschiedenen Arten von Flächen 2^{ter} Ordnung zusammengestellt; wir wollen jetzt zusehen, wie sich aus der allgemeinen Gleichung (deren Coefficienten als reell vorausgesetzt werden) die Unterschiede zwischen den verschiedenen Flächen ableiten lassen.

Wir setzen

$$B = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

und nennen B_{ij} die algebraischen Adjungirten der Elemente a_{ij} in der Determinante B, die also identisch mit A_{44} ist.

Wenn B nicht Null ist, so sind die Flächen 2ter Ordnung central, ist $B = 0$, so sind sie Paraboloide.

Für $A = 0$ und nur für diesen Fall, erhält man die Kegel; ist gleichzeitig $A = 0$ und $B = 0$, die Cylinder.

Wir wollen mit (12), (13), ... die Winkel zwischen den Coordinatenaxen x_1, x_2; x_1, x_3; ... bezeichnen, und es sei

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 \quad\quad , & \cos(12), & \cos(13) \\ \cos(12), & 1 \quad\quad , & \cos(23) \\ \cos(13), & \cos(23), & 1 \end{vmatrix},$$

(eine positive zwischen 0 und 1 liegende Grösse). Es seien ferner $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \ldots$ die algebraischen Adjungirten der Elemente von Ω.

Setzt man dann

$$C = B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2B_{12}\cos(12) + 2B_{13}\cos(13) + \\ + 2B_{23}\cos(23),$$

$$D = a_{11}\Omega_{11} + a_{22}\Omega_{22} + a_{33}\Omega_{33} + 2a_{12}\Omega_{12} + 2a_{13}\Omega_{13} + \\ + 2a_{23}\Omega_{23},$$

so gelten die Sätze:

Die Verhältnisse $\frac{A}{\Omega}, \frac{B}{\Omega}, \frac{C}{\Omega}, \frac{D}{\Omega}$ ändern sich bei einer Transformation der Cartesischen Coordinaten nicht (sind invariant).

Das Vorzeichen der Grössen A, B, C, D ist von dem System der Cartesischen Coordinaten, das man gewählt hat, unabhängig.

Bei rechtwinkligen Axen werden die Grössen C, D:

$$C = B_{11} + B_{22} + B_{33},$$
$$D = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

und Ω wird 1. Man hat daher:

Die Grössen $a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $B_{11} + B_{22} + B_{33}$ bleiben ihrem Werth nach unverändert, wenn man von rechtwinkligen Coordinaten zu anderen ebenfalls rechtwinkligen übergeht.

Alle Wurzeln der Gleichung

$$\Delta(\varrho) = \Omega\varrho^3 + D\varrho^2 + C\varrho + B = 0$$

sind reell und im Allgemeinen verschieden.

Die vorstehende Gleichung lässt sich auch schreiben

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} + \varrho, & a_{12} + \varrho\cos(12), & a_{13} + \varrho\cos(13) \\ a_{21} + \varrho\cos(12), & a_{22} + \varrho, & a_{23} + \varrho\cos(23) \\ a_{31} + \varrho\cos(13), & a_{32} + \varrho\cos(23), & a_{33} + \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Die Classification der Flächen 2[ter] Ordnung hängt von dem Vorzeichen der Grössen A, B, C, D ab.

I. *B ist von Null verschieden. Man erhält die Mittelpunktsflächen:*

1. *Das reelle Ellipsoid für* $C > 0,\ BD > 0,\ A < 0,$
2. *das imaginäre Ellipsoid für* $C > 0,\ BD > 0,\ A > 0,$
3. *den imaginären Kegel für* $C > 0,\ BD > 0,\ A = 0,$
4. *den reellen Kegel für* $\left.\begin{matrix} C \gtreqless 0,\ BD < 0, \\ C < 0,\ BD \geqq 0, \end{matrix}\right\} A > 0,$
5. *das einschalige Hyperboloid für* $\left.\begin{matrix} C \gtreqless 0,\ BD < 0, \\ C < 0,\ BD \geqq 0, \end{matrix}\right\} A > 0,$
6. *das doppelschalige Hyperboloid für* $\left.\begin{matrix} C \gtreqless 0,\ BD < 0, \\ C < 0,\ BD \geqq 0, \end{matrix}\right\} A < 0.$

II. *B ist gleich Null. Man erhält die Paraboloide, Cylinder oder Ebenenpaare:*

7. *Das elliptische Paraboloid für*

$$C > 0,\ D \lessgtr 0,\ A < 0,$$

8. *das hyperbolische Paraboloid für*

$$C < 0,\ D \gtreqless 0,\ A > 0,$$

9. *den Cylinder mit elliptischer Basis für*

$$C > 0,\ D \gtrless 0,\ A = 0,$$

10. *den Cylinder mit hyperbolischer Basis für*

$$C < 0,\ D \gtreqless 0,\ A = 0,$$

11. *den Cylinder mit parabolischer Basis für*

$$C = 0,\ D \gtrless 0,\ A = 0.$$

12. *zwei imaginäre Ebenen mit einer reellen Graden in endlicher Entfernung für*

$$C > 0,\ D \gtrless 0,\ A = 0,\ A_{ii} = 0,\ (i = 1, 2, 3),$$

13. *zwei reelle Ebenen, die sich in einer Geraden in endlicher Entfernung schneiden für*

$$C < 0,\ D \gtreqqless 0,\ A = 0,\ A_{ii} = 0,$$

14. *zwei parallele Ebenen, die entweder reell und verschieden oder imaginär sind oder zusammenfallen, für*

$$C = 0,\ D \gtrless 0,\ A = 0,\ A_{ii} = 0.$$

Durch Transformation der Cartesischen Coordinaten lassen sich die Gleichungen der verschiedenen Arten von Flächen 2ter Ordnung auf die folgenden reducirten Formen (in nicht homogenen Coordinaten) bringen:

1. *Das reelle Ellipsoid auf:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$
2. *das imaginäre Ellipsoid:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$
3. *der imaginäre Kegel:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$
4. *der reelle Kegel:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$
5. *das einschalige Hyperboloid:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$
6. *das zweischalige Hyperboloid:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$
7. *das elliptische Paraboloid:* $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0,$
8. *das hyperbolische Paraboloid:* $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - x = 0,$
9. *der elliptische Cylinder:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$
10. *der hyperbolische Cylinder:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$
11. *der parabolische Cylinder:* $y^2 \pm 2px = 0,$
12. *zwei imaginäre Ebenen:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$
13. *zwei reelle Ebenen:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$
14. *zwei parallele Ebenen:* $\frac{x^2}{a^2} \mp 1 = 0.$

In der Gleichung eines jeden Paraboloids bilden die Glieder 2^{ten} Grads in x_1, x_2, x_3 (oder x, y, z) das Product zweier linearer Factoren; diese Eigenschaft ist für das Paraboloid charakteristisch.

In der Gleichung des parabolischen Cylinders bilden die Glieder 2^{ten} Grads in x_1, x_2, x_3 (oder x, y, z) ein vollständiges Quadrat.

Bezeichnet man mit (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) die Coordinaten zweier Punkte des Raums, *so ist die Bedingung, damit die Gerade, welche sie verbindet, die Fläche 2^{ter} Ordnung $f=0$ berühre,*

$$(1)\qquad f(x)f(y) - f^2\binom{x}{y} = 0, \quad \textit{wenn}$$

$$\begin{aligned} f\binom{x}{y} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}y_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4}y_4\right) = \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 + a_{44}x_4y_4 + \\ &+ a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + a_{14}(x_1y_4 + x_4y_1) + \\ &+ a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2) + a_{24}(x_2y_4 + x_4y_2) + a_{34}(x_3y_4 + x_4y_3) \end{aligned}$$

gesetzt wird.

Denkt man sich, y sei ein fester Punkt und die x seien laufende Coordinaten, so stellt die Gleichung (1) den der Fläche 2^{ter} Ordnung umschriebenen Kegel dar, dessen Spitze der Punkt y ist.

Wenn $F(u) = 0$ die Gleichung der Fläche 2^{ter} Ordnung in Ebenencoordinaten ist, so besteht die Bedingung, damit die Gerade, in welcher sich die Ebenen (u_1, u_2, u_3, u_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) schneiden, die Fläche berühre, darin, dass

$$F(u)F(v) - F^2\binom{u}{v} = 0 \quad \textit{sei.}$$

Diese Bedingung ist äquivalent mit

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & u_1, & v_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & u_2, & v_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & u_3, & v_3 \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & u_4, & v_4 \\ u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & 0, & 0 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung die a mit A und die u, v mit x, y, so ergiebt sich eine andere Form für die Bedingung, unter welcher die Gerade $(x)(y)$ die Fläche berührt.

Die Polarebene eines Punktes (y) hat die Gleichung

$$f\binom{x}{..} = 0,$$

und die Coordinaten des Pols einer Ebene

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots = 0$$

sind:

$$\begin{aligned}
A x_1 &= A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + A_{13} u_3 + A_{14} u_4, \\
A x_2 &= A_{21} u_1 + A_{22} u_2 + A_{23} u_3 + A_{24} u_4, \\
A x_3 &= A_{31} u_1 + A_{32} u_2 + A_{33} u_3 + A_{34} u_4, \\
A x_4 &= A_{41} u_1 + A_{42} u_2 + A_{43} u_3 + A_{44} u_4.
\end{aligned}$$

Zu jeder Ebene gehört bez. einer Fläche 2[ter] Ordnung ein einziger Pol; eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn $A = 0$ ist, also eine Kegelfläche oder deren Ausartungen vorliegen.

Wenn der Punkt (y) der Fläche 2[ter] Ordnung angehört, so stellt die Gleichung

$$f\binom{x}{y} = 0$$

die Berührungsebene dar.

Die Bedingung, unter welcher zwei Punkte (x), (y) conjugirt sind, ist selbstverständlich ebenfalls $f\binom{x}{y} = 0$, und die Bedingung, unter welcher zwei Ebenen (u), (v) conjugirt sind, ist $F\binom{u}{v} = 0$.

Diese beiden Bedingungen lassen sich auch ausdrücken:

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & \ldots, & A_{14}, & x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{41}, & \ldots, & A_{44}, & x_4 \\ y_1, & \ldots, & y_4, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{14}, & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41}, & \ldots, & a_{44}, & u_4 \\ v_1, & \ldots, & v_4, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sollen zwei Gerade (u, v), (u', v') conjugirt sein, so bestehen dafür die vier Bedingungen:

$$F\binom{u}{v} = 0, \quad F\binom{u}{v'} = 0, \quad F\binom{u'}{v} = 0, \quad F\binom{u'}{v'} = 0.$$

Die Gleichung, welche die beiden Berührungsebenen darstellt, die durch eine Gerade (u, v) an eine Fläche 2[ter] Ordnung gelegt werden können, lautet:

$$F(u)(v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots)^2 -$$
$$- 2 F\binom{u}{v}(v_1 x_1 + \cdots)(u_1 x_1 + \cdots) + F(v)(u_1 x_1 + \cdots)^2 = 0.$$

Vertauscht man F mit f und x mit u, sowie y mit v, so ergiebt sich correlativ die Gleichung (in Ebenencoordinaten) der beiden Schnittpunkte der Geraden (x, y) mit der Fläche 2^{ter} Ordnung.

Die Coordinaten dieser Schnittpunkte der Geraden (x, y) mit der Fläche 2^{ter} Ordnung haben die Form

$$\frac{m x_i + n y_i}{m + n},$$

worin $\frac{m}{n}$ den Werth einer jeden der beiden Wurzeln der Gleichung

$$f(x)\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2f\binom{x}{y}\frac{m}{n} + f(y) = 0 \quad \textit{annimmt.}$$

Die Gleichung einer beliebigen Diametralebene hat die Gestalt

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

worin α_1, α_2, α_3 drei willkürliche Constante sind. Jede Gerade, welche durch den unendlich fernen Punkt mit den Coordinaten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0)$ geht, bestimmt die Richtung, die der vorstehenden Diametralebene conjugirt ist.

Die den Richtungen einer jeden der drei Coordinatenaxen x_1, x_2, x_3 conjugirten Diametralebenen sind durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \quad \textit{gegeben.}$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts der Fläche 2^{ter} Ordnung sind

$$\frac{A_{14}}{B}, \quad \frac{A_{24}}{B}, \quad \frac{A_{34}}{B}.$$

Die Gleichung des Asymptotenkegels lautet

$$f(x) - \frac{A}{B} x_4^2 = 0,$$

welche man aus $f(x) = 0$ einfach dadurch erhält, dass man a_{44} in $a_{44} - \frac{A}{B}$ umändert.

Die *Hauptebenen* sind Diametralebenen, die senkrecht auf der zu ihnen conjugirten Richtung stehen; die Geraden, in welchen sie sich [illegible] sind die *Hauptdurchmesser oder Axen.*

Um die drei Hauptebenen zu erhalten, hat man nur in der Gleichung

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

an die Stelle von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Werthe zu setzen, die den Quadratwurzeln aus den drei Hauptminoren der Determinante $\Delta(\varrho)$ (siehe oben) proportional sind, wenn man für ϱ eine jede der drei (reellen) Wurzeln der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ einsetzt.

Die Formeln gestalten sich natürlich viel einfacher, wenn die Coordinatenaxen senkrecht aufeinander stehen.

Ist eine Axe der Fläche derart, dass alle durch sie gehenden Ebenen Hauptebenen sind, so ist die Fläche eine *Rotationsfläche 2ter Ordnung.* Die *Kugel* ist eine Fläche 2ter Ordnung, bei welcher jede Diametralebene eine Hauptebene ist.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit eine Fläche 2ter Ordnung eine Rotationsfläche sei, besteht darin, dass $\Delta(\varrho) = 0$ zwei gleiche Wurzeln habe. Dabei dürfen diese Wurzeln nicht beide Null sein, weil sonst die Fläche ein parabolischer Cylinder ist.

Soll eine Fläche 2ter Ordnung eine Kugel sein, so ist es nothwendig und ausreichend, dass $\Delta(\varrho) = 0$ eine dreifache Wurzel habe.

In orthogonalen Coordinaten werden die Bedingungen, unter denen die Fläche eine Rotationsfläche ist, durch zwei der Relationen

$$\frac{B_{23}}{a_{23}} = \frac{B_{31}}{a_{31}} = \frac{B_{12}}{a_{12}} = \frac{B_{22} - B_{33}}{a_{22} - a_{33}} = \frac{B_{33} - B_{11}}{a_{33} - a_{11}} = \frac{B_{11} - B_{22}}{a_{11} - a_{22}}$$

angegeben.

Die Bedingungen für die Kugel sind in rechtwinkligen Coordinaten

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0.$$

Bei dem Paraboloid gibt es nur zwei Hauptebenen in endlicher Entfernung, welche die Fläche in zwei Parabeln schneiden.

In orthogonalen Coordinaten sind die Gleichungen der Axe des Paraboloids (der Schnittlinie der beiden Hauptebenen):

$$\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}}{\sqrt{B_{11}}} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}}{\sqrt{B_{22}}} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_3}}{\sqrt{B_{33}}}.$$

Die Gleichung einer Mittelpunktsfläche 2ter Ordnung hat, auf den Mittelpunkt bezogen, in nicht homogenen Coordinaten x, y, z den Typus:

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{13}xz + 2a'_{23}yz + \frac{A}{B} = 0.$$

Die Gleichung einer Mittelpunktsfläche, auf ein Tripel conjugirter Durchmesser bezogen, ist:

$$a''_{11}x^2 + a''_{22}y^2 + a''_{33}z^2 + \frac{A}{B} = 0.$$

Wenn diese conjugirten Durchmesser die drei Axen sind, so heissen die Grössen

$$\sqrt{-\frac{A}{Ba''_{11}}}, \quad \sqrt{-\frac{A}{Ba''_{22}}}, \quad \sqrt{-\frac{A}{Ba''_{33}}}$$

die *Längen der Halbaxen der Fläche 2ter Ordnung.*

Man erhält sie, wenn an die Stelle von

$$-a''_{11}, \quad -a''_{22}, \quad -a''_{33}$$

die drei (reellen) Wurzeln von $\Delta(\varrho) = 0$ gesetzt werden; siehe oben.

Bei dem reellen Ellipsoid schneiden die drei Axen die Fläche in reellen Punkten und die Abstände des Mittelpunkts von diesen Schnittpunkten sind die Halbaxen des Ellipsoids. Bei einem beliebigen Ellipsoid sind die drei Halbaxen ungleich, bei dem Rotationsellipsoid sind zwei von ihnen, bei der Kugel alle drei gleich.

Bei dem einschaligen Hyperboloid schneiden nur zwei der Axen die Fläche in reellen Punkten und die Abstände des Centrums von den Schnittpunkten fallen mit den Längen zweier Halbaxen zusammen.

Bei dem zweischaligen Hyperboloid trifft nur eine der Axen die Fläche in reellen Punkten und der Abstand des Centrums von einem der Schnittpunkte fällt mit der Länge einer Halbaxe zusammen.

Die Axen, welche die Hyperboloide in reellen Punkten schneiden, heissen *transversal.*

Die Ebene

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

schneidet die Fläche 2ter Ordnung in einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem die Grösse

$$G = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & u_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & u_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix}$$

negativ, positiv oder Null ..

Zwei parallele Ebenen schneiden die Fläche in Kegelschnitten derselben Art.

Durch jede Axe der Fläche 2^{ter} Ordnung gehen zwei (reelle oder imaginäre) Ebenen von der Beschaffenheit, dass sie selbst und die zu ihnen parallelen Ebenen die Fläche in Kreisen schneiden; diese Ebenen heissen *Kreisschnittebenen;* sie liefern die sogenannten *Kreisschnitte* der Fläche 2^{ter} Ordnung.

Die beiden Kreisschnittebenen durch eine jede Axe liegen symmetrisch in Bezug auf jede Hauptebene.

Von den sechs Systemen von Kreisschnittebenen sind nur zwei reell.

In jedem System von Kreisschnittebenen gibt es immer zwei Tangentialebenen, deren Berührungspunkte mit der Fläche *Kreis-* oder *Nabelpunkte* oder *Umbilicus* der Fläche genannt werden. Salmon-Fiedler, 3. Aufl., 1, S. 122.

Von den zwölf Nabelpunkten sind höchstens vier reell.

Die zwölf Nabelpunkte liegen zu je dreien auf acht imaginären Geraden der Fläche 2^{ter} Ordnung.

Die zwölf Nabelpunkte einer Mittelpunktsfläche (centralen Fläche) liegen zu je vieren in den drei Hauptebenen.

Zwei Kreisschnitte, die zu jedem der beiden Systeme von Kreisschnittebenen gehören, die derselben Axe der Fläche entsprechen, liegen immer auf einer und derselben Kugel.

Bei den Umdrehungsflächen reduciren sich die beiden Systeme reeller Kreisschnittebenen auf das System der Parallelkreise.

Die analytische Bedingung, damit eine Ebene die Kreisschnittebene einer Fläche 2^{ter} Ordnung sei, ist durch zwei der Gleichungen

$$\frac{G_{11}}{H_{11}} = \frac{G_{22}}{H_{22}} = \frac{G_{33}}{H_{33}} = \frac{G_{23}}{H_{23}} = \frac{G_{31}}{H_{31}} = \frac{G_{12}}{H_{12}}$$

gegeben, worin die G_{ij} die algebraischen Adjungirten der Elemente der Determinante G und die H_{ij} die analogen algebraischen Adjungirten der Elemente der Determinante

$$H = \begin{vmatrix} 1, & \cos(12), & \cos(13), & u_1 \\ \cos(21), & 1, & \cos(23), & u_2 \\ \cos(31), & \cos(32), & 1, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix},$$

sind und unter $\cos(12), \cos(13), \ldots$ *die Cosinus der Winkel verstanden werden, welche die Coordinatenaxen miteinander machen.*

Bei einem reellen Ellipsoid mit drei ungleichen Axen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (a>b>c)$$

gehen die reellen Kreisschnittebenen durch die Axe von mittlerer Länge (b).

Die Coordinaten der vier reellen Nabelpunkte sind

$$\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad 0, \quad \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Bei dem einschaligen Hyperboloid sind die beiden Systeme reeller Kreisschnittebenen der grösseren der beiden Transversalaxen parallel, und die Nabelpunkte sind sämmtlich imaginär.

Bei dem zweischaligen Hyperboloid sind die beiden Systeme reeller Kreisschnittebenen der längsten nicht transversalen Axe parallel, und die vier Nabelpunkte sind reell.

Ist $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *die Gleichung des zweischaligen Hyperboloids und* $b>c$, *so sind die Coordinaten der vier reellen Nabelpunkte*

$$\pm a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}}, \quad 0, \quad \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2+c^2}}.$$

Der Kegel hat zwei Systeme reeller Kreisschnittebenen, die identisch mit denen der einschaligen oder zweischaligen Hyperboloide sind, deren Asymptotenkegel er ist.

Ein elliptisches Paraboloid hat zwei Systeme reeller Kreisschnittebenen; sie sind den grösseren Axen der zur Axe senkrechten Schnitte parallel; zwei Nabelpunkte sind reell und durch

$$\tfrac{1}{4}(b^2-c^2), \quad 0, \quad \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2(b^2-c^2)}$$

bestimmt, wenn

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-x=0, \quad (b>c)$$

die Gleichung des Paraboloids ist. Die reellen Kreisschnittebenen sind den beiden Ebenen

$$c^2x^2-(b^2-c^2)z^2=0$$

parallel.

In einem hyperbolischen Paraboloid sind die beiden Systeme reeller Kreisschnittebenen den beiden Ebenen, die wir in § 1 *Directricen genannt haben, parallel; die Kreise degeneriren in eine im Endlichen und eine im Unendlichen liegende Gerade.*

Wenn $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - x = 0$ *die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids ist, so sind die beiden Systeme von Kreisschnittebenen den beiden Ebenen*

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

parallel.

§ 3. Focale Eigenschaften der Flächen 2ter Ordnung.

Der Ort der Punkte, welche so beschaffen sind, dass die von ihnen einer centralen Fläche 2ter Ordnung umschriebenen Kegel Rotationskegel sind, besteht aus drei in den drei Hauptebenen der Fläche 2ter Ordnung liegenden Kegelschnitten; jeder Kegelschnitt hat dieselben Brennpunkte, wie der Schnitt der Hauptebene mit der Fläche. Diese *Kegelschnitte* heissen *focal*, ihre Punkte sind die *Brennpunkte (Focus, Focalpunkte)* der centralen Fläche 2ter Ordnung.

Die Focalkegelschnitte gehen durch die vier in ihrer Ebene liegenden Nabelpunkte.

Ein Ellipsoid oder Hyperboloid lässt im Allgemeinen eine (reelle) focale Ellipse und eine focale Hyperbel zu, welche in den beiden Hauptebenen liegen, die durch die längste Transversalaxe gehen.

Die beiden Brennpunkte eines Focalkegelschnitts sind die Scheitel eines anderen Focalkegelschnitts.

Die Focalkegelschnitte der Kegel 2ten Grads reduciren sich auf drei Paare von Geraden; nur zwei von diesen Geraden sind reell.

Für jeden Kegel 2ten Grads existiren zwei reelle Gerade (Focallinien) derart, dass durch jede von ihnen unendlich viele Paare conjugirter auf einander senkrechter Ebenen gehen. Ist er ein Rotationskegel, so fallen die beiden Focalgeraden mit der Rotationsaxe zusammen.

Jeder Schnitt des Kegels mit einer auf einer Focalgeraden senkrechten Ebene hat den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene zum Brennpunkt.

Die Focalgeraden des Asymptotenkegels einer Mittelpunktsfläche sind die Asymptoten der Focalkegelschnitte dieser Fläche.

Bei einem Paraboloid besteht der Ort aller Punkte, die so beschaffen sind, dass der von ihnen der Fläche umschriebene Kegel ein Rotationskegel ist, aus zwei Focalparabeln, welche in den zwei Hauptebenen liegen, dieselbe Axe, wie das Paraboloid, haben, ihre Oeffnungen nach entgegengesetzten Richtungen kehren und *die nämlichen Brennpunkte besitzen, wie die beiden durch die zwei Hauptebenen in dem Paraboloid erzeugten Parabeln.*

Die Focalparabeln liegen bei dem Paraboloid derart, dass der Brennpunkt der einen der Scheitel der anderen ist.

Die Parameter der beiden Focalparabeln sind einander und der Differenz der Parameter der beiden durch die Hauptebenen erzeugten Parabeln gleich.

1. *Für das reelle Ellipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mit den Halbaxen $a > b > c$ *sind die drei Focalkegelschnitte:*

$x = 0$, $\dfrac{y^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{a^2 - c^2} = -1$ *(eine imaginäre Ellipse),*

$y = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{b^2 - c^2} = 1$ *(eine Hyperbel),*

$z = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2 - c^2} + \dfrac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$ *(eine reelle Ellipse).*

2. *Für das imaginäre Ellipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (a > b > c)$$

sind die Focalkegelschnitte:

$x = 0$, $\dfrac{y^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{a^2 - c^2} = 1$ *(eine reelle Ellipse),*

$y = 0$, $\dfrac{z^2}{b^2 - c^2} - \dfrac{x^2}{a^2 - b^2} = 1$ *(eine Hyperbel),*

$z = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2 - c^2} + \dfrac{y^2}{b^2 - c^2} = -1$ *(eine imaginäre Ellipse).*

3. *Für das einschalige Hyperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a > b)$$

sind die Focalkegelschnitte:

$x = 0$, $\dfrac{y^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{a^2 + c^2} = -1$ *(eine imaginäre Ellipse),*

$y = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{b^2 + c^2} = 1$ *(eine Hyperbel),*

$z = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2 + c^2} + \dfrac{y^2}{b^2 + c^2} = 1$ *(eine reelle Ellipse).*

4. *Für das zweischalige Hyperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \ (b > c),$$

sind sie:

$$x = 0, \ \frac{y^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{a^2 + c^2} = -1 \ \textit{(eine imaginäre Ellipse)},$$

$$y = 0, \ \frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1 \ \textit{(eine reelle Ellipse)},$$

$$z = 0, \ \frac{x^2}{a^2 + c^2} - \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1 \ \textit{(eine Hyperbel)}.$$

5. *Für den reellen Kegel*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \ (a > b)$$

sind die beiden reellen Focalgeraden:

$$y = 0, \ \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 0.$$

6. *Für ein (elliptisches oder hyperbolisches) Paraboloid, dessen Gleichung*

$$py^2 + qz^2 - x = 0, \ (p \lessgtr q)$$

ist, in welcher p, q bei dem elliptischen Paraboloid dasselbe und bei dem hyperbolischen verschiedene Vorzeichen haben, sind die beiden Focalparabeln

$$y = 0, \ z^2 = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\left(x - \frac{1}{4p}\right),$$

$$z = 0, \ y^2 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(x - \frac{1}{4q}\right).$$

Die Rotationsaxen der, von den Brennpunkten aus, der Fläche 2ter Ordnung umschriebenen Kegel berühren die Focalkegelschnitte.

Die Tangenten an die Focalkegelschnitte sind Gerade, durch welche unendlich viele Paare von Ebenen gehen, die in Bezug auf die Fläche 2ter Ordnung conjugirt sind und aufeinander senkrecht stehen.

Die in dem Berührungspunkt auf einer Tangente an einen Focalkegelschnitt senkrecht stehende Ebene schneidet die Fläche 2ter Ordnung in einem Kegelschnitt, der den Berührungspunkt zum Brennpunkt und eine auf der Ebene des Focalkegelschnitts senkrechte Gerade zur Directrix hat.

Wenn man von einem beliebigen Punkt aus das Loth auf die Polarebene dieses Punkts in Bezug auf die Fläche 2ter Ord-

nung fällt, so sind die Schnitte des Loths und der Ebene mit einer Hauptebene Pol und Polare in Bezug auf den in dieser Hauptebene liegenden Focalkegelschnitt.

Die Schnitte einer Berührungsebene an die Fläche 2ter Ordnung und der Normalen mit einer Hauptebene sind Polare und Pol in Bezug auf den Focalkegelschnitt.

Das Product der Abstände einer Berührungsebene an die Fläche 2ter Ordnung von den beiden Punkten eines Focalkegelschnitts, in welchen die Tangenten der Ebene parallel sind, bleibt constant.

Wenn das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a>b>c)$$

gegeben ist, so stellt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,$$

in welcher λ ein beliebiger Parameter ist, eine dem gegebenen Ellipsoid confocale Fläche 2ter Ordnung dar, d. h. eine solche, welche dieselben Focalkegelschnitte hat.

Da man λ auf unendlich viele Arten variiren kann, so gibt es eine einfach unendliche Menge von Flächen 2ter Ordnung, die der gegebenen confocal sind.

Durch jeden Punkt des Raums gehen drei solche Flächen 2ter Ordnung, nämlich ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid, welche sich in dem gemeinschaftlichen Punkt rechtwinklig schneiden.

Die drei Werthe von λ, welche den drei durch einen gegebenen Punkt gehenden confocalen Flächen 2ter Ordnung entsprechen, kann man zu Coordinaten des Punkts wählen; sie heissen *elliptische Coordinaten.*

§ 4. Die metrischen Eigenschaften der Flächen 2ter Ordnung. Gleichseitige Flächen 2ter Ordnung.

Bei dem Ellipsoid ist das Product des Normalensegments, welches zwischen dem Ellipsoid und einer Hauptebene enthalten ist, mit dem Abstand des Centrums von der Berührungsebene constant; dieses Product ist dem Quadrat des auf der Berührungsebene senkrechten Halbmessers gleich.

In jedem Ellipsoid ist die Summe der Quadrate dreier conjugirter Halbmesser constant.

Das Volumen des über drei conjugirten Halbmessern construirten Parallelepipedons bleibt constant.

Ebenso ist die Summe der Quadrate der Projectionen dreier conjugirter Halbmesser auf eine Gerade oder Ebene constant.

In einem elliptischen Paraboloid bleibt die Summe der Hauptparameter zweier beliebiger conjugirter Diametralschnitte constant. Bei dem hyperbolischen Paraboloid dagegen ist die Differenz dieser Parameter constant.

Bei einem elliptischen Paraboloid ist der Ort der Spitzen der umschriebenen dreifach rechtwinkligen Dreiflache eine zur Axe senkrechte Ebene, die vom Scheitel um die Grösse

$$\frac{b^2 + c^2}{4}$$

absteht, wenn

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - x = 0,$$

wie gewöhnlich, die Gleichung des Paraboloids darstellt.

Für das Ellipsoid ist derselbe Ort eine mit dem Ellipsoid concentrische Kugel, deren Radius

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ist, wenn a, b, c die Halbaxen des Ellipsoids bezeichnen. Für jede andere Mittelpunktsfläche ist dieser Ort stets eine Kugel (Monge).

Wenn in einem einschaligen Hyperboloid eine auf einer Geraden des Hyperboloids senkrechte Ebene die Fläche in einer gleichseitigen (rectangulären) Hyperbel schneidet, so treffen auch alle andere solche Ebenen die Fläche in gleichseitigen Hyperbeln.

Dieses Hyperboloid heisst *gleichseitig;* Vogt, *Crelle,* 86.

Wenn in einem einschaligen Hyperboloid einer ihm angehörigen Geraden zwei andere aufeinander und auf der ersteren senkrechte, und ebenfalls der Fläche angehörige Gerade desselben Systems entsprechen, so gilt dasselbe für alle Gerade und das Hyperboloid ist gleichseitig.

Ein einschaliges Hyperboloid ist gleichseitig, wenn $D = 0$ ist Vergl. § 2.

Lautet daher seine Gleichung, wie gewöhnlich,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

so ist die Bedingung, damit es gleichseitig sei,

$$D = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Wenn ein durch einen Kegel 2^{ten} Grads senkrecht zu den Erzeugenden geführter Schnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, so gilt dasselbe für alle senkrecht zu den Erzeugenden geführten Schnitte; der *Kegel* heisst alsdann *gleichseitig.*

Bei einem gleichseitigen Kegel entsprechen jeder Erzeugenden zwei andere, die auf einander und auf der ersteren senkrecht stehen.

Ein Kegel ist gleichseitig, wenn $D = 0$ ist.

Wenn in einem zweischaligen Hyperboloid ein auf einer Asymptote (einer Erzeugenden des Asymptotenkegels) senkrechter Schnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, so gilt dasselbe für alle ähnlichen Schnitte.

Das Hyperboloid heisst dann *gleichseitig.*

In jedem gleichseitigen zweischaligen Hyperboloid entsprechen jeder Asymptote zwei andere, die aufeinander und auf der ersten senkrecht stehen.

Das zweischalige Hyperboloid ist gleichseitig, wenn $D = 0$ ist.

Für ein elliptisches Paraboloid kann D nicht Null sein.

Ein hyperbolisches Paraboloid ist *gleichseitig,* wenn die beiden Directrix-Ebenen senkrecht aufeinander stehen.

Söll ein hyperbolisches Paraboloid gleichseitig sein, so muss $D = 0$ sein.

Bei einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid ist jeder senkrecht zur Axe geführte Schnitt eine gleichseitige Hyperbel.

Ueber eine andere einfache Gattung von Flächen 2^{ter} Ordnung, nämlich die sogenannten *orthogonalen Hyperboloide,* vergl. Schröter, *Crelle,* 85.

§ 5. Flächenbüschel und Flächennetze 2^{ter} Ordnung.

Sind zwei Flächen 2^{ter} Ordnung (2^{ter} Klasse) $f = 0$, $f' = 0$ in Punktcoordinaten (Ebenencoordinaten) gegeben, so heisst das durch

$$f + \lambda f' = 0$$

dargestellte System von Flächen ein *Flächenbüschel 2^{ter} Ordnung* (eine *Flächenschar 2^{ter} Klasse*).

Alle Flächen des Büschels schneiden sich in einer Raumcurve 4^{ter} Ordnung (Grundcurve, Durchdringungs-, Durchschnittscurve).

Alle Flächen eines Büschels 2^{ter} *Ordnung werden von einer Ebene in einem Büschel von Kegelschnitten und von einer Geraden in einem Büschel von Gruppen zweier Punkte d. h. in Paaren von involutorisch conjugirten Punkten geschnitten.*

Durch einen Punkt des Raums geht im Allgemeinen nur eine Fläche des Büschels; es gibt zwei Flächen 2^{ter} *Ordnung des Büschels, welche eine gegebene Gerade, und drei Flächen des Büschels, die eine gegebene Ebene berühren.* Näheres findet man in der Tabelle in Kap. 15, § 4.

Die Polarebenen eines Punkts P *in Bezug auf alle Flächen* 2^{ter} *Ordnung des Büschels gehen durch eine feste Gerade* p *und bilden mithin ein Ebenenbüschel.* Die Gerade p heisst zu P *conjugirt in Bezug auf das Flächenbüschel.*

Die Büschel der Polarebenen zweier Punkte P, P' *sind projectiv zueinander.*

Die reciproken Geraden einer Geraden in Bezug auf alle Flächen 2^{ter} *Ordnung eines Büschels sind die Erzeugenden eines Hyperboloids, dessen zweites System von Erzeugenden aus den allen Punkten der gegebenen Geraden conjugirten Geraden besteht.*

Die Pole einer Ebene in Bezug auf alle Flächen 2^{ter} *Ordnung eines Büschels liegen auf einer cubischen Raumcurve.*

Daraus folgt:

Die Mittelpunkte aller Flächen 2^{ter} *Ordnung eines Büschels liegen auf einer cubischen Raumcurve; in jedem Büschel gibt es im Allgemeinen drei Paraboloide, von welchen wenigstens eines reell ist.*

In einem Flächenbüschel 2^{ter} *Ordnung existiren im Allgemeinen vier Kegel.*

Alle Flächen 2^{ter} *Ordnung eines Büschels haben ein Polartetraeder gemeinschaftlich, dessen Ecken die Spitzen der vier dem Büschel angehörigen Kegel sind.*

Eine eingehende Untersuchung betreffs der in dem Flächenbüschel enthaltenen Kegel erfordert Betrachtungen aus der Weierstrass'schen Theorie der Elementartheiler, *Repert.* 1, S. 328; vergl. Clebsch-Lindemann, *Anal. Geom. des Raumes*, Bd. 2.

Sind drei Flächen 2^{ter} Ordnung $f=0$, $f'=0$, $f''=0$ gegeben, welche keinem Büschel angehören, so bilden alle durch

$$f+\lambda f'+\mu f''=0$$

dargestellten Flächen ein sogenanntes *Flächennetz oder Flächenbündel* 2^{ter} *Ordnung*; Salmon-Fiedler, 3. Aufl., 1, S. 165

Alle Flächen 2^{ter} Ordnung eines Netzes haben acht Punkte gemeinschaftlich (die Grundpunkte oder Basispunkte des Netzes).

Jede Ebene wird von unendlich vielen Flächen 2^{ter} Ordnung eines Netzes berührt; die Berührungspunkte liegen auf einer allgemeinen Curve 3^{ter} Ordnung.

Alle durch sieben Punkte des Raums gehende Flächen 2^{ter} Ordnung gehen auch durch einen und denselben achten Punkt.

Die acht Grundpunkte eines Flächennetzes 2^{ter} Ordnung besitzen die Eigenschaft, dass die durch sechs von ihnen bestimmte cubische Raumcurve die Verbindungsgerade der beiden anderen zur Secante hat.

Die Polarebenen eines Punktes P in Bezug auf alle Flächen 2^{ter} Ordnung eines Netzes gehen durch denselben Punkt (den in Bezug auf das Netz zu P conjugirten Punkt).

Der Ort des Pols einer Ebene in Bezug auf alle Flächen 2^{ter} Ordnung eines Netzes ist eine allgemeine Fläche 3^{ter} Ordnung, auf welcher auch die in Bezug auf das Netz conjugirten Punkte aller Punkte der Ebene liegen.

Unter den Flächen des Netzes gibt es unendlich viele, die sich auf Kegel reduciren; der Ort ihrer Spitzen ist eine Curve 6^{ter} Ordnung; auf dieser Curve liegen auch alle unendlich vielen Punkte, deren Polarebenen in Bezug auf die Flächen des Netzes sämmtlich durch eine Gerade gehen.

Die alten Geometer hatten die verschiedenen Flächen 2^{ter} Ordnung nicht systematisch in Classen geordnet; die erste Classification verdankt man Euler, *Introductio in anal. infin.*, 1748. Die Lehre von diesen Flächen machte in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts in Folge der Leistungen der Mathematiker der französischen Schule, Monge, Hachette, Lacroix, Binet, Leroy, Poncelet, Chasles grosse Fortschritte. Die Focalkegelschnitte hat Dupin, *Corr. Éc. polyt.*, 2 gefunden und dann haben sie Steiner, Crelle, 1 und Chasles, *Aperçu hist.*, Note 31 studirt.

Von dem Standpunkt der projectiven Geometrie waren für die Theorie der Flächen 2^{ter} Ordnung die Monographien von Hesse, *Crelle*, 18, 20, 26, etc.; Seidewitz, *Grunert's Arch.* 7, 8, 9, 10; Sturm, *Crelle*, 70, 99, etc. grundlegend, zu welchen noch die Werke von Staudt, siehe oben; Reye, *Geom. der Lage* und von Anderen hinzukommen.

Ein umfangreiches Verzeichniss von Arbeiten über die

Flächen 2ter Ordnung findet man in dem Buch Loria's, übers. von Schütte, *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie* etc., p. 32. Vergl. auch E. Kötter, *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie; Jahresber. der deutsch. Mathematikerver.*, 1898, von der bis jetzt nur ein Heft erschienen ist.

Von dem Gesichtspunkt der analytischen Geometrie aus wurden diese Flächen von Salmon-Fiedler, l. c., Hesse, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, Leipzig, 1876, Baltzer, l. c., D'Ovidio, l. c. und in dem 2ten Band der Clebsch-Lindemann'schen *Geometrie*, Leipzig, 1891 behandelt; Schröter geht in seinem umfangreichen Werk: *Theorie der Oberflächen 2ter Ordnung und der Raumcurven 3ter Ordnung*, Leipzig, 1880 von synthetischem Standpunkt aus.

Die descriptive Geometrie der Flächen 2ter Ordnung findet man bei Fiedler, *Die darstellende Geometrie*, Leipzig, 1. Thl. 1883, 2. Thl. 1885, 3. Thl. 1888 behandelt.

Am Schluss des D'Ovidio'schen Werkes werden die Mathematiker angegeben, welche die Hauptsätze dieser Theorie entdeckt haben.

Die Focaleigenschaften sind in dem neueren Buch von Staude, *die Focaleigenschaften der Flächen 2ter Ordnung*, Leipzig, 1896 dargestellt.

Was die Theorie der quadratischen quaternären Formen angeht, so verweisen wir auf die Bemerkungen in Bd. 1, Kap. 12, § 19.

Kapitel V.

Allgemeine Theorie der ebenen algebraischen Curven.

§ 1. Allgemeines. Singuläre Punkte. Die Plücker'schen Formeln. Die Discriminante.

Der Ort von Punkten, welcher analytisch durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grads zwischen zwei Cartesischen oder drei homogenen Coordinaten eines Punkts der Ebene dargestellt wird, ist eine *ebene Curve* n^{ter} *Ordnung. Die Curve* 1^{ter} *Ordnung ist die Gerade.*

Die *Tangente* an eine ebene Curve ist die Grenzlage der Geraden, welche zwei unbegrenzt nahe Punkte der Curve verbindet.

Correlativ ist die Enveloppe der Geraden, welche durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grads zwischen den Geradencoordinaten der Ebene dargestellt werden, eine *Enveloppen-Curve* n^{ter} *Classe. Die Enveloppe* 1^{ter} *Classe ist der Punkt.*

Der *Punkt* einer Enveloppen-Curve ist die Grenzlage des Schnitts zweier unendlich naher Tangenten.

Die Curven oder Enveloppen, deren Gleichungen nicht in ganze Factoren zerfallen, heissen *einfach, unzerlegbar* oder *irreducibel.*

Jede ebene Curve n^{ter} *Ordnung wird von einer beliebigen Geraden der Ebene immer in* n *reellen oder imaginären Punkten geschnitten.*

Durch jeden Punkt der Ebene gehen immer n *(reelle oder imaginäre) Gerade, welche eine Enveloppen-Curve* n^{ter} *Classe berühren.*

Zwei Curven von den Ordnungen n_1, n_2 *haben im Allgemeinen* $n_1 n_2$ *(reelle oder imaginäre) Punkte und zwei Enveloppen von den Classen* n_1, n_2 *haben* $n_1 n_2$ *Tangenten gemeinschaftlich.*

Sind willkürlich in der Ebene $\frac{n(n+3)}{2}$ *Punkte gegeben, so gibt es im Allgemeinen eine und nur eine Curve* n^{ter} *Ordnung, welche durch sie geht, und correlativ.*

Ein Punkt einer Curve heisst *r-fach oder vielfach von der Ordnung r,* wenn die Curve r-mal durch ihn geht; die Curve hat daher in diesem Punkt r Tangenten; sind diese sämmtlich verschieden, so wird der Punkt ein *gewöhnlicher* r-facher Punkt genannt. Eine *Tangente* heisst r-fach, wenn sie die Enveloppencurve r-mal berührt und mithin r Berührungspunkte besitzt; sind diese verschieden, so sagt man, sie sei eine *gewöhnliche* r-fache Tangente.

Wenn eine Curve n^{ter} *Ordnung einen n-fachen Punkt hat, so ist sie nichts Anderes, als die Gesammtheit von n Geraden, die von diesem Punkt ausgehen.*

Eine einfache Curve n^{ter} *Ordnung kann ausser einem* $(n-1)$*-fachen Punkt nicht auch noch einen Doppelpunkt haben.*

Eine einfache Curve n^{ter} *Ordnung kann nicht mehr als* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *Doppelpunkte haben.*

Wenn eine einfache Curve n^{ter} *Ordnung gewöhnliche vielfache Punkte von den Ordnungen* $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ *hat, so ist*

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{r_i(r_i-1)}{2} \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Zu allen diesen Theoremen lassen sich correlative Sätze aufstellen.

Die sämmtlichen unendlich vielen Curven n^{ter} *Ordnung, die durch*

$$\tfrac{1}{2}n(n+3)-1$$

gegebene Punkte gehen, gehen auch durch

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

andere durch die gegebenen Punkte bestimmte Punkte.

Wenn von den n^2 *gemeinschaftlichen Punkten zweier Curven* n^{ter} *Ordnung* nm, $(m<n)$ *auf einer Curve* m^{ter} *Ordnung liegen, so gehören die* $n(n-m)$ *übrigen Punkte einer Curve von der Ordnung* $n-m$ *an.*

Die grösste Anzahl von Punkten, die man willkürlich auf einer Curve m^{ter} *Ordnung annehmen kann, wenn eine einfache Curve* n^{ter} *Ordnung* $(n>m)$ *durch sie gelegt werden soll, beträgt:* $nm-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, *(das Jacobi'sche Theorem, Crelle,* 15).

Alle Curven n^{ter} Ordnung, welche durch $nm - h$ Punkte einer Curve m^{ter} Ordnung und durch

$$n(n-m) - h'$$

Punkte einer Curve $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung gelegt werden, schneiden die erste Curve in anderen h festen Punkten und die zweite in anderen h' festen Punkten. Das *Plücker*'sche Theorem, *Theorie der algebraischen Curven*, Bonn, 1839, p. 11.

Jede Curve n^{ter} Ordnung, die durch

$$nm - \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

Punkte einer zweiten Curve m^{ter} Ordnung geht $(m < n)$, schneidet diese auch noch in anderen $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ festen Punkten.

Jede beliebige Curve n^{ter} Ordnung, die durch

$$mm' - \tfrac{1}{2}(m+m'-n-1)(m+m'-n-2)$$

Schnittpunkte zweier Curven von den Ordnungen m, m' gelegt wird (wobei m sowohl als m' nicht grösser als n sind), geht auch durch alle übrigen diesen Curven gemeinschaftliche Punkte. Das *Cayley*'sche Theorem, *Cambr. Math. Journ.*, 3, 1843.

Wenn in den Punkten, in welchen eine Curve n^{ter} Ordnung von einer Geraden geschnitten wird, die Tangenten an die Curve gezogen werden, so schneiden sie die Curve noch in anderen $n(n-2)$ Punkten, die auf einer Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen (Poncelet).

Ein namentlich für die sogenannte Geometrie auf einer algebraischen Curve (vergl. § 4) wichtiges Theorem ist das Noether'sche:

Es mögen zwei Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ vorliegen; einer ihrer Schnittpunkte P_i sei mehrfach von der Ordnung q_i für φ und der Ordnung r_i für ψ; es sei ferner $q_i \leqq r_i$ und $f = 0$ eine Curve, welche durch jeden der Schnittpunkte von φ und ψ geht und in P_i einen mehrfachen Punkt von der Ordnung $q_i + r_i - 1$ hat; alsdann lässt sich die Gleichung dieser Curve immer in der Form

$$f = A\varphi + B\psi = 0$$

ausdrücken, worin $A = 0$, $B = 0$ zwei andere Curven von entsprechender Ordnung darstellen.

Damit man f diese Gestalt geben könne, ist es jedoch nicht nöthig, dass f in P_i einen mehrfachen Punkt von der Ordnung $q_i + r_i - 1$ habe; dagegen muss P_i für f mehrfach wenigstens von der Ordnung q_i (der kleineren der beiden Ordnungen) *sein; in dem letzteren Fall müssen zwischen den Coefficienten der Gleichung $f = 0$ lineare Relationen bestehen.*

Ueber diesen Satz siehe Noether, *Math. Ann.*, 6, p. 352; Halphén, *Bull. de la Soc. math.*, 5; Bacharach, *Math. Ann.*, 26; Voss, ib., 27; Cayley, ib., 30; Stickelberger, ib., id.; Noether, ib., id.; Zeuthen, ib., 31; Guccia, *Compt. Rend.*, 1888; Bertini, *Math. Ann.*, 34, 35; Rend. Ist. Lomb., (2), 24, 1891 und Andere. Wir verweisen auch auf die *Geom.* von Clebsch-Lindemann.

Ein k-facher Punkt kann als die Vereinigung von $\frac{k(k-1)}{2}$ *Doppelpunkten und eine k-fache Tangente als die Vereinigung von* $\frac{k(k-1)}{2}$ *Doppeltangenten angesehen werden.*

Eine Tangente an eine Curve n^{ter} *Ordnung hat ausser dem Berührungspunkt noch andere* $n-2$ *Punkte mit der Curve gemeinschaftlich; von einem Punkt einer Curve* n^{ter} *Classe aus lassen sich an die Curve ausser der in diesem Punkt berührenden Tangente noch* $n-2$ *andere Tangenten an die Curve ziehen.*

Die beiden Tangenten in einem Doppelpunkt können reell und verschieden oder imaginär sein oder zusammenfallen. In dem zweiten Fall erhält man den sogenannten *isolirten Doppelpunkt,* in dem dritten den *Rückkehr-, Cuspidal- oder stationären Punkt (Spitze).*

Die Tangente in dem Cuspidalpunkt (die Cuspidaltangente) zählt für drei der Tangenten, die sich von diesem Punkt aus an die Curve ziehen lassen.

Correlativ zu dem Cuspidalpunkt nennt man eine *Wende-, Inflexions- oder stationäre Tangente* an die Curve eine solche, welche die Curve noch in $n-3$ anderen Punkten schneidet, deren Berührungspunkt also als Vereinigung von drei unendlich nahen Punkten anzusehen ist. Ein solcher Berührungspunkt heisst *Inflexionspunkt (Wendepunkt) der Curve.* Die Inflexionstangente kann als eine Doppeltangente aufgefasst werden, deren Berührungspunkte zusammenfallen; bei dieser Anschauungsweise muss man jedoch die Curve als Enveloppe von Tangenten betrachten.

Die vielfachen Punkte und vielfachen Tangenten heissen im Allgemeinen *singuläre Punkte und Tangenten.*

Es ist jedoch zu beachten, dass ein Doppelpunkt oder ein Cuspidalpunkt nur dann als *Singularität* anzusehen ist, wenn die Curve als Ort von Punkten und nicht als Enveloppe von Tangenten betrachtet wird, weil in dem letzteren Fall jede Enveloppe immer eine gewisse Anzahl von Doppelpunkten besitzt. Ebenso ist eine Doppel- oder eine Inflexionstangente nur dann eine *Singularität*, wenn die Curve als Enveloppe und nicht als Punktort aufgefasst wird.

Es sei n die Ordnung einer Curve, ν ihre Classe, d die Anzahl der Doppelpunkte, r die Anzahl der Rückkehr- oder Cuspidalpunkte, τ die der Doppeltangenten und ι die Anzahl der Wendetangenten.

Alsdann bestehen zwischen diesen Zahlen vier bemerkenswerthe Relationen, welche die Plücker'schen Formeln (Crelle, 12) genannt werden:

$$\begin{aligned}
\nu &= n(n-1) - 2d - 3r,\\
n &= \nu(\nu-1) - 2\tau - 3\iota,\\
\iota &= 3n(n-2) - 6d - 8r,\\
r &= 3\nu(\nu-2) - 6\tau - 8\iota.
\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln, von welchen jede die Folge der drei übrigen ist, ergeben sich die weiteren Beziehungen:

$$3(\nu - n) = \iota - r,$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota.$$

Bei einer allgemeinen Ort-Curve, d. h. einer solchen ohne Doppel- und Cuspidalpunkte wird die Classe, die Anzahl der Inflexions- und der Doppeltangenten durch die Relationen

$$\begin{aligned}
\nu &= n(n-1),\\
\iota &= 3n(n-2),\\
\tau &= \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)
\end{aligned}$$

bestimmt und correlativ.

Sind d Doppelpunkte und r Cuspidalpunkte vorhanden, so ist die Anzahl der Doppeltangenten

$$\tau = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2d+3r)[n(n-1)-6] + \\ + 2d(d-1) + \frac{9}{2}r(r-1) + 6dr.$$

Führt man den Begriff des sogenannten *Geschlechts einer Curve*, Riemann, Crelle, 54; Clebsch, ib., 63, 64 ein, so nehmen die Plücker'schen Formeln eine andere Gestalt an.

Man setze

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$$
$$= \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota.$$

Die Zahl p wird alsdann das *Geschlecht* der Ort-Curve und der Enveloppen-Curve genannt. *Sie stellt die Differenz zwischen der grössten Anzahl von Doppel- und Cuspidalpunkten dar, welche die Ort-Curve, ohne zu zerfallen, haben kann, und der Anzahl dieser Punkte, welche sie wirklich hat;*

oder: *die Differenz zwischen der Summe der grössten Anzahl von Doppel- und Wendetangenten, welche die Enveloppen-Curve haben kann, und der Anzahl der wirklich vorhandenen.*

Die Plücker'schen Formeln werden dann:

$$2p - 2 = \nu + r - 2n,$$
$$= n + \iota - 2\nu,$$
$$= n(n-3) - 2(d+r),$$
$$= \nu(\nu-3) - 2(\tau+\iota).$$

In den Plücker'schen Formeln wird zwischen reellen und imaginären singulären Punkten und Tangenten kein Unterschied gemacht. Es besteht jedoch auch zwischen den reellen Singularitäten eine Relation. Siehe darüber Klein, *Math. Ann.*, 10, Perrin, *Bull. de la soc. math.*, 6.

Das Geschlecht p kann für eine einfache Curve nur Null oder positiv sein.

Eine Curve vom Geschlecht Null heisst *rational oder unicursal* (Cayley); *die Coordinaten ihrer Punkte lassen sich als rationale Funktionen eines Parameters ausdrücken. Sie hat $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppel- und Cuspidalpunkte.*

Von den $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppel- und Cuspidalpunkten einer Curve vom Geschlecht Null können höchstens $\frac{3}{2}(n-2)$ Cuspidalpunkte sein.

Der Begriff „Geschlecht" wurde von Riemann, l. c. eingeführt und von Clebsch, l. c. auf die Geometrie angewendet. Cayley gebraucht statt des Ausdrucks *„Geschlecht"* das Wort *„Defect"*, *London math. soc.*, 1865.

In Bezug auf die Form einer Curve, d. h. die durch ihre sämmtlichen reellen Punkte gebildete Figur sind einige Grundbegriffe die folgenden: Eine Curve kann aus verschiedenen Zügen bestehen, wobei unter einem Zuge einer Curve die Gesammtheit aller reellen Punkte dieser Curve verstanden wird, die derart sind, dass man continuirlich mit Einschluss des Durchgangs durch die Unendlichkeit von dem einen Punkt zu dem anderen gelangen kann; so bilden z. B. die beiden Theile einer Hyperbel nach unserer Anschauung nur *einen* Zug.

Ein Zug einer Curve kann paar oder unpaar sein, je nachdem er von einer Geraden in einer geraden oder ungeraden Anzahl von reellen Punkten geschnitten wird. *Ein unpaarer Zug lässt sich durch Deformation einer Geraden und ein paarer Zug durch Deformation eines Kegelschnitts erzeugen.*

Zwei unpaare Züge schneiden sich immer; daraus folgt:

Eine Curve ohne Doppelpunkte kann höchstens nur einen unpaaren Zug enthalten; und speciell:

Eine Curve ohne Doppelpunkte und von ungerader Ordnung enthält immer einen unpaaren Zug; ist sie dagegen von gerader Ordnung, so enthält sie keinen solchen Zug.

Diese Unterscheidungen stammen von Staudt, *Geom. der Lage,* Nürnberg 1847; siehe auch Klein, *Math. Ann.,* 6; Zeuthen, ib., 7; u. s. w.

Eine Curve vom Geschlecht p kann nicht mehr als $p+1$ Züge haben; wenn $(n-1)(n-2)$ gleich oder grösser als p ist, so existiren immer Curven n^{ter} Ordnung, die $p+1$ Züge haben, Harnack, *Math. Ann.,* 10. Vergl. Hilbert, *Ueber die reellen Züge algebraischer Curven, Math. Ann.,* 38.

Wir wollen jetzt einige Formeln mittheilen, die der analytischen Geometrie der algebraischen ebenen Curven zu Grunde liegen.

Wir nehmen an, die Gleichung der Curve sei entweder in Cartesischen oder in projectiven homogenen Coordinaten gegeben.

In dem ersten Fall setzen wir voraus, alle Terme vom Grad Null, eins, zwei, ... in den Coordinaten seien zusammengefasst und die Gleichung habe mithin die Gestalt

$$f = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0,$$

worin im Allgemeinen u_r ein ganzer homogener Ausdruck in den beiden Coordinaten x und y ist.

In dem zweiten Fall nennen wir die drei homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3; wir können dann die Gleichung in die Form

$$f = u_0 x_3^n + u_1 x_3^{n-1} [illegible] \cdot + u_n = 0$$

oder bei Anwendung der Principien der Symbolik der ternären Formen (siehe Bd. 1, Kap. 12) in die symbolische Form

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \cdots = 0 \quad \text{bringen.}$$

Ist $u_0 = 0$, *so geht die Curve (in dem ersten Fall) durch den Coordinatenanfang oder (in dem zweiten Fall) durch die Ecke* ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) *des Fundamentaldreiecks der Coordinaten.*

In diesem Fall stellt die Gleichung $u_1 = 0$ *die Tangente in diesem Punkt (dem Coordinatenanfang bez. der Dreiecksecke) dar.*

Ist $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, *so ist derselbe Punkt ein Doppelpunkt für die Curve* f; *die beiden Tangenten in diesem Doppelpunkt sind durch* $u_2 = 0$ *gegeben. Ist* u_2 *ein vollständiges Quadrat, ohne dass seine Basis, d. h.* $\sqrt{u_2}$ *ein rationaler Factor von* u_3 *ist, so wird der nämliche Punkt eine Spitze; ist dagegen* $\sqrt{u_2}$ *ein rationaler Factor von* u_3, *so ist der Punkt kein Cuspidalpunkt in dem eigentlichen Sinn, sondern ein Punkt, in dem die Curve sich selbst berührt (ein Selbstberührungspunkt, tacnodo, close-point), welcher als die Vereinigung zweier Doppelpunkte zu betrachten ist; in diesem Fall hat die Tangente vier unendlich nahe gelegene Schnittpunkte mit der Curve gemeinschaftlich und nicht nur drei, wie bei dem Cuspidalpunkt.*

Wenn im Allgemeinen $u_0 = u_1 = \cdots = u_{r-1} = 0$ *ist, so wird der Coordinatenanfang ein* r*-facher Punkt von* $f = 0$, *und die in ihm an die Curve gezogenen* r *Tangenten sind durch* $u_r = 0$ *bestimmt.*

Liegt ein Doppelpunkt vor, so müssen die drei Derivirten von f *nach* x_1, x_2, x_3 *Null sein, d. h. die Coordinaten des Doppelpunkts müssen den drei Gleichungen*

$$a_x^{n-1} a_1 = a_x^{n-1} a_2 = a_x^{n-1} a_3 = 0 \quad \textit{genügen.}$$

Eliminirt man die x *aus den drei Gleichungen, so ergibt sich eine Gleichung*

$$R = 0,$$

worin R *eine invariante Bildung der Coefficienten der Gleichung der Curve ist.*

Diese Invariante heisst *Discriminante der Curve. Ihr Verschwinden ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass* f *einen Doppelpunkt habe.*

Abgesehen von älteren speciellen Arbeiten sind die ersten systematischen Forschungen über die allgemeine Theorie der Curven in der *Introductio in anal. infin.* von Euler, 1748 und der *Introduction à l'anal. des lignes courbes algebr.*, Genevae 1750 von Cramer enthalten. Euler, *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des courbes*, Berl. Ak., 1748 verdankt man auch die Erklärung des scheinbaren Widerspruchs, dass zwei Curven n^{ter} Ordnung sich in einer grösseren Anzahl von Punkten schneiden, als zur Bestimmung einer der Curven nöthig sind.

Auf sie folgten, wenn man von Lamé, Gergonne etc. absieht, die sehr wichtigen Arbeiten Plücker's: *System der analyt. Geom.*, Berlin 1835; *Die Theorie der algebraischen Curven*, 1839 und andere Abhandlungen desselben Autors in dem *Journ. de Liouville*, 1834, 1837, in denen Plücker die berühmten Formeln entwickelte, die seinen Namen führen.

Für die Lehre von den singulären Punkten sind von Bedeutung: Puiseux, *Journ. de Liouville*, 1850; Cayley, *Quart. Journ.*, 7, 11; Crelle, 64, etc.; Halphén, *Mém. des sav. étrang.*, 26; *Compt. rend.*, 78, 80; Stolz, *Math. Ann.*, 8, etc.

Eine grundlegende Arbeit über die allgemeine Theorie der Curven war die *Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* von Cremona, Bologna 1862, auch in *Bologna, Acc. Mem.*, 12, 1861, deutsch von M. Curtze, separate Ausg. 1865. Alle Hauptresultate findet man systematisch geordnet und auch auf analytische Art entwickelt in den bekannten Büchern von Salmon, *Treatise on the higher plane curves*, das in verschiedene Sprachen übersetzt wurde (vergl. das Namenregister), und von Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*. In den folgenden Paragraphen werden wir weitere historische und literarische Angaben in Bezug auf die dort behandelten Gegenstände machen.

§ 2. Die Theorie der Polarität. Covariante Curven.

Wenn eine symbolisch durch

$$f = a_x^n = b_x^n = \cdots = 0 \quad \text{(siehe Bd. 1, Kap. 12)}$$

dargestellte Curve gegeben ist, so heissen die durch

$$\begin{gathered} a_x^{n-1} a_y = 0, \\ a_x^{n-2} a_y^2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_x a_y^{n-1} = 0 \end{gathered}$$

dargestellten Curven bez. die *erste, zweite, ... Polare* des Pols y in Bezug auf die gegebene Curve. Die linken Seiten dieser Gleichungen ergeben sich, wenn man auf f ein-, zwei-, $\cdots$ mal den sogenannten Polarenprocess ausübt, der in unserem Fall (in dem *ternären Gebiet*) bis auf einen Zahlenfactor durch das Symbol

$$\Delta = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

dargestellt wird (siehe Bd. 1, p. 263, 264).

Wenn von dem Punkt y aus eine Gerade gezogen wird, welche die Curve in n Punkten schneidet, so trifft diese Gerade die erste, zweite, ... Polare von y in den harmonischen Mittelpunkten $(n-1)^{\text{ter}}$, $(n-2)^{\text{ter}}$, ... Ordnung von y in Bezug auf die Gruppe der n Schnittpunkte.

Diese Eigenschaft könnte man der Definition der Polarcurven zu Grunde legen.

Wenn der Punkt y auf der r^{ten} Polaren von z liegt, so ist z auf der $(n-r)^{\text{ten}}$ Polaren von y gelegen.

Liegt der Pol y auf der gegebenen Curve, so gehen seine sämmtlichen Polarcurven durch ihn und berühren in ihm die gegebene Curve.

Die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare (Polargerade) eines Punkts, welcher der Fundamentalcurve angehört, ist die Tangente in diesem Punkt.

Die $n(n-1)$ Punkte, in denen die erste Polare eines Punkts y die gegebene Curve schneidet, sind die Berührungspunkte der von y an die gegebene Curve gezogenen Tangenten.

Ein r-facher Punkt der Fundamentalcurve ist vielfach von der Ordnung $r-s$ für die s^{te} Polare eines beliebigen Pols.

Wenn eine Curve in eine Gerade und in eine andere Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfällt, so besteht die erste Polare eines Punkts der Geraden aus dieser Geraden und der ersten Polaren in Bezug auf die Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die r^{te} Polare eines Punkts O_r in Bezug auf die s^{te} Polare eines Punkts O_s fällt mit der s^{ten} Polare von O_s bez. der r^{ten} Polaren von O_r zusammen.

Wenn die Fundamentalcurve einen Doppelpunkt D hat, so geht die erste Polare eines willkürlichen Pols O durch D und hat dort die in Bezug auf die beiden Tangenten im Doppelpunkt mit DO harmonisch conjugirte Gerade zur Tangente. Ist der Doppelpunkt ein Cuspidalpunkt, so ist die Tangente an die erste Polare die Cuspidaltangente selbst.

Die ersten Polaren aller Punkte einer Geraden bilden ein Büschel von Curven mit denselben $(n-1)^2$ Grundpunkten.

Der Polarkegelschnitt eines Doppelpunkts zerfällt in zwei Gerade, welche die beiden Tangenten im Doppelpunkt sind.

Der Polarkegelschnitt eines Inflexionspunkts zerfällt in zwei Gerade, von denen die eine die Inflexionstangente ist.

Wenn ein Punkt der Fundamentalcurve das System zweier Geraden zum Polarkegelschnitt hat, so ist er entweder ein Doppel- oder ein Inflexionspunkt der Fundamentalcurve.

Wenn der Pol eine Curve m^{ter} Ordnung durchläuft, so hüllt die Polargerade eine Curve $m(n-1)^{\text{ter}}$ Classe ein.

Auf jeder Geraden gibt es $2(n-2)$ Punkte, deren erste Polaren von der Geraden berührt werden; die Polarkegelschnitte der Berührungspunkte berühren diese Gerade.

Ein Pol, der mit n Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung in einer Geraden liegt, hat die nämliche Polargerade in Bezug auf die Curve und in Bezug auf das System der n Tangenten in den n Punkten.

Die Polargerade eines in einer bestimmten Richtung unendlich fernen Punkts heisst *Durchmesser der Curve n^{ter} Ordnung.*

Jeder Durchmesser ist der Ort der Centren der mittleren Abstände (vergl. Kap. 2, § 2) *aller Systeme von n Punkten, die auf der Curve durch ein System paralleler Sehnen ausgeschnitten werden.*

Betrachtet man die Curve als Enveloppe ν^{ter} Classe, so heisst der Pol der unendlich fernen Geraden *Centrum.*

Das Centrum ist die Enveloppe (als Punkt) der Geraden, welche parallel zu einem System von ν einander parallelen Tangenten an die Curve sind, wenn diese Geraden durch das Centrum der mittleren Abstände der ν Punkte gelegt werden, welche die ν Tangenten auf einer zu ihnen senkrechten Geraden bestimmen.

Wenn von einem Punkt O zwei Gerade gezogen werden, welche die Curve in den Punkten

$$R_1, R_2, \ldots, R_n;\ S_1, S_2, \ldots, S_n$$

schneiden, so ist das Verhältniss

$$\frac{OR_1 \ldots OR_n}{OS_1 \ldots OS_n}$$

constant, wie man auch den Punkt O wählen mag, wenn nur die Richtung der beiden Transversalen dieselbe bleibt. Das Newton'sche Theorem, Enum. lin. tertii ordinis, London 1711.

Man habe ein Polygon $ABC\ldots$, dessen Seiten eine Curve n^{ter} Ordnung in n Punkten schneiden; bezeichnet man mit $(B)_1$, $(B)_2$ die Producte der von B bis zu den n Punkten gerechneten, bez. auf den Seiten BC, BA entstehenden Segmente, mit $(C)_1$, $(C)_2$ die analogen Producte etc., *so besteht die Relation*

$$(A)_1(B)_1(C)_1\cdots=(A)_2(B)_2(C)_2\cdots,$$

das *Carnot*'sche Theorem, *Géom. de position*, p. 437.

Wenn auf jeder durch einen Punkt O gezogenen Geraden, welche die Curve in $R_1, R_2, \ldots, R_n$ schneidet, ein Punkt R derart bestimmt wird, dass

$$\frac{n}{OR}=\frac{1}{OR_1}+\frac{1}{OR_2}+\cdots$$

ist, oder dass

$$\sum_1^n\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_i}\right)=0$$

wird, so ist der Ort von R eine Gerade. Das Cotes'sche Theorem, Harmonia mensurarum, Cambridge 1722. *Diese Gerade ist die Polare von O.*

Aehnlich gilt der Satz: *Der Polarkegelschnitt des Punkts O ist der Ort eines Punkts R, welcher der Relation genügt:*

$$\sum_{ij}\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_i}\right)\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_j}\right)=0, \text{ etc.}$$

Man ziehe durch einen Punkt O eine Gerade, welche die Curve in n Punkten schneidet und lege durch diese n Punkte die Tangenten an die Curve; *wenn dann durch O eine beliebige andere Transversale gezogen wird, welche die Curve in $R_1, \ldots, R_n$ und die Tangenten in $r_1, \ldots, r_n$ trifft, so ist*

$$\sum_1^n\frac{1}{OR_i}=\sum_1^n\frac{1}{Or_i} \text{ (das Maclaurin'sche Theorem).}$$

Wir führen jetzt drei wichtige covariante Curven ein, die Hesse'sche, Steiner'sche oder *Kerncurve* und die Cayley'sche.

Der Ort der Doppelpunkte der ersten Polaren der Punkte der Ebene ist die Hesse'*sche* und der Ort der Punkte, deren erste Polaren einen Doppelpunkt haben, die Steiner'*sche Curve*.

Die Punkte dieser beiden Curven entsprechen sich ein-eindeutig. Die Enveloppe der Geraden, die einen Punkt der Steiner'schen mit dem entsprechenden Punkt der Hesse'schen Curve verbinden, ist schliesslich die Cayley'*sche Curve.*

Wenn in symbolischer Bezeichnung (vergl. Bd. 1, Kap. 12)

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \cdots = 0$$

die Gleichung der gegebenen Curve ist, *so lautet die Gleichung der Hesse'schen:*

$$(abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} = 0,$$

oder wenn $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *gesetzt wird:*

$$\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13} \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23} \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung der Steiner'schen Curve erhält man dann durch Elimination von x aus den drei Gleichungen

$$a_x^{n-2} a_y a_1 = 0,$$
$$a_x^{n-2} a_y a_2 = 0,$$
$$a_x^{n-2} a_y a_3 = 0.$$

Die hier folgende Zusammenstellung gibt die Werthe der Plücker'schen Zahlen (Ordnung, Classe, etc.) für diese drei Curven an.

Es wird vorausgesetzt, die gegebene Curve sei allgemein, d. h. besitze keine Doppel- und Cuspidalpunkte, und sie sei von der Ordnung n.

I. Die Hesse'sche Curve.

Geschlecht $= \frac{1}{2}(3n - 7)(3n - 8)$,
Ordnung $= 3(n - 2)$,
Classe $= 3(n - 2)(3n - 7)$,
Doppelpunkte $= 0$,
Cuspidalpunkte $= 0$,
Doppeltangenten $= \frac{27}{2}(n - 1)(n - 2)(n - 3)(3n - 8)$,
Wendetangenten $= 9(n - 2)(3n - 8)$.

II. Die Steiner'sche Curve.

Geschlecht	$= \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$,
Ordnung	$= 3(n-2)^2$,
Classe	$= 3(n-1)(n-2)$,
Doppelpunkte	$= \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$,
Cuspidalpunkte	$= 12(n-2)(n-3)$,
Doppeltangenten	$= \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$,
Wendetangenten	$= 3(n-2)(4n-9)$.

III. Die Cayley'sche Curve.

Geschlecht	$= \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$,
Ordnung	$= 3(n-2)(5n-11)$,
Classe	$= 3(n-1)(n-2)$,
Doppelpunkte	$= \frac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16)$,
Cuspidalpunkte	$= 18(n-2)(2n-5)$,
Doppeltangenten	$= \frac{1}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1)$,
Wendetangenten	$= 0$.

Wenn die gegebene Curve Doppel- und Cuspidalpunkte hat, so sind an dieser Tabelle Aenderungen vorzunehmen.

Für $n = 3$ verlieren die Formeln für die Cayley'sche Curve ihre Gültigkeit; in diesem Fall sind die Hesse'sche und Steiner'sche Curve eine und dieselbe Curve 3^{ter} Ordnung, die Cayley'sche ist statt von der 6^{ten} Classe nur von der 3^{ten}, statt 12^{ter} nur 6^{ter} Ordnung und hat anstatt 18 Cuspidalpunkte nur 9.

Von der Hesse'schen, Steiner'schen und Cayley'schen Curve lassen sich verschiedene Definitionen geben, die ebenso vielen specifischen Eigenschaften entsprechen.

Die Hesse'sche Curve einer Curve ist:

a) *der Ort eines Punkts, in welchem sich zwei (und mithin unendlich viele) erste Polaren berühren;*

b) *der Ort der Doppelpunkte der ersten Polaren;*

c) *der Ort eines Pols, dessen Polarkegelschnitt in zwei Gerade zerfällt;*

d) *der Ort eines Pols, dessen Polargeraden in Bezug auf die ersten Polaren der Curve sich in demselben Punkt treffen.*

Die Steiner'sche Curve einer Curve ist:

a) *der Ort der Pole der ersten mit Doppelpunkten versehenen Polaren;*

b) *der Ort der Schnittpunkte der Paare von Geraden, welche Polarkegelschnitte darstellen;*

c) *die Enveloppe der Polargeraden der Punkte der Hesse'schen Curve;*

d) *der Ort der Punkte, deren erste Polaren die Hesse'sche Curve berühren;*

e) *Der Ort eines Punkts, in welchem sich die Polargeraden eines und desselben Pols in Bezug auf die ersten Polaren der Fundamentalcurve schneiden.*

Die Cayley'sche Curve einer Curve ist:

a) *die Enveloppe der Geraden, welche die sich entsprechenden Punkte der Hesse'schen und Steiner'schen Curve verbinden;*

b) *die Enveloppe der in den Berührungspunkten der ersten Polaren gemeinschaftlichen Tangenten.*

In einem Doppelpunkt der Fundamentalcurve hat auch die Hesse'sche Curve einen Doppelpunkt mit denselben Tangenten.

In einem Cuspidalpunkt der Fundamentalcurve hat die Hesse'sche Curve einen dreifachen Punkt und zwei ihrer Züge berühren die Cuspidaltangente; in diesem Punkt sind acht Schnittpunkte der Curve mit der Hesse'schen als vereinigt zu betrachten.

Die Hesse'sche Curve geht durch die Inflexionspunkte der Fundamentalcurve.

Die Steiner'sche sowohl als die Cayley'sche Curve berühren die Inflexionstangenten der Fundamentalcurve.

Die Hesse'sche Curve berührt in jedem beliebigen ihrer Punkte die zweite Polare des entsprechenden Punkts der Steiner'schen Curve.

Die Tangente in einem Punkt O der Hesse'schen Curve ist die harmonische Conjugirte der Geraden, welche O mit dem entsprechenden Punkt O' der Steiner'schen Curve verbindet, in Bezug auf die beiden Geraden, welche die erste Polare von O' in dem Doppelpunkt berühren; und die Tangente in O' an die Steiner'sche Curve ist die harmonische Conjugirte von O'O in Bezug auf die beiden Geraden, in welche der Polarkegelschnitt von O degenerirt.

Die Anfänge der Polarentheorie finden sich in den Arbeiten von Newton, Cramer und Anderen über die geradlinigen und krummlinigen Durchmesser der Curven. Bobillier verdankt man allgemeinere Begriffe, *Ann. de Gergonne,* 18, 19, 1828. Auf ihn folgten Plücker, *Crelle,* 5; Grassmann, *Crelle,* 24; De Jonquières, *Journ. de Liouville,* 1857; Cayley, *Phil.*

Trans., 148. Später legte Cremona in seiner citirten *Introduzione* die Polarentheorie der ganzen Lehre von den Curven zu Grund.

Die Hesse'sche Curve wurde von Hesse, *Crelle*, 28, 41 eingeführt und erhielt ihren Namen von Sylvester, *Phil. Trans.*, 143; die Steiner'sche rührt von Steiner, *Crelle*, 47 her und wurde von Cremona, *Intr.*, so benannt, während Steiner selbst sie *Kerncurve* nannte; die Cayley'sche Curve, von Cayley für die Curven dritter Ordnung eingeführt, *Philosophical transactions of the Royal society of London*, Vol. 147, 1857 = *Coll. Math. Pap.*, 2, p. 381, wurde von Steiner, *Crelle*, 47 studirt. Wichtig ist die Clebsch'sche Arbeit, *Crelle*, 64 über die Steiner'sche Curve.

Viele Autoren haben den Versuch gemacht, den Satz zu beweisen, dass bei der Hesse'schen Curve, welche einer *allgemeinen* Curve entspricht, die singulären Punkte fehlen. Cremona nahm ihn als Postulat an; Geiser, *Ann. di mat.*, 9 bewies ihn für die Curven 4^{ter} Ordnung. Andere hierher gehörige Arbeiten sind von Del Pezzo, *Rend. Napoli*, 1883; Brill, *Math. Ann.*, 13; Segre, *Rend. Lincei*, 1895; etc.

§ 3. Lineare Systeme ebener Curven.

Wenn $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0, \cdots$ die Gleichungen von $k+1$ ebenen Curven n^{ter} Ordnung sind, so bildet das durch

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \cdots = 0$$

dargestellte System, worin $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ willkürliche $k+1$ Parameter sind, das, was man ein lineares System k^{ter} Stufe nennt. Für $k = 1$ ergibt sich das *Büschel*, für $k = 2$ das *Netz*, wenn die Curven in *Punktcoordinaten* ausgedrückt werden.

Sind dagegen die Gleichungen in *Geradencoordinaten* gegeben, so erhält man für $k = 1$ ein lineares System, welches *Schar* genannt wird.

Ein lineares System k^{ter} Stufe wird durch $k+1$ Curven n^{ter} Ordnung bestimmt, welche nicht demselben linearen System niedrigerer Stufe angehören.

Für $k > 1$ haben die Curven des Systems im Allgemeinen keinen Punkt gemeinschaftlich (Grundpunkte); wenn jedoch die sämmtlichen $k+1$ Curven, welche das System individualisiren, einen Punkt gemeinschaftlich haben, so gehört dieser Punkt auch allen übrigen Curven des Systems an.

Für $k = 1$ gibt es immer n^2 Grundpunkte des Büschels, d. h. Punkte, durch welche alle Curven des Systems gehen.

Die allgemeine Curve eines linearen Systems hat ausser den Grundpunkten keine vielfachen Punkte. Bertini, *Rend. Ist. Lomb.*, (2), 15, 1882.

Ein lineares System von Curven n^{ter} Ordnung und k^{ter} Stufe bestimmt auf einer Transversalen eine Involution von Punkten n^{ter} Ordnung und k^{ter} Stufe, siehe Kap. 2, § 3.

Unter den Curven eines linearen Systems gibt es $(k+1)(n-k)$ solche, welche eine Berührung k^{ter} Ordnung mit einer gegebenen Geraden (d. h. $k+1$ unendlich nahe Punkte mit ihr gemeinschaftlich) haben.

Es gibt

$$\frac{2^k(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!}$$

Curven eines linearen Systems, von welchen jede eine gegebene Gerade k-mal berührt.

Von den Curven eines Büschels berühren $2(n-1)$ eine gegebene Gerade, und $m(2n+m-3)$ berühren eine gegebene Curve m^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkte und Spitzen. Hat diese letztere d Doppelpunkte und r Spitzen, so sind von dieser Zahl noch $2d+3r$ Curven abzuziehen.

Unter den Curven eines Netzes gibt es $3(n-2)$ von der Art, dass für jede von ihnen eine gegebene Gerade Inflexionstangente ist.

Wenn man die beiden Strahlenbüschel betrachtet, welche zwei von den n^2 Grundpunkten eines Büschels von Curven n^{ter} Ordnung zu Mittelpunkten haben, und wenn man die beiden Strahlen, welche die in diesen beiden Grundpunkten an eine und dieselbe Curve des Büschels gezogenen Tangenten sind, als einander entsprechend ansieht, *so sind die beiden Strahlenbüschel projectiv; mithin ist das anharmonische Verhältniss der vier Tangenten an vier Curven des Büschels in einem und demselben Grundpunkt identisch mit dem der vier Tangenten in einem beliebigen anderen Grundpunkt.* Dieses anharmonische Verhältniss kann man daher *das anharmonische Verhältniss der vier Curven des Büschels* nennen.

Unter den Curven eines Büschels, welche sich sämmtlich in einem Grundpunkt P berühren, gibt es eine, für welche P ein Inflexionspunkt, und eine andere, für welche P ein Doppelpunkt ist.

Unter den Curven eines Büschels, von welchen ein Grundpunkt P Doppelpunkt für alle Curven (mit verschiedenen und von Curve zu Curve variabelen Tangenten) ist, gibt es zwei, für welche P eine Spitze ist; wenn eine der beiden Tangenten allen Curven gemeinschaftlich ist, so gibt es nur eine von ihnen, für welche P eine Spitze ist; und wenn beide Tangenten fest liegen, so gibt es eine Curve des Büschels, für welche P ein dreifacher Punkt ist.

In einem Büschel existiren im Allgemeinen $3(n-1)^2$ *Curven mit Doppelpunkten.*

Dieses Theorem unterliegt Modificationen, wenn die Curven des Büschels mehrfache Punkte verschiedener Natur haben. Siehe darüber Cremona, *Introduzione* etc. und *Ann. di mat.*, 7, 1864.

Sind drei Curven gegeben, deren Gleichungen

$$a_x^n = 0,$$
$$b_x^n = 0,$$
$$c_x^n = 0$$

lauten, so besteht die Bedingung, damit sie demselben Büschel angehören, darin, dass ihre Functionaldeterminante

$$(abc)a_x^{n-1}b_x^{n-1}c_x^{n-1}$$

identisch verschwinde. Siehe Gordan-Noether, *Math. Ann.* 10.

Wenn man von einem Punkt O die Tangenten an alle Curven eines Büschels zieht, so liegen die Berührungspunkte auf einer Curve $(2n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung, welche durch O und durch die* n^2 *Grundpunkte des Büschels geht.*

Die Doppelpunkte der Curven eines Büschels haben dieselbe Polargerade in Bezug auf alle Curven dieses Büschels.

Der Ort eines Punktes, in welchem sich zwei (und mithin unendlich viele) Curven eines Netzes berühren, ist eine Curve $3(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung und heisst die Hesse'sche oder auch die Jacobi'sche Curve des Netzes. Ihre Gleichung lautet, wenn man die bekannten Bezeichnungen der Symbolik anwendet:*

$$(abc)a_x^{n-1}b_x^{n-1}c_x^{n-1} = 0.$$

Sie ist eine Combinante (siehe Bd. 1, Kap. 12, § 13) *des Systems der drei Fundamentalcurven des Netzes; d. h. die linke Seite ihrer Gleichung wird nur mit einem constanten Factor mul-*

tiplicirt, wenn man statt einer der drei Curven eine lineare Combination derselben substituirt.

Die Hesse'sche Curve eines Netzes ist der Ort der Doppelpunkte der Curven des Netzes, oder auch der Ort der Punkte, deren Polargerade in Bezug auf die Curven des Netzes sich in einem Punkt treffen.

Der Ort der Punkte, in welchen sich die in Bezug auf die Curven des Netzes Polargeraden aller Punkte der Hesse'schen Curve schneiden, ist die sogenannte Steiner'sche Curve, und die Enveloppe der Geraden, welche die sich entsprechenden Punkte der Hesse'schen und Steiner'schen Curve verbinden, die sogenannte Cayley'sche Curve.

Die Steiner'sche Curve ist von der Ordnung $3(n-1)^2$ *und die Cayley'sche von der Classe* $3n(n-1)$.

Betrachtet man das Netz der ersten Polaren in Bezug auf eine gegebene Curve, so werden die Hesse'sche, Steiner'sche und Cayley'sche Curven dieses Netzes die gleichnamigen Curven bez. der gegebenen Fundamentalcurve. Siehe § 2.

Die Hesse'sche oder Jacobi'sche Curve des Netzes ist von

der Ordnung:	$3(n-1)$,
Classe:	$3(n-1)(3n-4)$,
dem Geschlecht:	$\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$,
und hat Doppelpunkte:	0,
Spitzen:	0,
Doppeltangenten:	$\frac{27}{2}n(n-1)(n-2)(3n-5)$,
Inflexionstangenten:	$9(n-1)(3n-5)$.

Die Steiner'sche Curve des Netzes ist von

der Ordnung:	$3(n-1)^2$,
Classe:	$3n(n-1)$,
dem Geschlecht:	$\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$,
und hat Doppelpunkte:	$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$,
Spitzen:	$12(n-1)(n-2)$,
Doppeltangenten:	$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2+3n-8)$,
Inflexionstangenten:	$3(n-1)(4n-5)$.

Die Cayley'sche Curve des Netzes ist von

der Ordnung:	$3(n-1)(5n-6)$,
Classe:	$3n(n-1)$,

dem Geschlecht:	$\frac{1}{2}(3n-4)(3n-5)$,
und hat Doppelpunkte:	$\frac{3}{2}(n-1)(5n-8)(5n^2-9n+2)$,
Spitzen:	$18(n-1)(2n-3)$,
Doppeltangenten:	$\frac{3}{2}(n-1)(n^2-2)$,
Inflexionstangenten:	0.

Falls alle Curven eines Netzes einen Punkt gemeinschaftlich haben, hat eine von ihnen dort einen Doppelpunkt; und diejenigen, welche in diesem Punkt eine gegebene Gerade berühren, bilden ein Büschel. Die Hesse'sche Curve geht durch denselben Punkt und hat dort ebenfalls einen Doppelpunkt mit Tangenten, die mit denen der Curve zusammenfallen, welche dort den Doppelpunkt besitzt.

Wenn ferner alle Curven des Netzes einen gemeinschaftlichen Punkt und in ihm dieselbe Tangente besitzen, so gibt es unter ihnen ein Büschel von Curven, für welche er ein Doppelpunkt, und zwei Curven, für welche er eine Spitze ist. Die Hesse'sche Curve hat in ihm einen dreifachen Punkt; zwei der Tangenten in dem dreifachen Punkt fallen mit der gemeinschaftlichen Tangente zusammen.

Wenn alle Curven eines Netzes in einem festen Punkt einen r-fachen Punkt haben, so ist dieser für die Hesse'sche Curve ein $3(r-1)$-facher Punkt.

Jeder Curve des Netzes, welche zwei Doppelpunkte besitzt, entspricht ein Doppelpunkt der Steiner'schen Curve; mithin gibt es in dem allgemeinen Netz

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$$

Curven mit zwei Doppelpunkten.

Aehnlich gibt es in dem allgemeinen Netz

$$12(n-1)(n-2)$$

Curven mit einer Spitze,

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2+3n-8)$$

Büschel von Curven, zwischen denen zwei Berührungen stattfinden, und

$$3(n-1)(4n-5)$$

Büschel von Curven, zwischen denen eine Berührung 2^{ter} Ordnung (eine Osculations- oder dreipunktige Berührung) stattfindet, d. h. die drei unendlich nahe Punkte miteinander gemeinschaftlich haben.

Sämmtliche vorstehende Zahlen erleiden Veränderungen, wenn das Netz einfache oder mehrfache Grundpunkte (Basispunkte) hat, d. h. solche, durch welche alle Curven des Netzes gehen.

Ein Netz, dessen sämmtliche Curven sich zu je zweien *in einem einzigen beweglichen Punkt* schneiden, hat Cremona nach Sylvester *homaloidal* zu nennen vorgeschlagen, während Cayley es als *unicursal* bezeichnet.

Alle Curven eines homaloidalen Netzes sind vom Geschlecht Null.

Wenn $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ *die Vielfachheiten der Basispunkte für jede Curve eines homaloidalen Netzes sind, so bestehen die Relationen:*

$$\sum_1^s \varrho_i^2 = n^2 - 1,$$

$$\sum_1^s \frac{\varrho_i(\varrho_i - 1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

$$\sum_1^s \frac{\varrho_i(\varrho_i + 1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - 2,$$

$$\sum_1^s \varrho_i = 3(n-1).$$

Ein lineares System k^{ter} Stufe von Curven n^{ter} Ordnung heisst *vollständig*, wenn es durch die Basispunkte bestimmt ist, d. h. wenn es das lineare System aller Curven n^{ter} Ordnung ist, die mit gegebener Vielfachheit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ durch s bestimmte feste Punkte gehen.

Es bestehen dann die Fundamentalbeziehungen (Erweiterungen der Formeln für das homaloidale Netz):

$$n^2 - \sum_1^s \varrho_i^2 = D \text{ (Grad)},$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_1^s \frac{\varrho_i(\varrho_i - 1)}{2} = p \text{ (Geschlecht)},$$

$$\frac{n(n+3)}{2} - \sum_1^s \frac{\varrho_i(\varrho_i + 1)}{2} \leqq k \text{ (Dimension oder Stufe)}.$$

Der Grad D stellt die Anzahl der variabelen Schnitte zweier Curven des Systems dar.

Das System heisst *überreichlich* (*sovrabbondante*), wenn in der letzten Formel das Zeichen $<$, *regulär*, wenn das Zeichen $=$ zu nehmen ist.

Ein System ist regulär, wenn $D > 2p - 2$ oder $k > p$ ist. Siehe darüber Segre, *Rend. Palermo,* 1 und Castelnuovo, *Mem. Acc. Torino,* 1891.

Sind drei Curven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 gegeben, so lassen sich für das System der drei Curven covariante Curven construiren, welche der Jacobi'schen und Steiner'schen Curve eines Netzes analog und für $n_1 = n_2 = n_3 = n$ ihnen gleich sind, und welche auch bei ungleichen Ordnungen diese Namen beibehalten können.

Die Jacobi'sche Curve des Systems dreier Curven ist von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 - 3$ und der Ort der Punkte, deren Polargeraden in Bezug auf die drei Curven sich in demselben Punkt treffen. Der Ort dieses letzteren Punkts ist die Steiner'sche Curve und *ihre Ordnung*

$$n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 - 2(n_1 + n_2 + n_3) + 3.$$

Die Jacobi'sche Curve der drei Curven ist auch der Ort der Punkte, in welchen sich die in Bezug auf die drei Curven ersten Polaren desselben Punkts schneiden.

Wenn es Punkte giebt, die allen drei gegebenen Curven gemeinschaftlich sind, so gehen die Jacobi'sche und Steiner'sche Curve durch diese Punkte.

Die Jacobi'sche Curve geht auch durch die Doppelpunkte der gegebenen Curven.

Sind $\varphi(x) = a_x^{n_1} = 0$, $\psi(x) = b_x^{n_2}$, $\chi(x) = c_x^{n_3}$ die drei gegebenen Curven, so lautet die Gleichung der Jacobi'schen Curve:

$$(abc) a_x^{n_1 - 1} b_x^{n_2 - 1} c_x^{n_3 - 1} = \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, & \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Theorie der linearen Curvensysteme ist in letzter Zeit nach verschiedenen Richtungen hin studirt worden, soweit sie mit verschiedenen anderen geometrischen Lehren, wie mit der ein-eindeutigen Transformation, mit der Abbildung der Flächen auf eine Ebene und der sogenannten Geometrie der Punktgruppen auf einer algebraischen Curve in Verbindung steht; vergl. § 4.

Zwei Curvenbüschel lassen sich als in projectiver Zuordnung zu einander stehend ansehen und es ergibt sich dann der wichtige Satz, *dass jede algebraische Curve als der Ort der Schnittpunkte* *der sich entsprechenden Curven zweier projectiver Curvenbüschel betrachtet werden kann.* Dieses Theorem wurde von Chasles, *Compt. Rend.*, 41, 1853 für die Curven 3. O. aufgestellt und bewiesen und von Jonquières, *Mém. de l'Ac. de Paris*, 16, 1858 auf den allgemeinen Fall ausgedehnt. Es verallgemeinert den Begriff der *projectiven Erzeugung* der Kegelschnitte.

Von Arbeiten über die linearen Systeme führen wir ausser der *Introduzione* von Cremona an: Jonquières, *Math. Ann.*, 1; Caporali, *Collect. Math.*, Mailand 1881; Jung, *Ann. di mat.*, 15, 16; Guccia, *Rend. Palermo*, 7 etc. Dazu kommen alle Arbeiten, welche die Geometrie der Punktgruppen auf einer Curve behandeln, und von denen in dem folgenden Paragraphen die Rede sein wird.

Ueber die Singularitäten der Jacobi'schen Curve von drei Curven sehe man Gerbaldi, *Rend. Palermo*, 8 nach.

§ 4. Die Punktgruppen auf einer algebraischen Curve.

In der sogenannten *Geometrie auf einer algebraischen Curve* werden die Eigenschaften der Gruppen von Punkten studirt, welche auf einer Grundcurve von der n^{ten} Ordnung durch die Schnitte derselben mit Systemen anderer Curven beliebiger Ordnung entstehen, speciell, wenn diese Systeme *linear* sind, d. h. wenn ihre Gleichungen variabele Parameter *linear* enthalten.

Wenn die Grundcurve eine Gerade ist, so bilden diese Punktgruppen die sogenannten *Involutionen höherer Ordnung*, von denen wir in Kap. 2, § 2 gesprochen haben.

Wir müssen einige Sätze über die Schnittpunkte zweier Curven vorausschicken.

Es liege eine Grundcurve f von der n^{ten} Ordnung vor und sie werde von einer Curve φ von der m^{ten} Ordnung geschnitten, welche durch δ singuläre Punkte von f geht, wobei in δ auch die Zahlen mitgerechnet sind, die angeben, wie oft φ durch einen singulären Punkt von f geht. Die Schnittpunkte der beiden Curven sind nicht unabhängig von einander; ein Theil von ihnen wird durch die anderen bestimmt. *Es sei k die Anzahl der Schnittpunkte der beiden Curven, welche durch alle übrigen bestimmt sind; es bestehen dann die Fundamentalungleichheiten:*

$$\textit{für}\quad m < n-2 \quad \textit{ist}\quad k \leqq mn - \frac{m(m+3)}{2} - \delta,$$
$$\left[= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}\right];$$
$$\textit{für}\quad m \geqq n-2 \quad \textit{ist}\quad k \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta.$$

Eine Curve wird eine *adjungirte Curve* genannt, wenn sie $r-1$ mal durch jeden r-fachen Punkt von f geht; hat mithin f keine anderen mehrfachen Punkte, als Doppelpunkte und -Spitzen, so hat eine *adjungirte Curve* nur die Bedingung zu erfüllen, *einfach* durch jeden Doppelpunkt oder jede Spitze von f zu gehen.

Nehmen wir nun an, φ sei eine *adjungirte Curve von der Ordnung* m.

Wenn man alsdann mit k die Anzahl der nm Schnittpunkte von f und φ bezeichnet, welche durch die übrigen bestimmt sind, so bestehen (unter p das Geschlecht von f verstanden) die Ungleichheiten:

$$\text{für} \quad m < n-2 \quad \text{ist} \quad k \leqq p - \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2};$$
$$\text{für} \quad m \geqq n-2 \quad \text{ist} \quad k \leqq p.$$

Beachtenswerth ist, dass in dem zweiten Fall die Zahl k nicht, wie im ersten, von der Ordnung m der schneidenden Curve abhängt, und dass in dem ersten Fall $k \leqq p-1$ für $m = n-3$ wird.

Die Curve φ sei eine *adjungirte Curve*. In ihre Gleichung möge *linear* eine gewisse Anzahl willkürlicher Parameter derart eingehen, dass alle durch Variation dieser Parameter erhaltenen φ ein *lineares System* bilden.

Es sei Q die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte von f mit φ, d. h. die Anzahl der Schnittpunkte, welche beim Uebergang von einer Curve φ zur anderen variiren; wenn k von ihnen durch die übrigen $Q-k$ bestimmt sind, so beträgt die Anzahl der Punkte, die man willkürlich auf f wählen kann, $Q-k=q$; diese Zahl wollen wir die *Mannigfaltigkeit des Systems von Q Punkten* nennen, weil es alsdann ∞^q Gruppen von Q Punkten gibt, in welchen f durch Curven der Art φ geschnitten wird. *Die Zahl q stellt die Anzahl der willkürlichen Parameter dar, die linear in die Gleichung von φ eingehen.* Das eben angegebene Theorem ergibt alsdann:

$$\text{für} \quad m \leqq n-3 \quad \text{ist} \quad q \geqq Q - p + \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2};$$
$$\text{für} \quad m > n-3 \quad \text{ist} \quad q \geqq Q - p.$$

Man kann diese Formeln in eine andere Gestalt bringen, welche erlaubt, eine *obere Grenze* für die Zahl Q anzugeben, wenn die Mannigfaltigkeit q des Systems bekannt ist. Es lässt sich behaupten:

für $m = n - 3$ *ist* $Q \leqq q + p - 1$;
für $m > n - 3$ *ist* $Q \leqq q + p$.

Brill und Noether, *Math. Ann.*, 7 fanden später auch *eine untere Grenze für Q; es ist nämlich immer*

$$Q \geqq \frac{q(q+p+1)}{q+1}.$$

Es existiren ferner, wenn man

$$Q(q+1) - q(q+p+1) = r$$

setzt, ∞^r *Systeme von Q Punkten und der Mannigfaltigkeit q.*

Für $r = 0$ *ist die Anzahl dieser Systeme endlich, nämlich gleich*

$$\frac{2!\,3!\cdots q!\,2!\cdots(p-1-Q+q)!\,p!}{2!\,3!\cdots(2q+p-Q)!}$$

Castelnuovo, *Lincei*, 1889.

Für $q = 1$ *beträgt diese Zahl*

$$\frac{p!}{(p-Q+1)!\,(p-Q+2)!}$$

Brill-Noether, *Math. Ann.* 7.

Wir wollen mit dem Symbol G_Q^q *eine Gruppe* eines linearen Systems von Q Punkten und der Mannigfaltigkeit q bezeichnen und mit g_Q^q das ganze System dieser Gruppen.

Wenn Q grösser als $2p - 2$ *ist, so muss genau* $q = Q - p$ *sein.*

Für $Q = 2p - 2$ *ist* $q = p - 1$ oder, wenn das System kein Specialsystem ist (siehe unten), $q = p - 2$.

Ist f eine unzerlegbare Curve, so existiren p adjungirte linear unabhängige Curven von der Ordnung $n - 3$, *welche auf f keine anderen, als die vielfachen Punkte gemeinschaftlich haben.*

Lässt sich f in k Factoren zerlegen, so existiren

$$p + k - 1$$

derartige adjungirte linear unabhängige Curven von der Ordnung $n - 3$. Christoffel, *Ann. di Mat.*, 10.

Die adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden die Grundcurve f (ausser in den singulären festen Punkten) noch in $2p - 2$ Punkten. Nun existirt das interessante Theorem:

Jedes q-fach unendliche lineare System von Q Punkten kann immer auf der Grundcurve f von einem System adjungirter Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung ausgeschnitten werden, wenn*

$$q \geq Q - p + 1 \quad \textit{ist;}$$

diese Bedingung schliesst nach einem früheren Theorem aus, dass $Q > 2p - 2$ ist.

Ins Besondere:

Wenn ein Büschel ($q = 1$) adjungirter Curven p bewegliche Schnittpunkte mit der Curve f hat, so liegt jede Gruppe dieser p Punkte auf einer adjungirten Curve $(n - 3)^{ter}$ Ordnung.

Eine Gruppe von Q Punkten, durch welche wenigstens eine adjungirte Curve $(n - 3)^{ter}$ Ordnung geht, heisst eine *Specialgruppe;* das System, welchem sie angehört, wird *Specialsystem* genannt.

Das System g_{2p-2}^{p-1} pflegt man *canonisches System* zu nennen. *Es hat keine festen Punkte und ist das einzige System dieser Art* (siehe oben).

Eines der grundlegenden Theoreme für die Theorie, die uns hier beschäftigt, ist der sogenannte *Restsatz*, der nachweist, dass die Punktgruppen auf einer Curve sich gewissermassen als unabhängig von den Curven auffassen lassen, durch welche sie ausgeschnitten werden.

Zwei Punktgruppen G_Q, $G_{Q'}$ heissen *corresidual* zu einander, wenn eine andere Gruppe G_R von der Beschaffenheit existirt, dass die beiden Gruppen G_Q, G_R alle beweglichen Schnittpunkte (mit Ausschluss der singulären Punkte) von f mit einer adjungirten Curve und die Gruppen $G_{Q'}$, G_R alle beweglichen Schnittpunkte von f mit einer anderen adjungirten Curve darstellen. Die beiden Gruppen G_Q und G_R heissen dann *residual zueinander.*

Der *Restsatz* lautet:

Wenn G_Q und $G_{Q'}$ in Bezug auf die Gruppe G_R corresidual zu einander sind, so müssen sie es auch in Bezug auf eine beliebige andere Gruppe $G_{R'}$ sein, welche mit einer von ihnen das vollständige System der beweglichen Schnittpunkte von f mit einer beliebigen anderen Curve bildet. Mit anderen Worten: *Die Eigenschaft zweier Punktgruppen, corresidual zu einander zu sein, ist von der zu beiden residualen Punktgruppe unabhängig; d. h. sie hängt nicht von den Curven ab, von welchen diese Punktgruppen auf f ausgeschnitten werden.*

Oder auch: *Wenn man durch G_Q eine beliebige andere adjungirte Curve legt, welche f in einer Gruppe $G_{R'}$ schneidet, so bilden die Gruppen $G_{R'}$ und G_Q das vollständige System der beweglichen Schnittpunkte von f mit einer adjungirten Curve.*

Dieser Satz, von algebraischem Standpunkt aufgefasst, ist bei Brill-Noether, *Gött. Nachr.*, 1873 und *Math. Ann.*, 7 zu finden. Seinen Ursprung jedoch verdankt er dem Abel'schen Theorem über die transcendenten Integrale. Siehe *Repertorium*, I, Kap. 15, § 8.

Es liege eine Gruppe von Q Punkten vor, welche einem linearen System g_Q^q angehört. Es sei $\tau = r + 1$ die Anzahl der linear unabhängigen adjungirten Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die Q Punkte gehen; alsdann ist die Mannigfaltigkeit q durch die Formel

$$q = Q - p + r + 1 \quad \textit{gegeben.}$$

Dieses ist das sogenannte Riemann-Roch'sche Theorem, *Crelle*, 64. Es wurde bei der Untersuchung der algebraischen Functionen entdeckt, siehe *Repert.* I, p. 395.

Die Zahl r gibt die Anzahl der nicht homogenen Parameter an, welche linear in die allgemeine Gleichung einer durch die Q Punkte gehenden adjungirten Curve $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung eingehen; sie stellt die Mannigfaltigkeit des Systems dieser Curven dar. Für ein allgemeines System (kein Specialsystem) ist $r + 1 = 0$.

Das Riemann-Roch'sche Theorem lässt sich auch auf die folgende Art anders fassen und heisst dann (nach Klein) das Brill-Noether'sche *Reciprocitätstheorem*:

Eine adjungirte Curve $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung schneide f in $2p - 2$ Punkten, die in zwei Gruppen von $Q + R = 2p - 2$ Punkten zerfallen; die Gruppe der ersten Q Punkte gehöre einem linearen System von der Mannigfaltigkeit q an; die Gruppe der zweiten R Punkte wird dann einem linearen System von der Mannigfaltigkeit r derart angehören, dass die Relationen

$$q - r = Q - p + 1,$$
$$r - q = R - p + 1$$

bestehen.

Das folgende Theorem, welches eine Folge des Riemann-Roch'schen Satzes ist, wird das Clifford'sche genannt, *Phil. Trans.*, 1878:

Wenn das System g_Q^q ein Specialsystem (d. h. die entsprechende Zahl $r + 1$ grösser als Null) ist, so muss $Q \geqq 2q$ sein.

Wenn ein lineares System g_Q^q gegeben ist, so gibt es gewisse Gruppen von Q dem System angehörigen Punkten, welche zwei oder mehrere zusammenfallende Punkte besitzen; diese Punkte heissen *vielfache Punkte* des Systems.

Die Anzahl der $(q+1)$fachen dem System angehörigen Punkte ist durch die Formel

$$(q+1)(Q+qp-q)$$

gegeben. Siehe Brill, *Math. Ann.*, 4; Clebsch-Lindemann, *Geometrie*, 1, p. 461. Untersuchungen dieser Art haben De Jonquières, *Crelle*, 66; Cayley, Lond. *Phil. Trans.*, 158 = Coll. Math. Pap., 6, p. 191 und Andere geführt.

In dem System g_{2p-2}^{p-1}, d. h. in dem System der sämmtlichen Gruppen von Punkten, welche auf f durch alle zu f adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden, gibt es im Allgemeinen eine endliche Anzahl von Gruppen von nur $p-1$ Punkten, von denen jeder zweimal gezählt wird; diese Anzahl beträgt $(2^p-1)2^{p-1}$; solche Gruppen entsprechen adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche Berührungscurven von f sind, d. h. f in jedem Punkt, in welchem sie es treffen, berühren.

Es gibt ferner $(2^p+1)2^{p-1}$ adjungirte Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche f in p Punkten berühren.

Es kann jedoch f eine derartige Curve sein, dass es unendlich viele solcher Gruppen gibt, nämlich ∞^{m-1} $(m=2, 3, \cdots)$. Das Studium dieser Systeme ist für die Theorie der Abel'schen Functionen von Bedeutung und wurde von Weber, *Math. Ann.*, 13; Kraus, ib., 16 begonnen.

Wir wollen die Resultate von Kraus in Bezug auf die Beschaffenheit einer Curve f, die solche Systeme von Punktgruppen besitzt, hier angeben:

Der Typus einer Curve f, welche ∞^1 Gruppen von $p-1$ Punkten enthält, in welchen sie von einer adjungirten Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung berührt wird, ist für $p>3$ eine Curve $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem Selbstberührungspunkt und mit

$$\frac{(p-4)(p+1)}{2}$$

auf einer Curve $(p-4)^{\text{ter}}$ Ordnung liegenden Doppelpunkten. Für $p=3$ ist dagegen die Curve 5^{ter} Ordnung und hat einen dreifachen Punkt.

Der Typus einer Curve f, auf welcher ein System von ∞^2 Gruppen von $p-1$ Punkten der eben angegebenen Art existirt, ist eine Curve $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $\frac{1}{2}(p-1)(p-6)$ Doppelpunkten, welche auf einer adjungirten Curve $(p-6)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Das kleinste Geschlecht einer solchen Curve ist $p=6$.

Der Typus schliesslich einer Curve f, auf welcher es ein System von ∞^{m-1} $(m > 3)$ *Gruppen der angegebenen Art gibt, ist eine Curve* $(p - m + 2)^{\text{ter}}$ *Ordnung mit*

$$\tfrac{1}{2}[(p-m)^2 - (p+m)]$$

Doppelpunkten, welche auf einer adjungirten die Normalcurve in $m - 3$ *anderen Punkten berührenden Curve* $(p - m + 3)^{\text{ter}}$ *Ordnung liegen. Der kleinste Werth von* p *für* $m = 4$ *ist* $p = 9$.

Die Existenz solcher Systeme von Gruppen entspricht der Existenz von Funktionen ϑ (siehe *Repert.* 1, Kap. 17), die zugleich mit ihren Devirirten der verschiedenen Ordnungen für die Argumente Null verschwinden; doch können wir uns auf diese Einzelheiten nicht einlassen. Vergl. Weber, l. c.

Hierher gehört auch der folgende wichtige Satz von Weber:

Die $(p-1) + (p-1) = 2p - 2$ *Berührungspunkte zweier adjungirter demselben System angehöriger Berührungscurven* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung liegen auf derselben anderen adjungirten Curve* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Daraus folgt die Existenz gewisser *identischer quadratischer Beziehungen*, welche alsdann zwischen den linken Seiten der Gleichungen der adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehen müssen.

Eine sehr wichtige Kategorie von Curven sind die sogenannten *hyperelliptischen*. Vom Standpunkt der Punktgruppentheorie aus werden sie durch die Eigenschaft definirt, dass sie ein System g_2^1 besitzen.

In diesem System g_2^1 *gibt es* $2p + 2$ *Paare zusammenfallender Punkte.*

In einer hyperelliptischen Curve ordnen sich die Punkte derart paarweise zusammen, dass jede adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung, die durch den einen der Punkte des Paares geht, nothwendiger Weise auch durch den anderen gehen muss.*

Eine Formel, welche für die Theorie, die uns hier beschäftigt, von grosser Bedeutung ist und verschiedene Anwendungen zulässt, ist die sogenannte *Correspondenzformel* von Cayley und Brill, welche man als eine Verallgemeinerung der Chasles'schen ansehen kann. Vergl. Kap. 1, § 2.

Nehmen wir an, es sei eine Relation

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = 0$$

vom r^{ten} Grad in (x) und dem s^{ten} in (y) festgestellt.

Ist ein Punkt (x) gegeben, so bestimmt diese Relation eine Curve der Ebene, welche die Fundamentalcurve n^{ter} Ordnung f in ns Punkten schneidet und ist ein Punkt (y) gegeben, eine Curve, die f in nr Punkten schneidet.

Man wähle die Punkte (x), (y) auf der Curve f; variirt man (x) auf der Curve f, so ergibt sich eine Reihe von Gruppen von ns Punkten auf f und durch Variation von (y) auf f eine Reihe von Gruppen von nr Punkten. Man erhält mithin *eine Correspondenz zwischen zwei Reihen von Punktgruppen auf f.* Die in Rede stehende Formel gibt die Anzahl der *Doppelpunkte* dieser Correspondenz an.

Wir wollen annehmen, einem Punkt (x) entsprechen β durch die Schnitte von f mit einer Curve der zweiten Reihe gegebene Punkte (y) und diese Curve der zweiten Reihe treffe dann wieder f in γ mit (x) zusammenfallenden Punkten, und wollen ferner voraussetzen, einem Punkt (y) entsprechen α durch die Schnitte von f mit einer Curve der zweiten Reihe gegebene Punkte. Diese Curve der zweiten Reihe muss dann noch γ mal durch (y) gehen und die Anzahl der Punkte (x), welche mit entsprechenden Punkten (y) zusammenfallen, beträgt

$$\alpha + \beta + 2\gamma p.$$

Ist $p = 0$, d. h. f unicursal, so reducirt sich diese Formel auf die Chasles'sche.

Die Coincidenzpunkte bilden immer ein vollständiges System der Schnitte von f mit einer anderen Curve.

Das oben angegebene Theorem wurde zuerst von Cayley aufgestellt, *Compt. Rend.*, 62; *Proc. London math. soc.*, 1; später wurde es von Brill bewiesen, *Math. Ann.*, 6, 7, 31; siehe auch Junker, *Dissert.*, Tübingen, 1889. Andere Beweise sind von Schubert, *Calcül der abzähl. Geom.*, Leipzig 1879, § 18; Bobek, *Wiener Akad.*, 93; Lindemann, *Crelle*, 84; Hurwitz, *Math. Ann.*, 28; Zeuthen, *Math. Ann.*, 40, Segre, *Ann. di mat.*, 22, § 12. Einige dieser Autoren z. B. Hurwitz haben auch ein allgemeineres Theorem betrachtet. In der Clebsch-Lindemann'schen *Geometrie*, Bd. 1, S. 441 wird dem Correspondenzprincip ein besonderer Abschnitt gewidmet.

Den Grund zu der Geometrie der Punktgruppen auf einer Curve hat wohl Riemann gelegt; er betrachtete diese Lehre jedoch vom Standpunkt der Theorie der algebraischen Funktionen auf einer Riemann'schen Fläche (was schliesslich auf dasselbe hinauskommt). Siehe *Repert.*, I, Kap. 15. Später hat sich die Theorie nach verschiedenen Richtungen entwickelt: nach der Richtung, welche man die *functionale* nennen könnte, und die gerade von Riemann und den zahlreichen Arbeiten über die Abel'schen Integrale ausgeht; nach der *algebraisch-geometrischen*, die einer grundlegenden Abhandlung von Brill-Noether, *Math. Ann.*, 7 ihre Entstehung verdankt und der *algebraisch-arithmetischen*, Kronecker, Dedekind, Weber; vergl. besonders *Crelle*, 92. In der letzten Zeit tritt auch noch die *rein geometrische* Auffassungsweise hinzu; wir empfehlen, eine neuere Arbeit von Segre, *Ann. di mat.*, 22 darüber nachzusehen.

Die Theorie der Punktgruppen ist für das Studium der eineindeutigen Transformation der ebenen Curven (siehe weiter unten, § 5) von der grössten Bedeutung, weil die Eigenschaften der Gruppen für diese Transformation invariante Merkmale darstellen.

Der Kürze wegen verzichten wir darauf, alle anderen zahlreichen Arbeiten von Noether, Brill, etc. zu citiren.

Küpper, Bobek und Amodeo, *Lincei*, 1893; *Ann. di mat.*, 21, 24; *Acc. Nap.*, 1896 haben auch die sogenannten k-seitigen Curven studirt, d. h. solche, welche eine lineare Schar g_k^1 besitzen, ohne eine einfach unendliche lineare Schar niedrigeren Grads zu enthalten, und von welchen die hyperelliptischen Curven ein specieller Fall sind.

Selbstverständlich ist jede Curve k-seitig, wenn nur dem k der geeignete Werth beigelegt wird.

Wir fügen noch hinzu, dass man in einer neuen Arbeit von Bertini, *Ann. di mat.*, 22 die Theorie auf algebraische Art behandelt findet. Ueber weitere Angaben siehe das ausgezeichnete Referat über die Geschichte der Theorie von Brill-Noether in den *Jahresber. d. deutsch. Math.-Verein.*, 3, 1892, 1893.

§ 5. Birationale Transformationen der Ebene oder ebener Curven. Mehrdeutige Transformationen.

Wir wollen

$$y_i \equiv f_i(x_1, x_2, x_3)^{*}), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

*) Das Zeichen $\equiv$ bedeutet hier *proportional*; die obigen Relationen sind daher wesentlich nur *zwei*, nicht *drei*.

setzen, worin die f_i ganze rationale Funktionen von der Ordnung n in den x_1, x_2, x_3 (ohne gemeinschaftlichen Factor) bedeuten, und annehmen, dass man durch Auflösung dieser beiden Relationen nach den x

$$x_i \equiv \varphi_i(y_1, y_2, y_3), \ (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

erhalte, worin die φ ebenfalls ganze rationale Funktionen sind. Alsdann sagen wir, die Beziehungen (1) bestimmen *eine ebene birationale oder ein-eindeutige Transformation* in dem Sinn, dass man bei ihnen die Punkte zweier Ebenen (der Ebene x und der Ebene y, die auch superponirt sein können) derart einander zuordnen kann, *dass einem Punkt der einen ein und nur ein Punkt der anderen entspricht und umgekehrt.*

Eine solche Transformation wird auch eine *Cremona*-Transformation nach dem Autor genannt, der diese Theorie zuerst in ihrer ganzen Allgemeinheit ausgebildet hat.

Eine der ersten grundlegenden Eigenschaften lautet: *Der Grad der φ_i muss derselbe, wie der Grad der f_i, sein.*

Ferner:

Damit die Transformation ein-eindeutig sei, ist es nöthig, dass das aus den drei Curven

$$f_1 = 0, \ f_2 = 0, \ f_3 = 0$$

gebildete Netz $n^2 - 1$ feste Punkte (Fundamentalpunkte der Transformation) habe. Ein solches Netz heisst bekanntlich (vergl. S. 146) *homaloidal.*

Dasselbe gilt natürlich auch für das Netz der drei Curven $\varphi_i = 0$.

Die Curven $f_i = 0$, $\varphi_i = 0$ müssen sämmtlich vom Geschlecht $p = 0$ sein und ihre vielfachen Punkte müssen ohne Ausnahme in den Fundamentalpunkten der Transformation liegen.

Wenn man annimmt, unter den $n^2 - 1$ Fundamentalpunkten gebe es α_1 einfache für alle Curven, α_2 Doppelpunkte für alle Curven, $\cdots$, α_{n-1}, $(n-1)$-fache für alle Curven, *so müssen zwischen den Zahlen α die folgenden drei Relationen bestehen, von denen jede die Folge der beiden anderen ist:*

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \cdots + (n-1)^2\alpha_{n-1} = n^2 - 1,$$
$$\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\alpha_{n-1} = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2),$$
$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \cdots + \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha_{n-1} = \tfrac{1}{2}n(n+3) - 2.$$

Ist der Werth von n gegeben, so lassen sich aus diesen Formeln die möglichen Werthe für die Zahlen α ableiten;

Tabellen zu diesem Zweck sind von Cremona und Cayley aufgestellt worden.

Ein für alle Curven der Transformation k-facher Fundamentalpunkt heisst *Fundamentalpunkt* k^{ter} *Ordnung.*

Die vorstehenden Formeln gelten, wenn die f (und die φ) in den Fundamentalpunkten keine gemeinschaftlichen Tangenten haben.

Einem Fundamentalpunkt k^{ter} *Ordnung in der einen Ebene entspricht in der anderen Ebene eine Curve* k^{ter} *Ordnung vom Geschlecht* $p = 0$ *(die* k^{te} *Fundamentalcurve).*

Die Fundamentalcurven einer Ebene haben ihre vielfachen Punkte in den Fundamentalpunkten derselben Ebene und schneiden sich gegenseitig nur in ihnen.

Die k^{te} *Fundamentalcurve geht durch den Fundamentalpunkt* h^{ter} *Ordnung dieselbe Anzahl* α_{kh} *mal, wie die* h^{te} *Fundamentalcurve durch den Fundamentalpunkt* k^{ter} *Ordnung.*

Daraus folgt $\alpha_{hk} = \alpha_{kh}$. *Ferner ist die Determinante* $|\alpha_{hk}| = \pm n$.

Jede Fundamentalcurve geht durch einen Fundamentalpunkt k^{ter} *Ordnung* $3k - 1$ *mal.* Sa (Cebxch

Wenn, wie oben, α_i *die Anzahl der Fundamentalpunkte* i^{ter} *Ordnung in einer der Ebenen und* β_i *die analoge Anzahl in der anderen Ebene bezeichnet, so ist* $\sum \alpha_i = \sum \beta_i$ *und die Zahlen* β *unterscheiden sich von den Zahlen* α *nur der Anordnung nach.* *Cremona'sches Theorem.*

Die Summe der drei Ordnungszahlen für die drei höchsten Fundamentalpunkte einer Transformation n^{ter} *Ordnung ist grösser als* n.

Sehr wichtig ist das folgende Theorem:

Jede Cremona-Transformation lässt sich durch eine Reihenfolge quadratischer Transformationen ersetzen, indem man die drei Fundamentalpunkte einer solchen in die höchsten Basispunkte des Systems der Transformationscurven hineinlegt.

Dieses Theorem wurde gleichzeitig von Clifford (siehe Cayley, *Proc. of the Lond. math. Soc.*, 3), Noether, *Math. Ann.*, 3; 5 und Rosanes, *Crelle*, 73 gefunden.

Bei einer quadratischen Transformation ($n = 2$) *entsprechen den Geraden der einen Ebene in der anderen Kegelschnitte, die durch drei feste Punkte gehen, und dem Schnittpunkt zweier Geraden entspricht der vierte Schnittpunkt der beiden entsprechenden Kegelschnitte.*

Die Gleichungen der quadratischen Transformation lassen sich immer auf die Form reduciren (Cayley):

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3.$$

Legt man von den drei Fundamentalpunkten zwei in die beiden imaginären unendlich fernen Kreispunkte der Ebene und den dritten in den Anfangspunkt der Cartesischen Coordinaten, so erhält man die sogenannte *Inversion* oder *Transformation durch reciproke Radienvectoren.* Manche Autoren geben auch der allgemeinen quadratischen Transformation den Namen *Inversion.*

Bei einer quadratischen Transformation entspricht einer Curve m^{ter} Ordnung, die k_1, k_2, k_3 mal durch die drei Fundamentalpunkte geht, eine Curve $(2m - k_1 - k_2 - k_3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $m - (k_2 + k_3)$, $m - (k_3 + k_1)$, $m - (k_1 + k_2)$ mal durch die drei Fundamentalpunkte der eigenen Ebene geht.

Bei einer Transformation n^{ter} Ordnung entspricht einer Curve m^{ter} Ordnung, welche l_i mal durch einen Fundamentalpunkt r_i^{ter} Ordnung geht, eine Curve von der Ordnung $\mu = nm - \sum_i r_i l_i$, die

$$\lambda_k = m s_k - \sum_i f_i \alpha_{ik} \qquad l_i$$

mal durch jeden Fundamentalpunkt s_k^{ter} Ordnung geht; dabei haben die α_{ik} die oben angegebene Bedeutung.

Soll die Transformation nicht *für die ganze Ebene* ein-eindeutig sein, sondern nur für die Punkte zweier sich entsprechender Curven F und F', so braucht das Transformationsnetz nicht, wie bisher, homaloidal zu sein. *Es dürfen sich aber die Curven des Netzes, welche sich in einem Punkt von F treffen, nur dann auch noch in einem anderen Punkt von F schneiden, wenn dieser letztere Punkt ein Fundamentalpunkt, d. h. allen Curven des Netzes gemeinschaftlich ist.*

Bei jeder birationalen Transformation bleibt das Geschlecht jeder Curve unverändert. **Riemann's** sogenannter *Satz von der Erhaltung des Geschlechts.*

Eine nicht reducibele, rationale (unicursale) Curve lässt sich birational in eine Gerade transformiren.

Jede Curve vom Geschlecht Eins (elliptische Curve) kann birational in eine Curve 3^{ter} Ordnung transformirt werden.

Die adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung (vergl. § 4) zeigen bei einer *birationalen* Transformation eine bemerkenswerthe Eigenschaft, nämlich:

Wenn in Folge einer birationalen Transformation aus einer Curve F von der Ordnung n eine Curve F' von der ν^{ten} Ordnung wird, so transformirt sich das System der Schnittpunkte von F mit den adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung von F in das System der Schnittpunkte von F' mit seinen adjungirten Curven $(\nu-3)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Betrachtet man ein Netz von adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bezügl. einer gegebenen Curve F vom Geschlecht p, nimmt die Basispunkte des Netzes sämmtlich auf der Curve F an und denkt sich schliesslich dieses Netz als Basis einer birationalen Transformation der Curve, *so verwandelt sich die Curve F in eine solche $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit vielfachen Punkten, die $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten gleichwerthig sind.*

Eine solche Curve kann man als den *Normaltypus* einer Curve vom Geschlecht p ansehen.

Wählt man nun auf F die $p-3$ Basispunkte des Netzes auf geeignete Art aus, so wird die transformirte Curve eine solche von der *kleinsten Ordnung,* in die sich überhaupt eine Curve vom Geschlecht p verwandeln lässt; *diese kleinste Ordnung ist:*

$$\begin{array}{lll} \text{die } 2\pi+2^{\text{te}} & \text{für} & p=3\pi, \\ \quad ,, \quad 2\pi+3^{\text{te}} & \text{für} & p=3\pi+1, \\ \quad ,, \quad 2\pi+4^{\text{te}} & \text{für} & p=3\pi+2, \end{array}$$

Brill-Noether, *Math. Ann.*, 7.

An diese Betrachtungen schliesst sich das Problem an, die Anzahl der *Moduln* einer Curve von gegebenem Geschlecht zu bestimmen, d. h. die Anzahl derjenigen Functionen der Coefficienten der Curvengleichung, welche sich bei jeder beliebigen birationalen Transformation als *absolute Invarianten* verhalten.

Man kommt zu dem folgenden Resultat (Riemann):

Für $p=0$, d. h. also für rationale Curven ist die Anzahl der Moduln Null, für $p=1$, d. h. für elliptische Curven, beträgt diese Zahl 1 *und für $p>1$ ist sie $3p-3$.*

Eine wichtige Anwendung finden die Cremona-Transformationen der Ebene auf die sogenannte *Zerlegung der Singularitäten.*

Mittelst einer Cremona-Transformation kann man aus einer Curve mit vielfachen Punkten, in welchen die Tangenten zusammenfallen, eine Curve mit nur gewöhnlichen Singularitäten d. h. nur mit vielfachen Punkten, in welchen die Tangenten getrennt sind, ableiten.

Dieses Problem hat speciell Noether, *Gött. Nachr.*, 1871; *Math. Ann.*, 9 behandelt.

Man kann ferner durch birationale Transformationen eine Curve, die nur gewöhnliche Singularitäten hat, in eine andere verwandeln, welche nur Doppelpunkte besitzt. Siehe Bertini, *Math. Ann.*, 44.

Die *quadratischen* birationalen Transformationen wurden von Magnus untersucht, *Sammlung von Aufg.* etc., Berlin 1833, von Steiner, *Crelle*, 8 und später von Schiaparelli, *Mem. Acc. Torino*, 1862; die allgemeine Theorie der birationalen Transformationen dagegen hat Cremona begründet, *Acc. Bologna*, 1863, 1865; *Giorn. di Batt.*, 1, 3. Andere wichtige Arbeiten sind von Cayley, *Proc. Lond. math. Soc.*, 3, 1870; Rosanes, *Crelle*, 73; Clebsch, *Math. Ann.*, 3; Noether, *ib.*, 5.

Wir empfehlen, die Darstellung der Theorie der birationalen Transformationen von Ebenen sowohl wie von Curven in der *Geom.* von Clebsch-Lindemann zu Rath zu ziehen. Bezüglich neuerer Untersuchungen vergl. man: Fano, *Ueber Gruppen insbesondere Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und des Raumes. Monatshefte für Math. und Physik*, 9. Jahrg., 1898.

Man hat auch die nicht ein-eindeutigen (mehrdeutigen) Transformationen einer Ebene in eine andere studirt ebenso wie die mehrdeutigen Transformationen einer Curve in eine andere.

Eine Formel, welche die Geschlechter zweier nicht in ein-eindeutiger Zuordnung stehender Curven verbindet, ist von Zeuthen:

Es mögen zwei Curven vorliegen, die sich derart entsprechen, dass einem Punkt der ersten (vom Geschlecht p) m Punkte der zweiten (vom Geschlecht p') und einem Punkt der zweiten m' Punkte der ersten entsprechen. Auf den beiden Curven gebe es μ bez. μ' Coincidenzen, d. h. es komme μ mal vor, dass auf der ersten Curve von den einem Punkt der zweiten entsprechenden Punkten zwei zusammenfallen etc. *Alsdann gilt die Formel*, Zeuthen, *Math. Ann.*, 3:

$$\mu - \mu' = 2m'(p-1) - 2m(p'-1).$$

Für $m = m' = 1$ erhält man die ein-eindeutige Zuordnung und aus der Formel folgt dann ferner $p = p'$. *Riemann'sches Theorem.*

Zu den mehrdeutigen Correspondenzen zwischen zwei Ebenen gehören die *isogonalen* (*gleichwinkligen*), bei welchen die Winkel unverändert bleiben; siehe das Werk von Holzmüller, *Theor. der isog. Verwandtsch.*, Leipzig, 1883.

Die wichtigsten Arbeiten über die mehrdeutigen Transformationen sind von Ch. Wiener, *Math. Ann.*, 3; De Paolis, *Mem. Lincei*, 1877, 1878; Noether, *Erlang. Berichte*, 1878; Jung, *Rend. Lincei*, 1886; *Ist. Lomb.*, 1888; Bertini, *Ist. Lomb.*, 1889.

Kapitel VI.

Die Theorie der ebenen Connexe.

§ 1. Allgemeines.

Nachdem wir in den vorstehenden Kapiteln die Figuren studirt haben, welche analytisch durch das Verschwinden einer ternären Form mit nur *einer* Reihe von Variabelen dargestellt werden, gehen wir nun zu den Formen mit zwei Reihen von Variabelen über.

In den §§ 11, 12, 21 des Kapitels XII im 1^{ten} Band war von solchen ternären Formen mit zwei Reihen von Variabelen, d. h. mit einer Reihe von Variabelen x und einer Reihe von contragredienten Variabelen u die Rede.

Die geometrische Figur, welche analytisch dargestellt wird, indem man diese ternäre Form gleich Null setzt und, wie gewöhnlich, die x als die Punktcoordinaten der Ebene und die u als die Liniencoordinaten (Geradencoordinaten) der Ebene interpretirt, heisst *Connex.*

Wenn die Form vom n^{ten} Grad in den x und vom m^{ten} Grad in den u ist und mithin symbolisch durch

$$a_x^n u_\alpha^m$$

dargestellt wird, so sagt man, der entsprechende Connex sei von der n^{ten} *Ordnung* und der m^{ten} *Classe* und bezeichnet ihn mit dem Symbol (n, m).

Vermöge der Gleichung eines Connexes entspricht jedem Punkt der Ebene eine in Tangentialcoordinaten ausgedrückte Curve m^{ter} Classe und jeder Geraden der Ebene eine in Punktcoordinaten ausgedrückte Curve n^{ter} Ordnung.

Ein Punkt und eine Gerade, die sich in dem Connex entsprechen, heissen zusammengenommen *Element des Connexes.*

Es kann vorkommen, dass ein Punkt der Ebene existirt, der mit *jeder* Geraden der Ebene ein *Element* des Connexes bildet; er heisst dann *Fundamentalpunkt* und ebenso wird *Fundamentalgerade des Connexes* eine Gerade genannt, die mit *jedem* Punkt der Ebene ein Element bildet.

Die Anzahl der Fundamentalpunkte oder -Geraden kann endlich oder auch unendlich gross sein. So lässt sich z. B. die Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten als die Gleichung eines Connexes ansehen, der unendlich viele Fundamentalpunkte hat, welche die unendlich vielen Punkte der Curve sind, weil ein Punkt der Curve mit einer beliebigen Geraden der Ebene zusammengenommen, offenbar ein *Element* des Connexes bildet, d. h. eine Combination von Punkt und Gerade, deren Coordinaten der gegebenen Gleichung genügen.

Der durch die Gleichung

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

dargestellte Connex heisst *identisch*.

Die Gesammtheit der in doppelt unendlicher Anzahl vorhandenen Elemente, welche zweien Connexen gemeinschaftlich sind, bildet eine sogenannte *Coincidenz*. In einer Coincidenz entspricht jeder Geraden der Ebene eine endliche Anzahl ν von Punkten und jedem Punkt eine endliche Anzahl μ von Geraden. Die Zahlen ν und μ heissen *Ordnung* und *Classe* der Coincidenz.

Die Coincidenz, welche ein gegebener Connex mit dem identischen Connex $u_x = 0$ gemeinschaftlich hat, heisst *Hauptcoincidenz.*

Liegen zwei Connexe (n, m), (n', m') vor, so sind die Ordnung und Classe der entsprechenden Coincidenz

$$\nu = nn', \ \mu = mm'.$$

Ist ein Punkt x gegeben, so ergeben sich die μ Geraden der Coincidenz als die Tangenten, welche den Curven gemeinschaftlich sind, die in den beiden Connexen diesem Punkt x entsprechen; ähnliches gilt für die ν Punkte, welche einer Geraden zugeordnet sind.

Die Gesammtheit der dreien Connexen gemeinsamen Elemente oder ein Theil dieser Gesammtheit bildet ein *Curvenpaar*. Eliminirt man aus den Gleichungen der drei Connexe die x, so ergibt sich die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten, und eliminirt man die u, die Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten. *Die Classe der ersten Curve ist durch*

$$mn'n'' + m'n''n + m''nn'$$

gegeben und die Ordnung der zweiten durch

$$nm'm'' + n'm''m + n''mm',$$

wenn (n, m), (n', m'), (n'', m'') *die drei Connexe sind.*

Die Anzahl der Elemente (Punkt und entsprechende Gerade), die vier Connexen (n, m), (n', m'), (n'', m''), (n''', m''') *gemeinschaftlich sind, ist:*

$$mm'n''n''' + m'm''n'''n + m''m'''nn' + mm''n'n''' + \\ + m'm'''n''n + mm'''n''n'.$$

Wie es bei den Curven *singuläre Punkte* geben kann, d. h. solche, für welche die linke Seite der in Punktcoordinaten gegebenen Gleichung der Curve in höherem als dem 1^{ten} Grad verschwindet (d. h. auch die partiellen Derivirten der linken Seite dieser Curve sich annulliren), so können auch die Connexe *singuläre Elemente* haben. Diese treten unter Umständen auch in einfach oder doppelt unendlicher Anzahl auf; d. h. in dem gegebenen Connex können *singuläre Coincidenzen* oder *singuläre Curvenpaare* enthalten sein.

Selbstverständlich führt das Studium der Eigenschaften der Connexe zu der Construction der *invarianten Formen*, welche der Fundamentalform $a_x^n u_\alpha^m$ angehören; davon war kurz in dem 1^{ten} Band die Rede, wo wir auch in Kap. 12, § 12 die Grundzüge eines auf die Connexe angewandten *Uebertragungsprincips* erklärt haben, mit dessen Hülfe sich specielle Formen construiren lassen, die in Bezug auf den Connex covariant sind.

§ 2. **Conjugirter Connex. Geschlecht der Connexe und der Coincidenzen.**

Von den invarianten Bildungen in Bezug auf einen gegebenen Connex ist besonders diejenige von Interesse, die dem sogenannten *conjugirten Connex* entspricht.

Einem gegebenen *conjugirt* heisst der Connex, der in Bezug auf den gegebenen die folgende invariante Beziehung hat: Jedes seiner Elemente (y, v) ist so beschaffen, dass dem Punkt y in dem gegebenen Connex *wenigstens eine* doppelt zu zählende Gerade und der Geraden v in dem gegebenen Connex *wenigstens ein* doppelt zu zählender Punkt entspricht.

Die Gleichung des dem gegebenen $f(x, u) = 0$ conjugirten Connexes $F(y, v) = 0$ erhält man durch Elimination von $\varrho, \sigma, x_i, u_i$ aus den Gleichungen

$$\varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f = 0.$$

Bei der Aufstellung der Gleichung des conjugirten Connexes kann man das Uebertragungsprincip, Bd. 1, Kap. 12, § 12 benutzen. Man hat die Discriminante der doppelt binären Gleichung zu bilden, welche bei Anwendung derselben Bezeichnung, wie in dem erwähnten § 12,

$$\varphi \equiv A_\lambda^n \mathsf{A}_\mu^m, \quad (n, m > 1)$$

lautet, d. h. die Invariante zu bilden, die, gleich Null gesetzt, die Bedingung angibt, unter welcher diese Form gleichzeitig eine doppelte Wurzel in λ und eine doppelte Wurzel in μ hat, unter welcher also zwei Werthe λ_1, μ_1 von λ und μ derart existiren, dass λ_1 eine Doppelwurzel von $\varphi(\lambda, \mu_1) = 0$ und μ_1 eine Doppelwurzel von $\varphi(\lambda_1, \mu) = 0$ ist. Alsdann ändere man nach dem Uebertragungsprincip jede binäre Determinante in eine ternäre um. *Diese Invariante ergibt sich durch Elimination von* $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ *aus den Gleichungen*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_2} = 0;$$

ihr Grad ist der $2\{mn + 2(m-1)(n-1)\}^{\text{te}}$.

Wenn eine der Zahlen n *oder* m *z. B.* m *gleich* 1 *wird, so ist*

$$\varphi = A_\lambda^n \mathsf{A}_\mu = P_1 \mu_1 + P_2 \mu_2$$

und die gesuchte Invariante die Resultante von P_1 *und* P_2.

Der dem Connex $(1, 1)$: $a_x u_\alpha = 0$ *conjugirte Connex ist:*

$$(abu)(\alpha\beta x) = 0;$$

der dem Connex $(2, 1)$: $a_x{}^2 u_\alpha = 0$ *conjugirte:*

$$(abu)^2 (cdu)^2 (\beta\gamma x)(\alpha\delta x) = 0,$$

und der dem Connex $(2, 2)$: $a_x{}^2 u_\alpha{}^2 = 0$ *conjugirte schliesslich:*

$$(W + 3U^2)^3 - 27(UW - U^3 - V^2)^2 = 0,$$

worin

$$U = -\tfrac{1}{12}(abu)^2(\alpha\beta x)^2,$$
$$V = -\tfrac{1}{12}(abu)(bcu)(cau)(\alpha\beta x)(\beta\gamma x)(\gamma\alpha x),$$
$$W = \tfrac{1}{8}(abu)^2(cdu)^2(\alpha\gamma x)^2(\beta\delta x)^2 - 9U^2$$

ist.

Man kann sagen, dass sich der conjugirte Connex auf eine gewisse Art zu dem gegebenen Connex verhält, wie die Gesammtheit der Tangenten an eine Curve zu den Punkten dieser Curve.

Der conjugirte Connex des conjugirten ist wieder der ursprüngliche.

Die Elemente zweier einander conjugirter Connexe entsprechen sich ein-eindeutig.

Die Ordnung und die Classe des conjugirten Connexes eines Connexes (n, m) sind im Allgemeinen:

$$n' = m\{nm + 2(n-1)(m-1)\},$$
$$m' = n\{mn + 2(m-1)(n-1)\}.$$

Von Literatur über die conjugirten Connexe citiren wir ausser der Clebsch-Lindemann'schen *Geometrie* eine Arbeit von Kyparissos Stephanos, *Bull. des sciences math.*, (2), 4, 1880.

Die Beziehung, welche zwischen dem gegebenen Connex und seinem conjugirten besteht, ist ein specieller Fall einer ein-eindeutigen Transformation eines Connexes. Wenn wir, anstatt die Coordinaten y, v der Punkte und Geraden des neuen Connexes, wie am Anfang dieses Paragraphen, den partiellen Derivirten der linken Seite der Gleichung des gegebenen Connexes proportional zu setzen, diese Coordinaten y, v rationalen ganzen Funktionen der x und der u proportional und derart annehmen, dass sich auf ähnliche Art mit Hülfe dieser Beziehungen auch die x und u rational aus den y und v ableiten lassen, so ergibt sich eine *birationale Transformation des Connexes.*

Bei dem Studium dieser Transformation wurde man zu der Untersuchung einer Zahl geführt, die für den Connex das ist, was das *Geschlecht* für die Curven bedeutet, d. h. einer Zahl, die von den Zahlen abhängt, welche die Ordnung und die Classe des Connexes angeben, und deren Werth bei einer birationalen Transformation dieses Connexes unverändert bleibt.

Dieselbe Untersuchung lässt sich auch bei *Coincidenzen* anstellen; dabei ist bemerkenswerth, dass die Connexe und Coincidenzen, da sie keine Mannigfaltigkeiten nur einer Dimension darstellen, nothwendigerweise nicht *ein einziges Geschlecht,* sondern *mehrere* Geschlechter besitzen. Siehe Kap. 9, § 4.

Für einen allgemeinen Connex (n, m) ist die Zahl

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

eines der Geschlechter.

Für eine Coincidenz, welche der Schnitt der beiden Connexe (n, m), (n', m') ist, gibt die Zahl

$$\pi = \frac{(n+n'-1)(n+n'-2)}{2} \cdot \frac{(m+m'-1)(m+m'-2)}{2} -$$
$$- \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} \cdot \frac{(m'-1)(m'-2)}{2} -$$
$$- \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

eines der Geschlechter an.

§ 3. Die Hauptcoincidenz eines Connexes. Integralcurven eines Connexes.

Die Coincidenz, welche ein gegebener Connex mit dem identischen Connex $u_x = 0$ gemeinschaftlich hat, heisst, wie schon oben gesagt wurde, Hauptcoincidenz des gegebenen Connexes (n, m).

Jedem Punkt sind in dieser Figur m durch diesen Punkt gehende Strahlen zugeordnet, welche die von diesem Punkt nach der entsprechenden Curve des Connexes gezogenen Tangenten sind, und jeder Geraden sind n auf ihr gelegene Punkte zugeordnet, welche die Schnitte der Geraden mit der Curve sind, die in dem Connex der gegebenen Geraden entspricht.

Jedem Connex entspricht eine Hauptcoincidenz; umgekehrt aber gibt es unendlich viele Connexe, die derselben Hauptcoincidenz entsprechen; denn alle Connexe von dem Typus

$$f + Mu_x = 0,$$

worin M eine Form mit zwei Reihen von Variabelen und von den Graden $n-1$ in den x und $m-1$ in den u bezeichnet, haben offenbar dieselbe Hauptcoincidenz.

Das Studium der Hauptcoincidenz eines Connexes steht in besonderer und enger Beziehung zu der Untersuchung der *algebraischen* Differentialgleichungen 1ter Ordnung.

Durch einen Punkt x der Ebene gehen m Gerade der Hauptcoincidenz; betrachten wir nun die m unendlich kleinen Strecken der Geraden in der Umgebung des Punktes x als die unendlich kleinen Bogen von m durch diesen Punkt gehenden

Curven, so erhalten wir ein System von Curven von der Beschaffenheit, dass durch jeden Punkt der Ebene m Curven des Systems gehen.

Die Differentialgleichung dieses Curvensystems ist leicht zu ermitteln; denn, wenn x und u ein Punkt bez. eine Gerade sind, die sich in der Coincidenz entsprechen, so hat man:

$$a^n u_a^m = 0,$$
$$u_x = 0.$$

Betrachtet man einen Nachbarpunkt $x + dx$ auf der Geraden u, so ist

$$u_{dx} = 0,$$
$$u_x = 0;$$

daraus folgt:

$$u_1 : u_2 : u_3 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ dx_3 & dx_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ dx_1 & dx_2 \end{vmatrix},$$

und durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung des Connexes

$$a_x^n (\alpha x dx)^m = 0;$$

dieses ist eine Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung und m^{ten} Grads.

Selbstverständlich kann man auch auf correlative Art verfahren und so zu einer Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung und n^{ten} Grads in Liniencoordinaten kommen. *Das durch diese beiden Arten von Differentialgleichungen dargestellte Curvensystem ist jedoch immer dasselbe;* solche Curven werden *die Hauptcoincidenzcurven oder die Integralcurven des Connexes* genannt.

Man kann so mit Hülfe eines Connexes jede Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung mit algebraischen Coefficienten erhalten.

Ein einfaches Beispiel für die Art, auf welche die Integralcurven eines Connexes bestimmt werden, ist das folgende:

Es liege der Connex (1, 1) vor, der sich im Allgemeinen auf die canonische Form

$$k_1 u_1 x_1 + k_2 u_2 x_2 + k_3 u_3 x_3 = 0$$

reduciren lässt. Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$(k_2 - k_3)\frac{dx_1}{x_1} + (k_3 - k_1)\frac{dx_2}{x_2} + (k_1 - k_2)\frac{dx_3}{x_3} = 0,$$

deren Integral

$$x_1^{k_2 - k_3} x_2^{k_3 - k_1} x_3^{k_1 - k_2} = \text{Const.}$$

ist.

Die durch diese Gleichung dargestellten Curven sind die Integralcurven.

Die Theorie der Differentialgleichungen 1ter Ordnung steht auf diese Art in enger Beziehung zu der Theorie der Connexe; dies ist auch der Grund, weshalb die genialen Untersuchungen Lie's über die Transformationsgruppen (vergl. *Repert.* 1, Kap. 9) und speciell über die Berührungstransformationen (ib., § 2) ihre geometrische Anwendung, die von so grosser Bedeutung ist, in der Lehre von den ebenen Connexen finden.

Der Ort der Punkte der Ebene, welche so beschaffen sind, dass von den ihnen in der Hauptcoincidenz entsprechenden Strahlen zwei zusammenfallen, ist eine Curve $F = 0$, die zugleich der Ort der Cuspidalpunkte der Integralcurven des Connexes ist. — Offenbar sind die Punkte von $F = 0$ auch diejenigen Punkte der Ebene, denen in dem Connex Curven entsprechen, die durch diese Punkte gehen.

Correlativ:

Die Enveloppe der Geraden der Ebene, welche so beschaffen sind, dass von den ihnen in der Hauptcoincidenz entsprechenden Punkten zwei zusammenfallen, ist eine Curve $F' = 0$, die zugleich die Enveloppe der Inflexionstangenten der Integralcurven des Connexes ist. — Offenbar sind die Tangenten von $F' = 0$ auch diejenigen Geraden der Ebene, denen in dem Connex sie berührende Curven entsprechen.

Die Cuspidaltangenten der Integralcurven hüllen eine Curve ein, die wir $\Phi = 0$ nennen wollen, und die Inflexionspunkte der Integralcurven bilden eine andere Curve, die wir mit $\Phi' = 0$ bezeichnen.

Die Ordnung von $F = 0$ ist die $(m - 1)(2n + m)^{\text{te}}$ und die Classe von $F' = 0$ die $(n - 1)(2m + n)^{\text{te}}$.

Die Classe von $\Phi = 0$ ist die $(n^2 + 2mn - n + m)^{\text{te}}$ und die Ordnung von $\Phi' = 0$ die $(m^2 + 2mn - m + n)^{\text{te}}$.

Die Anzahl der Doppelpunkte von $F = 0$ beträgt

$$\tfrac{1}{2}(m - 2)(m - 3)\{(2n + m)^2 + 3m\}$$

und die Anzahl der Cuspidalpunkte:

$$3(m - 2)(n^2 + mn + m).$$

Vertauscht man in diesen Ausdrücken n mit m, so ergibt sich die Anzahl der Doppeltangenten bez. der Inflexionstangenten von $F' = 0$.

§ 4. Der Connex (1, 1).

Geometrisch stellt der Connex (1, 1) nichts Anderes, als eine *ebene Collineation* (siehe oben Kap. 1, § 3) dar; bei ihm entspricht jedem Punkt x ein Punkt y, welcher das Centrum des Büschels der Geraden ist, die dem Punkt x zugeordnet sind. Wenn

$$0 = a_x u_\alpha = \sum a_{ij} u_i x_j = f, \quad (a_{ij} \neq a_{ji})$$

die Gleichung des Connexes ist, so sind die Coordinaten des dem Punkt (x) entsprechenden Punkts (y)

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3$$

und die Coordinaten der Geraden (v), welche (u) entspricht:

$$v_i \equiv a_{1i} u_1 + a_{2i} u_2 + a_{3i} u_3.$$

Das volle System der invarianten Bildungen der Form

$$a_x u_\alpha$$

hat Clebsch gefunden. Es besteht aus 7 Formen. *Math. Ann.*, 1 vergl. auch *Repert.*, Bd. 1, p. 345.

Dieses System enthält die drei Invarianten:

$$i = a_\alpha, \; i_1 = b_\alpha a_\beta, \; i_2 = b_\alpha a_\gamma c_\beta.$$

Mittelst dieser Invarianten lässt sich die Discriminante der Form, nämlich

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

durch die Formel

$$\varDelta = \frac{i^3 + 2 i_2 - 3 i i_1}{6} \text{ ausdrücken.}$$

Die gegebene Form $a_x u_\alpha$ lässt sich im Allgemeinen auf die canonische Form

$$k_1 u_1 x_1 + k_2 u_2 x_2 + k_3 u_3 x_3$$

zurückführen.

Für diese canonische Form sind die drei Invarianten i, i_1, i_2:

$$\begin{aligned} i &= k_1 + k_2 + k_3, \\ i_1 &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2, \\ i_2 &= k_1^3 + k_2^3 + k_3^3. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der k (der Coefficienten der canonischen Form) dient mithin die Gleichung

$$k^3 - ik^2 + \tfrac{1}{2}(i^2 - i_1)k - \tfrac{1}{6}(i^3 - 3ii_1 + 2i_2) = 0,$$

die mit

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - k, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

äquivalent ist.

Eine *Zwischenform* der Form f ist

$$f_1 = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = a_x u_\beta b_\alpha,$$

welche, gleich Null gesetzt, die Collineation darstellt, die sich aus der zweimaligen Anwendung der Collineation $f = 0$ ergibt.

Der *conjugirte Connex* des Connexes $f = 0$ ist

$$g = (abu)(\alpha\beta x) = 0,$$

der sich durch u_x, f und f_1 auf die folgende Art ausdrücken lässt:

$$g = (i^2 - i_1)u_x - 2if + 2f_1.$$

Der Connex $g = 0$ stellt die Transformation dar, welche zu der durch $f = 0$ gegebenen Transformation invers ist.

Construirt man die Zwischenformen

$$f_2 = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_h = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_{h-1}}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f_{h-1}}{\partial x_i},$$

und die

$$g_h = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g_{h-1}}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial g_{h-1}}{\partial x_i}, \quad (g_0 \equiv g),$$

so ergibt sich:

Alle f_h lassen sich linear durch u_x, f, f_1 ausdrücken. Die $f_h = 0$ stellen die Collineationen dar, welche eine $(h+1)$-malige Anwendung der Collineation $f = 0$ liefert.

Die $g_h = 0$ repräsentiren die Collineationen, welche zu den durch die $f_h = 0$ dargestellten Collineationen invers sind.

Gibt man f die oben angegebene canonische Form, so lassen sich f_h, g, g_h durch die Formeln ausdrücken:

$$f_h = k_1^{h+1} u_1 x_1 + k_2^{h+1} u_2 x_2 + k_3^{h+1} u_3 x_3,$$
$$\tfrac{1}{2} g = k_2 k_3 u_1 x_1 + k_3 k_1 u_2 x_2 + k_1 k_2 u_3 x_3,$$
$$\tfrac{1}{2} g_h = (k_2 k_3)^{h+1} u_1 x_1 + (k_3 k_1)^{h+1} u_2 x_2 + (k_1 k_2)^{h+1} u_3 x_3.$$

Näheres über den Connex (1, 1) findet man bei Clebsch, *Math. Ann.*, 1 und in der Clebsch-Lindemann'schen *Geometrie*. Andere hierher gehörige Arbeiten sind von Battaglini, *Giorn. di mat.*, 21, 22; *Atti Acc. Napoli*, 1880; *Memorie Acc. Lincei*, (3), 9, 1880; Lazzeri, *Atti Ist. Veneto*, (6), 3, 1885.

§ 5. Der Connex (1, 2).

Dieser Connex wurde zuerst von Godt, *Dissert.*, Göttingen 1873 untersucht und die Resultate, zu denen er gekommen, von Clebsch auf den Connex $(1, m)$ ausgedehnt.

Bei dem Connex $(1, 2)$ *ist die Curve* $F = 0$ (siehe oben § 3) *eine allgemeine Curve* 4^{ter} *Ordnung ohne singuläre Punkte.*

Offenbar können in diesem Fall die Curven $F' = 0$, $\Phi' = 0$ nicht existiren, da jede Gerade der Ebene, weil $n = 1$ ist, mit *nur einem* ihrer Punkte ein Element der Hauptcoincidenz bildet, und es daher nicht vorkommen kann, dass *zwei* solche Punkte zusammenfallen.

Die Curve $F = 0$ hat die Gleichung:

$$a_x b_x (\alpha\beta x)^2 = 0,$$

und die Curve $\Phi = 0$:

$$(abu) c_\alpha u_\alpha u_\beta^2 u_\gamma^2 = 0.$$

Die Curve Φ ist also von der 6^{ten} Klasse.

Ueber den dem Connex $(1, 2)$ conjugirten Connex siehe oben § 2.

In jedem Connex $(1, 2)$: $a_x u_\alpha^2 = 0$ *bilden die Punkte, deren entsprechende Kegelschnitte in zwei Punkte zerfallen, die Curve* 3^{ter} *Ordnung*

$$a_x b_x c_x (\alpha\beta\gamma)^2 = 0,$$

und die Geraden, welche die beiden Punkte, in die jeder dieser Kegelschnitte zerfällt, miteinander verbinden, sind die Tangenten der Curve 3^{ter} *Classe*

$$(abc)(\alpha\beta\gamma) u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0,$$

während die nämlichen Punktepaare sich ihrerseits auf der Curve 3^{ter} Ordnung

$$(abc)(\alpha\beta x)(\beta\gamma x)(\gamma\alpha x)=0$$

befinden.

In jedem Connex $(1, 2)$ *gibt es 7 Gerade, die, mit einem beliebigen ihrer Punkte zusammengenommen, Elemente der Hauptcoincidenz bilden.* Diese Geraden heissen *Grundstrahlen. Sie machen einen Theil des Systems der Integralcurven aus, sind ein Theil der Doppeltangenten der Curve* $F=0$ *und die einzigen Doppeltangenten von* $\Phi=0$.

Die Gleichung

$$u_v=(auv)u_\alpha{}^2=0$$

stellt, wenn in ihr die v als Parameter angesehen werden, das Tangentialnetz (vergl. Kap. 5) der Curven 3^{ter} Klasse dar, welche die 7 Grundstrahlen berühren.

Wenn die Gerade v *eine der übrigen 21 Doppeltangenten von* $F=0$ (siehe Kap. 8) *ist, so zerfällt die Curve* $u_v=0$ *in einen Punkt, nämlich einen der 21 Schnittpunkte von zweien der 7 Grundstrahlen, und in einen Kegelschnitt, welcher der Berührungskegelschnitt an die anderen 5 Strahlen ist.*

Wichtig ist das folgende Theorem:

Die Hauptcoincidenz eines Connexes $(1, 2)$ *lässt sich stets als Hauptcoincidenz eines Connexes von der speciellen Form*

$$a_x u_2 u_3 + b_x u_3 u_1 + c_x u_1 u_2 = 0$$

darstellen; dabei ist diese Gleichung auf drei der 7 Grundstrahlen bezogen und sind diese 3 Strahlen zu Seiten des Basisdreiecks der Coordinaten genommen.

Die Geraden $a_x=0$, $b_x=0$, $c_x=0$ *sind die drei Doppeltangenten von* $F=0$, *welche auf die in einem früheren Theorem angegebene Art den drei Eckpunkten des Basisdreiecks entsprechen (das zu Seiten drei andere Doppeltangenten hat).*

Aus dem Gesagten geht klar hervor, dass die Theorie der Connexe $(1, 2)$ in enger Beziehung zu der Lehre von den ebenen Curven 4^{ter} Ordnung steht. Vergl. Kap. 8.

Ueber den Connex $(1, 2)$ siehe auch Peano, *Atti Acc. Torino,* 16, 1881.

§ 6. Die Connexe $(1, m)$ und Literaturangaben über den Connex $(2, 2)$.

Die vorstehenden Resultate, zu denen, wie wir schon oben sagten, Godt, kam, wurden von Clebsch verallgemeinert und auf den Connex $(1, m)$ ausgedehnt.

Indem wir auf die Darstellung in den *Vorlesungen über Geometrie* von Clebsch-Lindemann verweisen, wo man Näheres findet, wollen wir hier nur einiges Wenige mittheilen.

In dem Connex $(1, m)$ gibt es $m^2 + m + 1$ Grundstrahlen, die, wie in § 5, definirt werden.

Die Ordnung von $F = 0$ ist die $(m - 1)(m + 2)^{\text{te}}$; die Anzahl der Doppelpunkte:

$$\tfrac{1}{2}(m - 2)(m - 3)[(m + 2)^2 + 3m];$$

die Anzahl der Cuspidalpunkte:

$$3(m - 2)(2m + 1);$$

das Geschlecht:

$$p = \tfrac{1}{2}m(7m - 11);$$

die Classe ist die $(3m^2)^{\text{te}}$;
die Anzahl der Inflexionspunkte beträgt:

$$12m(m - 1),$$

der Doppeltangenten: $\tfrac{1}{2}(9m^4 - 40m^2 + 35m + 2)$.

Die $m^2 + m + 1$ Grundstrahlen sind die einzigen Doppeltangenten der Curve $\Phi = 0$ und sind auch ein Teil der Doppeltangenten von $F = 0$.

Man kann dann auch hier gewisse Curven $u_v = 0$ von der $(m + 1)^{\text{ten}}$ Classe betrachten, die denen in § 5 analog sind, und kann die in demselben Paragraphen angegebene Beziehung zwischen speciellen Curven $u_v = 0$ und den anderen

$$\tfrac{3}{2}m(m - 1)(3m^2 + 3m - 11)$$

Doppeltangenten von $F = 0$ weiter ausdehnen. Wir halten es jedoch nicht für angemessen, länger bei diesen Einzelheiten zu verweilen.

Die Theorie der ternären Connexe begründete, wie man wohl sagen kann, Clebsch mit der Untersuchung des Connexes $(1, 1)$, *Math. Ann.*, 1 und besonders mit der in den *Math. Ann.*, 6 enthaltenen Arbeit und der eingehenden Darstellung in seinen 1871, 1872 gehaltenen *Vorlesungen über Geometrie*, die von Lindemann bearbeitet und zuerst im Jahr 1876 herausgegeben wurden.

Den Connex $(2, 2)$ behandelte zuerst Clebsch, der den zu ihm *conjugirten Connex* (siehe oben § 2) berechnete; auf ihn folgten Armenante, *Atti Lincei*, (2), 3, 1876 und Peano, *Atti Acc. Torino*, 16, 1881. Mit *speciellen* Connexen $(2, 2)$ beschäftigten sich Battaglini, *Giorn. di mat.*, 19, 1881; *Atti Acc. Napoli*, 1879; Amodeo, *Giorn. di mat.*, 25, 1885 und Pannelli, ib., 26, 1888.

Erweiterungen der Theorie der Connexe auf den Raum findet man bei Battaglini, *Mem. Acc. Lincei*, (3), 12, 1881; *Giorn. di Mat.*, 22, 1884, der die *bilinearen quaternären Formen* untersuchte; Lazzeri, *Mem. Lincei*, (4), 4, 1887, der den Connex (1, 1) im Raum betrachtete; Krause, *Math. Ann.*, 14, der den Connex (1, 2) im Raum behandelte und D. Sintsof, *Théorie des connexes dans l'espace*, *Bull. des sciences math.*, 1898. Der letztere Artikel ist ein Bericht über ein russisches Werk des Verfassers.

Kapitel VII.

Die ebenen Curven dritter Ordnung.

§ 1. Allgemeines über die Curven dritter Ordnung. Wendepunkte. Tangentialpunkte.

Die allgemeine Gleichung einer Curve 3ter Ordnung enthält homogen zehn Coefficienten; sind daher in der Ebene neun Punkte willkürlich *gegeben, so geht im Allgemeinen eine einzige Curve dritter Ordnung durch sie.*

Die neun Punkte können jedoch derart von einander abhängig sein, dass unendlich viele Curven 3ter Ordnung durch sie gehen.

Alle durch acht Punkte der Ebene gehenden Curven 3ter Ordnung gehen auch durch einen neunten von den ersten bestimmten Punkt.

Die Curve 3ter Ordnung ist im Allgemeinen von der 6ten Classe und dem Geschlecht Eins; sie hat neun Wende- oder Inflexionspunkte.

Hat sie einen Doppelpunkt, so ist ihr Geschlecht Null; sie ist dann von der 4ten Classe und hat nur drei in einer Geraden liegende Wendepunkte. Die Gleichung einer solchen Curve hängt von acht Constanten ab.

Wenn die Curve eine Spitze hat, so ist ihr Geschlecht wieder Null, ihre Classe die 3te und die Anzahl der Wendepunkte 1. Die Gleichung einer solchen Curve hängt von sieben Constanten ab.

Die Gerade, welche zwei Wendepunkte verbindet, geht immer durch einen dritten Wendepunkt.

Die neun Wendepunkte liegen zu je dreien auf zwölf Geraden und durch jeden Wendepunkt gehen vier dieser Geraden.

Die neun Wendepunkte können nicht sämmtlich reell sein, höchstens drei von ihnen sind reell.

Die vier durch einen Wendepunkt gehenden Geraden bilden jedesmal eine äquianharmonische Gruppe.

Die 12 Geraden ordnen sich in vier Gruppen zu je drei, so dass jede aus drei Linien bestehende Gruppe sämmtliche 9 Wendepunkte enthält; jedes der Dreiecke, welches die drei Geraden eines Tripels zu Seiten hat, heisst *Wendepunktsdreieck.*

Durch die neun Wendepunkte einer Curve 3^{ter} Ordnung gehen unendlich viele solche Curven, welche sämmtlich dieselben Wendepunkte haben. Das Büschel aller dieser Curven heisst *syzygetisches Büschel.*

Bezeichnet man mit $f = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve und mit $H = 0$ die der Hesse'schen Curve (vergl. Kap. 5), *so lautet die Gleichung des syzygetischen Büschels*

$$\lambda_1 f + \lambda_2 H = 0.$$

Unter den Curven dieses Büschels sind daher auch die vier Wendepunktsdreiecke enthalten.

Der Polarkegelschnitt eines Wendepunkts zerfällt in zwei Gerade, von denen die eine die Wendetangente und die andere eine Gerade ist, welche die harmonische Polare (Gerade) des Wendepunkts heisst.

Die harmonische Polare des Wendepunkts hat die Eigenschaft, dass jede durch diesen Punkt gezogene Gerade sie in einem Punkt schneidet, welcher in Bezug auf die beiden anderen Punkte, in denen die Gerade die Curve 3^{ter} Ordnung trifft, harmonisch conjugirt zu dem Wendepunkt ist. Daher der Name *harmonische Polare (bez. Gerade).*

Daraus folgt auch:

Die harmonische Polare eines Wendepunkts schneidet die Curve 3^{ter} Ordnung in den drei Berührungspunkten der von dem Wendepunkt an die Curve gezogenen Tangenten.

Alle Curven des syzygetischen Büschels haben auch dieselben harmonischen Polaren.

Die Tangenten in zwei Wendepunkten treffen sich auf der harmonischen Polaren des Wendepunkts, welcher mit den ersteren in einer Geraden liegt.

Die harmonischen Polaren dreier in einer Geraden liegenden Wendepunkte schneiden sich in demselben Punkt.

Jedem Punkt einer Curve 3^{ter} Ordnung entspricht ein anderer, welcher der Schnitt der Tangente in dem ersteren Punkt mit der Curve ist.

Dieser Punkt heisst *Tangentialpunkt* oder *Begleiter (Satellit)* des gegebenen.

Die drei Tangentialpunkte dreier in einer Geraden liegenden Punkte gehören ebenfalls einer Geraden an, der Begleiterin (Satellite) der ersteren.

Es gibt eine Gerade der Ebene (die Begleiterin der unendlich fernen Geraden), welche die Eigenschaft hat, dass der Abstand eines Punkts der Curve von ihr in constantem Verhältniss zu dem Product der Abstände desselben Punkts von den drei Asymptoten (den Tangenten in den drei unendlich fernen Punkten der Curve) steht.

Die vier Berührungspunkte der vier Tangenten, welche sich von einem Punkt P der Curve an die Curve ziehen lassen, sind die Ecken eines Vierecks, dessen drei Gegenseiten-Schnittpunkte oder Diagonalpunkte (-Ecken) ebenfalls auf der Curve liegen; und die Tangenten an die Curve in diesen drei Punkten treffen sich ebenso wie die Tangente in P in einem und demselben Punkt der Curve.

Das anharmonische Verhältniss der vier Tangenten, welche sich von einem Punkt der Curve an die Curve ziehen lassen, bleibt bei dem Variiren des Punktes constant. Dieser Satz ist sehr wichtig.

Durch einen Punkt A einer Curve 3ter Ordnung ziehen wir eine Gerade, welche die Curve in zwei anderen Punkten P, Q schneidet und bilden dann das vollständige Viereck, dessen Ecken die vier Punkte sind, zu denen A der Tangentialpunkt (Begleiter) ist; zwei Gegenseiten dieses Vierecks schneiden dann die gegebene Gerade in zwei in Bezug auf P und Q einander harmonisch conjugirten Punkten. Maclaurin'scher Satz.

Wenn die Tangentialpunkte dreier Punkte A, B, C in einer Geraden liegen, so gehören auch die Punkte A', B', C', in denen BC, CA, AB von neuem die Curve schneiden, einer Geraden an.

Es gibt unendlich viele Polygone von $2n$ Seiten und $2n$ Ecken, deren Ecken auf einer allgemeinen Curve 3ter Ordnung liegen und von denen die geraden Seiten sich in einem Punkt A der Curve treffen, und die ungeraden durch einen zweiten Punkt B der Curve gehen. Die Steiner'schen Polygone, Crelle, 32. Die beiden zusammengehörigen Punkte A und B heissen *ein zur Zahl n gehöriges Steiner'sches Punktepaar (associati).*

Diese Polygone werden am besten mit Hülfe der elliptischen Functionen studiert.

Die Hesse'sche und Steiner'sche Curve einer cubischen Curve sind identisch und von der 3ten Ordnung.

Die Cayley'sche Curve einer cubischen Curve ist 3ter Classe und 6ter Ordnung; sie ist die Enveloppe aller derjenigen Polar-

kegelschnitte der Punkte der Ebene, welche in zwei Gerade zerfallen.

Jede beliebige Curve 3^{ter} Ordnung lässt sich als die Hesse'sche dreier anderer Curven 3^{ter} Ordnung ansehen und jede Curve 3^{ter} Classe als die Cayley'sche einer Curve 3^{ter} Ordnung.

Man habe zwei Gerade u, u' und betrachte das Büschel von Polarkegelschnitten der Punkte von u bez. der Curve 3^{ter} Ordnung. Der Pol von u' bez. eines jeden dieser Kegelschnitte des Büschels beschreibt einen Kegelschnitt, welcher *gemischte (mista) Poloconica (Polkegelschnitt) der zwei Geraden* genannt wird (Cremona). Wenn die beiden Geraden zusammenfallen, so gilt der Satz:

Die Curve, welche von den Polargeraden aller Punkte einer Geraden bez. einer Curve 3^{ter} Ordnung eingehüllt wird, ist ein Kegelschnitt und heisst die gemeine (pura) Poloconica der Geraden.

Die Hesse'sche Curve wird von jeder gemeinen Poloconica einer Geraden in drei Punkten berührt.

Legt man durch die drei Punkte, in denen die Curve von Hesse von einer gemeinen Poloconica berührt wird, einen beliebigen zweiten Kegelschnitt, so schneidet dieser die Curve von Hesse in drei weiteren Punkten, in denen dieselbe von einer zweiten gemeinen Poloconica berührt wird.

Wenn man von einem Punkt der Ebene die sechs Tangenten an eine Curve 3^{ter} Ordnung zieht, so liegen die Tangentialpunkte der sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt, welcher die konische Begleiterin (Satellite) des Punktes a oder des Polarkegelschnitts von a (auf welchem sich die sechs Berührungspunkte der sechs Tangenten befinden) genannt wird (Cremona).

Der Polarkegelschnitt eines Punktes und die konische Begleiterin dieses Punktes berühren sich in den beiden Punkten, in welchen sie von der Polargeraden des Punktes geschnitten werden.

Wenn ein Kegelschnitt mit einer Curve 3^{ter} Ordnung zwei Berührungspunkte 2^{ter} Ordnung hat (zwei Punkte, von denen jeder als die Vereinigung von drei unendlich nahen Punkten zu betrachten ist), so geht die Gerade, welche diese beiden Punkte verbindet, durch einen Wendepunkt. Es gibt neun Systeme solcher Kegelschnitte.

Durch jeden Berührungspunkt einer von einem Wendepunkt an die Curve gezogenen Tangente geht ein Kegelschnitt, welcher mit der Curve in diesem Punkt eine sechspunktige Berührung (eine Berührung 5^{ter} Ordnung) hat.

Auf der Curve 3ter Ordnung gibt es 27 Punkte, in denen Kegelschnitte die Curve 6-punktig berühren. Diese Punkte entsprechen auch den 27 Schnittpunkten der Curve mit den 9 harmonischen Polaren der 9 Wendepunkte der Curve 3ter Ordnung.

Es gibt drei verschiedene und je aus einer zweifach unendlichen Anzahl von Kegelschnitten bestehende Systeme, welche eine Curve 3ter Ordnung in drei Punkten berühren.

Die Tangentialpunkte der drei Punkte, in welchen einer dieser Kegelschnitte die Curve 3ter Ordnung berührt, liegen in einer Geraden.

Die cubischen Plancurven wurden studirt von: Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis,* 1704 und Maclaurin, *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus Tractatus,* ins Französische übertragen von de Jonquières: *Mélanges de géométrie pure,* Paris, 1856, p. 197. Neuer sind Plücker, *System der analytischen Geometrie,* 1835; Steiner, *Werke,* 2; Hesse, *Crelle,* 28, 36, 38; Salmon, *Crelle,* 42 und die Arbeiten von Cayley, *Phil. Trans.,* 147; Chasles, *Géom. supérieure,* Paris 1852; Moebius, *Abh. der S. Ges.,* 1848, 1849; *Werke,* Bd. 2; Cremona, *Introd. etc.,* Bologna 1862, deutsch 1865; Durège, *Die ebenen Curven 3ter Ordnung,* Leipzig, 1871 und vielen Anderen.

Die Curven 3ter Classe haben Cayley, *Journ. de Liouville,* 9, 1844 = *Coll. Math. Pap.,* 1, p. 183; *Lond. Phil. Trans.,* 147; 1857 = *Coll. Math. Pap.,* 2, p. 381; Hesse, l. c.; Bellavitis, *Atti Istituto Veneto,* 1852 etc. untersucht.

Die bedeutendsten Werke, in denen man die Eigenschaften der Curven 3ter Ordnung zusammengestellt findet, sind von Cremona, l. c.; Salmon, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven,* Leipzig, 1882; Durège, l. c.; Schroeter, *Die Theorie der ebenen Curven 3ter Ordnung,* Leipzig, 1888 und die oft citirte Clebsch-Lindemann'sche *Geometrie.*

Die Theorie der elliptischen Funktionen wurde zuerst in einem Aufsatz von Clebsch, *Crelle,* 63 auf das Studium der ebenen Curven 3ter Ordnung angewendet. Man sehe darüber auch die *Geom.* von Clebsch-Lindemann nach und Kap. 11 Bd. 2 des Halphen'schen Werkes *Fonctions elliptiques,* Paris 1886—1891.

In Betreff der Eigenschaften der verschiedenen Curven 3ter Ordnung vom Geschlecht Null (*unicursalen, rationalen*) citiren wir das neuere Buch von Binder, *Theorie der unicursalen*

Plancurven 4ter bis 3ter Ordnung in synthetischer Behandlung, Leipzig, 1896 und die Arbeiten von Pittarelli, *Rend. Acc. Napoli,* 1885; *Mem. Acc. Lincei,* (4), 3, 1886.

§ 2. Projective Erzeugungsweisen der Curven 3ter Ordnung.

Sind in der Ebene drei Punktepaare A, A_1; B, B_1; C, C_1 gegeben, welche nicht die Gegenecken eines vollständigen Vierecks sind, so ist der Ort eines Punktes P, welcher die Eigenschaft besitzt, dass die drei Strahlenpaare PA, PA_1; PB, PB_1; PC, PC_1 einer Involution angehören, eine allgemeine Curve 3ter Ordnung, welche durch die sechs gegebenen Punkte geht.

Diesem Ort gehören die Schnittpunkte von AB mit A_1B_1, von AB_1 mit A_1B etc. an, welche wir D bez. D_1 nennen wollen, ferner die Punkte

$$E = (AC, A_1C_1),\ E_1 = (AC_1, A_1C) \text{ etc.}$$

Punkte, wie A, A_1; B, B_1; D, D_1 etc. heissen *conjugirt.*

Für zwei conjugirte Punkte ist die Eigenschaft charakteristisch, dass *die Tangenten in zwei conjugirten Punkten sich auf der Curve selbst in einem Punkt schneiden, welcher seinerseits mit dem Punkt conjugirt ist, in dem die Gerade, welche die beiden ursprünglichen conjugirten Punkte verbindet, die Curve zum dritten Mal trifft.*

Andere projective Erzeugungsweisen der cubischen Curven sind die folgenden:

Man betrachte ein Kegelschnittbüschel und ein Geradenbüschel, die zueinander projectiv sind (die Parameter eines Kegelschnitts und einer Geraden der beiden Büschel seien durch eine bilineare Relation verbunden); *alsdann ist der Ort der Schnittpunkte eines Strahls mit dem entsprechenden Kegelschnitt eine Curve 3ter Ordnung, welche durch das Centrum des Geradenbüschels und durch die vier Basispunkte des Kegelschnittbüschels geht* (Chasles).

Wenn man auf einer Curve 3ter Ordnung vier Punkte als Basispunkte eines Kegelschnittbüschels annimmt, so schneidet jeder Kegelschnitt dieses Büschels die Curve in zwei veränderlichen Punkten, deren Verbindungsgerade durch einen festen Punkt der Curve geht (den Gegenpunkt der vier gegebenen Punkte).

Man betrachte die Schar der Kegelschnitte, welche vier gegebene Gerade berühren; von zwei gegebenen Punkten ziehe man die beiden Paare von Tangenten an jeden Kegelschnitt *der Schar; der Ort der Schnittpunkte dieser Tangenten ist dann eine allgemeine Curve* 3[ter] *Ordnung.*

Eine andere Erzeugungsweise ist die sogenannte Grassmann'sche.

Ein Punkt P beschreibt eine Curve 3[ter] *Ordnung, wenn die Geraden, welche ihn mit drei festen Punkten verbinden, drei andere feste Gerade in drei in gerader Linie liegenden Punkten schneiden. In diesem Fall umhüllt die bewegliche Gerade, in welcher die drei Schnittpunkte liegen, eine Curve* 3[ter] *Classe.*

Eine weitere geometrische Construction findet man bei Schröter, *Math. Ann.*, 5.

Ueber die Construction einer Curve 3[ter] Ordnung, wenn neun Punkte von ihr gegeben sind, und über die Construction des neunten Punktes, durch welchen alle Curven 3[ter] Ordnung des durch 8 Punkte bestimmten Büschels gehen, siehe besonders Chasles, *Compt. Rend.*, 1853; Cayley, *Quart. J. of math.*, 5, 1862; Cremona, *Introd.*, etc.

§ 3. Canonische Formen der Gleichung der Curven 3[ter] Ordnung. Verschiedene Classificationen dieser Curven.

Nimmt man zur Ecke $(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$ *des Fundamentaldreiecks der Coordinaten einen Wendepunkt der Curve, zur Geraden* $x_3 = 0$ *die Wendetangente und zur Geraden* $x_2 = 0$ *die harmonische Polare desselben Wendepunkts, so lautet die Gleichung der Curve* 3[ter] *Ordnung in homogenen Coordinaten:*

$$x_3 x_2^2 = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_3 + 3 c x_1 x_3^2 + d x_3^3.$$

Zerlegt man das Polynom auf der rechten Seite in seine drei linearen Factoren, so stellt jeder von diesen, gleich Null gesetzt, eine der drei Tangenten dar, welche von dem Wendepunkt an die Curve gezogen werden können.

Wählt man als Gerade $x_1 = 0$ *eine dieser Tangenten, so lässt sich die Gleichung der Curve auf die Form*

$$x_3 x_2^2 = x_1 (x_1 - x_3)(x_1 - k^2 x_3)$$

oder auch, bei einer anderen geeigneten Wahl der Axe $x_1 = 0$, *auf*

$$x_3 x_2^2 = 4 x_1^3 - g_2 x_1 x_3^2 - g_3 x_3^3$$

reduciren.

Wenn die Gleichung der Curve 3[ter] Ordnung auf eine der vorstehenden Formen zurückgeführt wird, so erkennt man, *dass* *die Coordinaten eines Punkts der Curve elliptischen Functionen eines Parameters proportional sind. Man kann nämlich*

$$x_1 : x_2 : x_3 = p(u) : p'(u) : 1$$

setzen, worin p, p' die elliptischen Functionen von Weierstrass sind. Vergl. Bd. 1, Kap. 16.

Wenn man bei der Reduction der Gleichung der Curve auf die letztere Form $g_3 = 0$ erhält, so ergibt sich die sogenannte *harmonische Curve 3ter Ordnung,* welche die Eigenschaft besitzt, *dass die vier von einem Punkt der Curve an die Curve selbst gezogenen Tangenten eine harmonische Gruppe bilden.*

Wenn dagegen $g_2 = 0$ ist, so hat man die *äquianharmonische Curve 3ter Ordnung,* für welche der Satz gilt, *dass die vier von einem Punkt der Curve an die Curve selbst gezogenen Tangenten eine äquianharmonische Gruppe ausmachen.*

Wird als Fundamentaldreieck der Coordinaten eines der Wendepunktsdreiecke angenommen, so lautet die Gleichung der allgemeinen Curve dritter Ordnung

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6bx_1x_2x_3 = 0.$$

Nimmt man dagegen das aus den drei Wendetangenten gebildete Dreieck zum Fundamentaldreieck der Coordinaten, so wird die Gleichung der Curve:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 27kx_1x_2x_3 = 0.$$

Die Gleichung einer Curve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt (der rationalen Curve 3ter Ordnung) lässt sich auf die Form bringen:

$$x_1^3 + x_2^3 + 6x_1x_2x_3 = 0,$$

wenn das aus der Geraden $x_3 = 0$, in welcher die drei Wendepunkte liegen, und aus den beiden Tangenten in dem Doppelpunkt $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ gebildete Dreieck zum Fundamentaldreieck der Coordinaten gewählt wird.

Der Gleichung der Curve 3ter Ordnung mit einer Spitze lässt sich die Gestalt

$$x_2^3 - 3x_1^2x_3 = 0$$

geben, indem man das aus der Spitzentangente $(x_1 = 0)$, der Tangente im einzigen Wendepunkt $(x_3 = 0)$ und der Geraden $(x_2 = 0)$, welche die Spitze mit dem Wendepunkt verbindet, gebildete Dreieck zum Fundamentaldreieck nimmt.

Wenn die Gleichung der Curve die Gestalt

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3 = 0$$

hat, so ist die Gleichung der Hesse'schen Form (siehe § 4):

$$H = -6m^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6(1 + 2m^3)x_1x_2x_3 = 0,$$

und die Gleichung der Cayley'schen in Geradencoordinaten:

$$s = -6m(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) - 6(1 - 4m^3)u_1u_2u_3 = 0.$$

Die Gleichung einer Curve 3ter Ordnung lässt sich so reduciren, dass sie nur die Cuben von vier in den Coordinaten linearen Formen enthält.

Eine dieser Formen wähle man willkürlich; sie stellt, gleich Null gesetzt, eine Gerade dar; alsdann betrachte man das Büschel von Polarkegelschnitten der Punkte dieser Geraden in Bezug auf die Curve. Es ergibt sich dann:

Die drei Diagonalen des Vierecks, dessen Ecken die vier Basispunkte dieses Kegelschnittbüschels sind, entsprechen den drei anderen linearen Formen, welche in Verbindung mit der gegebenen, jede in die 3te Potenz erhoben, zur Darstellung der Gleichung der gegebenen Curve dienen können. Siehe darüber Salmon-Fiedler, *Höhere Curven,* Anm. 55.

Jede allgemeine Curve 3ter Ordnung (ohne Doppelpunkte), deren Gleichung nur reelle Coefficienten hat, kann zwei verschiedene Gestalten haben: eine eintheilige mit nur einem reellen Ast (Zug), der sich ins Unendliche erstreckt oder eine zweitheilige mit zwei getrennten Aesten, siehe Kap. 4, § 1. *Die eintheilige besitzt die Eigenschaft, dass man von einem ihrer Punkte, ausser der Tangente in dem Punkt selbst, zwei reelle Tangenten an die Curve ziehen kann; die beiden anderen sind imaginär. Die zweitheilige, welche aus einem Oval und einem Ast besteht, der sich ins Unendliche erstreckt, zeichnet sich dadurch aus, dass man von jedem Punkt des Ovals ausser der Tangente in diesem Punkt selbst keine reelle Tangente an die Curve legen kann, dass sich dagegen von jedem Punkt des sich ins Unendliche erstreckenden Astes vier reelle Tangenten an die Curve ziehen lassen, zwei an das Oval und zwei an den Ast, dem der Punkt angehört.*

Die eintheiligen Curven 3ter Ordnung unterscheiden sich nach der Art, auf welche sie von der unendlich fernen Geraden der Ebene geschnitten werden, in:

a) *die elliptische Serpentine, welche nur einen unendlich fernen reellen Punkt hat, und deren Tangente in diesem Punkt sich in das Endliche erstreckt und mithin eine Asymptote der Curve ist;*

b) *die parabolische Serpentine hat ausser einem reellen Punkt im Unendlichen noch mit der unendlich fernen Geraden zwei andere Schnittpunkte, die reell sind und zusammenfallen; sie besitzt mithin eine Asymptote im Endlichen und berührt die unendlich ferne Gerade;*

c) *die hyperbolische Serpentine mit drei reellen Punkten im Unendlichen und daher drei Asymptoten im Endlichen.*

Die zweitheiligen Curven dritter Ordnung theilt man ähnlich ein in:

a) *die elliptische Serpentine mit elliptischem Oval und einem einzigen reellen Punkt im Unendlichen, welcher auf der Serpentine liegt;*

b) *die elliptische Serpentine mit parabolischem Oval, bei welcher ein reeller Punkt im Unendlichen und die beiden anderen zusammenfallenden Punkte auf dem Oval von parabolischer Gestalt liegen;*

c) *die elliptische Serpentine mit hyperbolischem Oval; ein reeller Punkt liegt auf der Serpentine im Unendlichen und zwei reelle Punkte auf dem Oval von hyperbolischer Gestalt im Unendlichen;*

d) *die parabolische Serpentine mit elliptischem Oval; drei reelle Punkte im Unendlichen, von denen wenigstens zwei zusammenfallen, und die alle auf der Serpentine liegen;*

e) *die hyperbolische Serpentine mit elliptischem Oval; drei verschiedene reelle Punkte im Unendlichen; diese drei Punkte liegen auf der Serpentine.*

Eine andere Classification derjenigen Curven 3^{ter} Ordnung, deren Gleichung nur reelle Coefficienten enthält, nach fünf Species von divergirenden Parabeln ist von Newton. Wie wir schon gesagt haben, lässt sich durch geeignete reelle Transformation der Coordinaten die Gleichung einer jeden so beschaffenen Curve 3^{ter} Ordnung auf den Typus

$$x_3 x_2^2 = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_3 + 3 c x_1 x_3^2 + d x_3^3$$

reduciren, worin a, b, c, d reell sind. Man braucht zu diesem Zweck nur eine der (reellen) Wendetangenten der Curve zur Geraden $x_3 = 0$, einen (reellen) Wendepunkt zum Punkt $(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$ und die harmonische Polare dieses Punktes in Bezug auf die Curve zur Geraden $x_2 = 0$ zu nehmen.

Verlegt man die Wendetangente $x_3 = 0$ ins Unendliche, so folgt: *Der Gleichung jeder Curve 3^ter Ordnung in Cartesischen Coordinaten lässt sich die Gestalt geben:*

$$y^2 = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d.$$

Nimmt man nun Rücksicht auf die Natur der Factoren des Polynoms auf der rechten Seite dieser Gleichung, so kommt man zu der *Unterscheidung der Curven 3^ter Ordnung nach fünf Species divergirender Parabeln* (Newton) d. h.:

a) *Alle drei Factoren des Polynoms sind reell; die Curve besteht aus einem Oval und einer Serpentine.*

b) *Ein einziger Factor ist reell; die Curve besteht nur aus einer Serpentine.*

c) *Zwei der drei Factoren sind gleich, d. h. das Polynom zerfällt in $a(x - \alpha)^2 (x - \beta)$, worin $\alpha < \beta$ ist; die Curve ist aus einer Serpentine und dem Oval zusammengesetzt, welches sich entweder auf zwei conjugirte imaginäre Punkte oder auf einen einzigen reellen Punkt reducirt.*

d) *Das Polygon zerfällt wieder in $a(x - \alpha)^2 (x - \beta)$, aber α ist grösser als β; das Oval und die Serpentine vereinigen sich derart, dass sie einen einzigen stetigen Ast bilden, der sich selbst schneidet; die Curve hat einen Doppelpunkt (Knotenpunkt).*

e) *Alle drei Factoren des Polynoms sind gleich; der Curve kommt dann eine Spitze (ein stationärer oder Rückkehrpunkt) zu.*

Verlegt man dagegen die harmonische Polare $x_2 = 0$ ins Unendliche, *so lässt sich die Cartesische Gleichung der Curve 3^ter Ordnung immer auch schreiben:*

$$y = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

Diese Curve 3^ter Ordnung hat ein Centrum in dem Wendepunkt $(x = 0,\ y = 0)$, d. h. jede durch diesen Punkt gezogene Sehne wird durch ihn halbirt; unterscheidet man nun zwischen den Factoren der rechten Seite, wie oben, so erhält man *die Classification der Curven nach fünf Arten von Centralcurven* (Chasles).

Noch eine weitere Eintheilung der Curven 3^ter Ordnung hat Plücker angegeben und auch Cayley studirt; sie geht von der Lage und Beschaffenheit der Tangenten (Asymptoten) in den drei unendlich fernen Punkten der Curve aus.

Was die Literatur über die Classification der Curven 3^ter Ordnung angeht, so citiren wir: Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis,* 1706, p. 19; Euler, *Introd.,* 1848; Chasles, *Aperçu historique*, deutsche Ausg. von L. A. Sohnke: *Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden*, Halle, 1839, p. 143 u. Note 20, p. 367; Plücker, *System der anal. Geom.*, Berlin 1835; Cayley, *Transact. of Cambridge*, etc., 11, 1865; Bellavitis, *Società italiana delle scienze*, Modena, 1851; Möbius, *Abh. der Sächs. Gesellsch.*, 1848, 1849; Durège, *Crelle*, 75, 76; etc.

§ 4. Geometrische Interpretation der Invarianten und Covarianten der ternären cubischen Form.

Von dem System der ternären cubischen Form war in Bd. 1, Kap. 12, § 17, p. 336 und folgende die Rede. Wir kehren jetzt zu diesem Gegenstand zurück, um die wichtigsten geometrischen Interpretationen der dort gefundenen invarianten Formen anzugeben.

Es sei die ternäre cubische Form symbolisch durch

$$f = a_x^3 = b_x^3 = \cdots,$$

oder auch mittelst der wirklichen Coefficienten durch

$$f = \sum a_{ihk} x_i x_h x_k$$

ausgedrückt.

Aus den drei invarianten Bildungen Δ, Q, R der binären cubischen Form erhält man durch Anwendung des Uebertragungsprincips (siehe Bd. 1, Kap. 12) drei für die ternäre cubische Form invariante Bildungen, nämlich:

$$\begin{aligned} \Theta &= (abu)^2 a_x b_x, \\ Q_1 &= (abu)^2 (cau) c_x^2 b_x, \\ F &= (abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu). \end{aligned}$$

Die Relation $F = 0$ ist die Gleichung der Curve $f = 0$ in Liniencoordinaten (die Tangentialgleichung der Curve 3ter Ordnung).

Die Gleichung $\Theta = 0$ liefert für $x =$ Const. die Tangentialgleichung des Polarkegelschnitts von x und für $u =$ Const. die Gleichung der Poloconica der Geraden u (vergl. § 1).

Vermöge der Gleichung $Q_1 = 0$ wird jeder Geraden u eine Curve 3ter Ordnung zugeordnet als Ort der Punkte x, deren Polargerade die Gerade u in einem Punkt treffen, welcher zu x in Bezug auf die Poloconica von u conjugirt ist.

Die Curve 3ter Ordnung $Q_1 = 0$ schneidet die Gerade u in drei Punkten, die in Verbindung mit den Punkten, in welchen u

die Curve 3^{ter} *Ordnung* $f=0$ *trifft, drei Paare derselben Involution bilden, deren Doppelpunkte diejenigen sind, in welchen* u *die eigene Poloconica schneidet.*

Ueber die Hesse'sche Form H, die Cayley'sche Form s, die Contravariante t und die beiden Invarianten S und T siehe die Formeln *Repert.*, 1, S. 336 und 337.

Gibt man f *die canonische Gestalt* (vergl. § 3)

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3,$$

so wird

$$t = -2(1-10m^3)(u_1^3+u_2^3+u_3^3) - 2(30m^2+24m^5)u_1u_2u_3,$$
$$S = 24m(m^3-1),$$
$$T = 6(8m^6+20m^3-1),$$

während die Gleichung $F=0$ *von* f *in Tangentialcoordinaten*

$$-\tfrac{1}{2}F = u_1^6+u_2^6+u_3^6-(2+32m^3)(u_1^3u_2^3+u_2^3u_3^3+u_3^3u_1^3) -$$
$$-24m^2u_1u_2u_3(u_1^3+u_2^3+u_3^3)-(24m+48m^4)u_1^2u_2^2u_3^2 = 0$$

lautet. Ueber die Ausdrücke für H *und* s siehe § 3.

Die Bedingung $S=0$ *gibt an, dass die Hesse'sche Curve von* $f=0$ *in drei Gerade zerfällt; die Cayley'sche Curve besteht alsdann aus den drei Doppelpunkten der Hesse'schen und das von letzteren gebildete Dreieck ist Polardreieck in Bezug auf alle Polarkegelschnitte der Grundcurve.*

Ist $S=0$, so heisst die Curve 3^{ter} Ordnung *äquianharmonisch; in diesem Fall bilden die vier von einem Punkt der Curve an die Curve selbst gezogenen Tangenten eine äquianharmonische Gruppe* (siehe § 1).

Wenn $T=0$ ist, wird die Curve 3^{ter} Ordnung *harmonisch* genannt; *alsdann bilden die vier eben genannten Tangenten eine harmonische Gruppe.*

Für $T=0$ *fällt die Hesse'sche Curve der Hesse'schen mit der Grundcurve* $f=0$ *wieder zusammen, die Cayley'sche Curve der Hesse'schen dagegen mit* $t=0$.

Die Discriminante der Curve 3^{ter} *Ordnung* $f=0$, *d. h. die Function, welche, gleich Null gesetzt, die Bedingung für die Existenz des Knotenpunkts angibt, ist*

$$R = T^2 - \tfrac{1}{6}S^3.$$

Falls f *die oben angegebene canonische Gestalt hat, ist die Discriminante*

$$(1+8m^3)^3.$$

Der Ausdruck für diese Discriminante R als Determinante, deren Elemente die Coefficienten von f und H sind, wurde *Repert.*, 1, S. 337 angegeben.

Der Quotient $\frac{S^3}{T^2}$ *ist absolute Invariante für die cubische Form.*

Gibt man der cubischen Form wieder die canonische Gestalt S. 189, *so ist*

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{384\, m^3 (m^3 - 1)^3}{(8 m^6 + 20 m^3 - 1)^2}.$$

Wenn mit α *das anharmonische (constante) Verhältniss der vier von einem Punkt der Curve* 3^{ter} *Ordnung an die Curve selbst gezogenen Tangenten bezeichnet wird, so besteht die bemerkenswerthe Relation:*

$$\frac{S^3}{T^2} = 24 \frac{(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(1 + \alpha)^2 (2 - \alpha)^2 (1 - 2\alpha)^2}.$$

Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit eine Curve 3^{ter} *Ordnung einen Rückkehrpunkt besitze, sind* $S = 0$, $T = 0$.

Soll eine Curve 3^{ter} *Ordnung in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfallen, so ist dazu nöthig und ausreichend, dass*

$$Ts - St$$

identisch Null werde; soll ferner die Gerade den Kegelschnitt berühren, so bestehen die Bedingungen in dem identischen Verschwinden von t.

Damit die Curve dritter Ordnung in drei Gerade zerfalle, ist es nöthig und ausreichend, dass f *und* H *proportional zu einander seien, d. h., dass die Zwischenform*

$$(ahu)\, a_x^2 h_x^2$$

identisch Null werde.

Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für das Zerfallen von f *in drei sich in einem Punkt schneidende Gerade sind durch das identische Verschwinden von* H *gegeben.*

Das identische Verschwinden von F *ist die Bedingung, damit* f *in eine einfache und eine Doppelgerade ausarte, und das identische Verschwinden von* Θ *schliesslich die Bedingung, unter der sich* f *auf eine dreifache Gerade reducirt.*

Wenn die Curve 3^{ter} *Ordnung einen Doppelpunkt hat, so schneiden die Tangenten in diesem Doppelpunkt die einzige Wendepunktslinie in zwei Punkten, welche durch die Hesse'sche Form* Δ *der die drei Wendepunkte repräsentirenden binären cubischen Form dargestellt werden. Die Covariante* Q *dieser binären cubischen*

Form stellt alsdann die drei Punkte dar, in welchen die drei harmonischen Geraden der drei Wendepunkte (siehe § 1) *die Wendepunktslinie schneiden.*

Zwei Curven 3ter Ordnung $a_x^3 = 0$ *und* $\alpha_x^3 = 0$ *haben dieselben Wendepunkte, wenn die simultane Contravariante* $(a\alpha u)^3 = 0$ *identisch verschwindet.*

Setzt man daher voraus, die zweite Curve sei die Hesse'sche Curve H der ersten, so ergibt sich:

Die Contravariante $(ahu)^3$ *ist identisch Null,* wie schon Bd. 1, p. 338 gesagt wurde.

Für das Studium der ternären cubischen Form ist die Untersuchung der binären biquadratischen Form

$$G(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^4 - S\lambda_1^2\lambda_2^2 - \tfrac{4}{3}T\lambda_1\lambda_2^3 - \tfrac{1}{12}S^2\lambda_2^4$$

von Interesse, welche bei der Bildung der Hesse'schen Form einer beliebigen Curve 3ter Ordnung des syzygetischen Büschels (siehe § 1)

$$\lambda_1 f + \lambda_2 H \quad \text{auftritt.}$$

Die Gleichung der zwölf Wendepunktsgeraden lautet:

$$G(H, -f) = H^4 - SH^2f^2 + \tfrac{4}{3}THf^3 - \tfrac{1}{12}S^2f^4 = 0.$$

Ueber die Invarianten und Covarianten von G siehe Bd. 1, p. 338, wo man auch Literaturangaben über die ternären cubischen Formen findet.

Kapitel VIII.

Die ebenen Curven 4^{ter} Ordnung.

§ 1. Allgemeines. Erzeugungsarten der Curven 4^{ter} Ordnung. Doppeltangenten. Berührungskegelschnitte und Berührungscurven 3^{ter} Ordnung.

Aus den Plücker'schen Formeln ergeben sich die folgenden zehn möglichen Combinationen für die charakteristischen Zahlen einer ebenen Curve 4^{ter} Ordnung:

n	d	r	ν	δ	ι	p
4	0	0	12	28	24	3
4	1	0	10	16	18	2
4	0	1	9	10	16	2
4	2	0	8	8	12	1
4	1	1	7	4	10	1
4	0	2	6	1	8	1
4	3	0	6	4	6	0
4	2	1	5	2	4	0
4	1	2	4	1	2	0
4	0	3	3	1	0	0

Wenn zwei projective Kegelschnittbüschel vorliegen, deren Basispunkte verschieden sind, so ist der Ort der Schnittpunkte der sich entsprechenden Kegelschnitte eine allgemeine Curve 4^{ter} Ordnung, welche durch die 8 Basispunkte der beiden Büschel geht.

Die beiden Kegelschnittbüschel seien durch

$$U + \lambda V = 0,$$
$$U' + \mu V' = 0$$

gegeben, worin $U = 0$, $V = 0$, $U' = 0$, $V' = 0$ die Gleichungen von vier Kegelschnitten darstellen und zwischen μ und λ eine bilineare Relation vom Typus

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

besteht. Eliminirt man λ, μ aus diesen drei Gleichungen, so ergiebt sich die Gleichung der Curve 4ter Ordnung.

Man verliert nichts an Allgemeinheit, wenn $\mu = \lambda$ und $V' = V$ angenommen wird; d. h.:

Der Gleichung jeder Curve 4ter Ordnung lässt sich immer die Gestalt

$$UW = V^2$$

geben, worin $U = 0$, $W = 0$, $V = 0$ drei Kegelschnitte darstellen, die nicht sämmtlich durch denselben Punkt gehen.

Um die Gleichung der Curve 4ter Ordnung auf diese Form zu reduciren, braucht man nur zu Kegelschnitten U, W zwei *Berührungskegelschnitte* zu nehmen, d. h. Kegelschnitte, welche die Curve in vier Punkten berühren.

Nun gilt der Satz:

Es gibt 63 Systeme von Berührungskegelschnitten; jedes System besteht aus unendlich vielen Kegelschnitten von solcher Beschaffenheit, dass durch die acht Berührungspunkte zweier Kegelschnitte des nämlichen Systems derselbe andere Kegelschnitt geht. In der obigen Gleichung wird der letztere Kegelschnitt durch $V = 0$ dargestellt.

In jedem der 63 Systeme von Berührungskegelschnitten kommen 6 Paare von Doppeltangenten vor.

Wenn $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ die Gleichungen von vier Doppeltangenten zweier solcher dem nämlichen System angehörigen Paare sind, *so lässt sich die Gleichung der Curve 4ter Ordnung immer schreiben:*

$$T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2,$$

worin die T linear sind und S ein quadratischer Ausdruck ist.

Die Gleichung der Curve 4ter Ordnung in der Gestalt

$$UW = V^2$$

lässt sich als Enveloppe des Kegelschnittsystems

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

ansehen.

Die ebene Curve 4^{ter} Ordnung kann auch durch zwei projective Büschel erzeugt werden, von denen das eine aus Geraden und das andere aus Curven 3^{ter} Ordnung besteht. Siehe Milinowsky, *Schlömilch's Zeitschr.*, 23, 1878.

Aus der Gleichung $T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2$ folgt, *dass sich die Doppeltangenten zu je vieren derart gruppiren lassen, dass die acht Berührungspunkte auf demselben Kegelschnitt liegen. Solcher Kegelschnitte gibt es 315.*

Der Gleichung einer Curve 4^{ter} Ordnung kann man auch die Form

$$T_1 F_3 = \Omega^2$$

geben, worin $T_1 = 0$ die Gleichung einer Doppeltangente, $F_3 = 0$ diejenige einer Curve 3^{ter} Ordnung ist, welche die Curve 4^{ter} Ordnung in 6 Punkten berührt und daher die Berührungscurve 3^{ter} Ordnung heisst, und $\Omega = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts darstellt.

Es gibt 64 dreifach unendliche Systeme von Berührungscurven 3^{ter} Ordnung. Diese 64 Systeme unterscheidet man in zwei Arten, 28 von der einen und 36 von der anderen Art. Diejenigen 1^{ter} Art zeichnen sich dadurch aus, dass jedem derselben eine der 28 Doppeltangenten entspricht, deren beide Berührungspunkte ebenso wie die sechs Berührungspunkte der Curve 3^{ter} Ordnung auf dem nämlichen Kegelschnitt liegen. Diejenigen 2^{ter} Art besitzen dagegen diese Eigenschaft nicht; sie enthalten ein einfach unendliches System von Curven 3^{ter} Ordnung, die in eine Tangente an die Curve 4^{ter} Ordnung und einen Kegelschnitt degenerirt sind, welcher durch die beiden Punkte geht, in denen die Tangente die Curve 4^{ter} Ordnung wieder trifft, und welcher diese Curve in weiteren drei Punkten berührt.

Gibt man der Gleichung der Curve 4^{ter} Ordnung die Gestalt $T_1 F_3 = \Omega^2$, so ist $F_3 = 0$ ein Curve 3^{ter} Ordnung eines Systems 1^{ter} Art.

Die Berührungscurven 3^{ter} Ordnung von der 1^{ten} oder 2^{ten} Art zeichnen sich immer dadurch aus, dass durch die zwölf Berührungspunkte zweier Curven 3^{ter} Ordnung desselben Systems eine neue Curve 3^{ter} Ordnung geht.

In jedem System von Berührungscurven 3^{ter} Ordnung gibt es 64 cubische Curven, welche die Curve 4^{ter} Ordnung in drei

Punkten vierpunktig berühren. Die Anzahl solcher cubischen Curven beträgt mithin $4^6 = 4096$.

Es existiren 728 Systeme von Curven 3ter Ordnung, welche die Curve 4ter Ordnung in vier Punkten dreipunktig berühren. Diese 728 Systeme zerfallen derart in je 364, dass die Berührungspunkte einer Curve des einen Systems und diejenigen einer Curve des anderen Systems auf demselben Kegelschnitt liegen.

Eine allgemeine Curve 4ter Ordnung lässt sich auch auf die folgende von Hesse, *Crelle,* 49 angegebene Art erzeugen:

Es liege ein Netz von Flächen 2ten Grads vor:

$$x_1 \sum_1^4 \alpha_{ik} z_i z_k + x_2 \sum_1^4 \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum_1^4 \gamma_{ik} z_i z_k = 0,$$

worin die x_1, x_2, x_3 die homogenen Parameter des Netzes, die z_1, z_2, z_3, z_4 die Punktcoordinaten des Raums sind, und

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki},\ \beta_{ik} = \beta_{ki},\ \gamma_{ik} = \gamma_{ki} \quad \text{ist.}$$

Die Spitzen der in diesem Netz enthaltenen Kegel liegen auf einer Raumcurve 6ter Ordnung. Interpretirt man nun die x als Punktcoordinaten der Ebene, *so entsprechen den Punkten dieser gewundenen Curve 6ter Ordnung (den Spitzen der Kegel) in der Ebene die Punkte einer allgemeinen ebenen Curve 4ter Ordnung, deren Gleichung sich ergibt, wenn man die Discriminante der allgemeinen Fläche 2ten Grads des Netzes gleich Null setzt.*

Schreibt man

$$\pi_{ik} = x_1 \alpha_{ik} + x_2 \beta_{ik} + x_3 \gamma_{ik},$$

so lautet die Gleichung der Curve 4ter Ordnung

$$C_4 = \begin{vmatrix} \pi_{11}, & \pi_{12}, & \pi_{13}, & \pi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41}, & \pi_{42}, & \pi_{43}, & \pi_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Gibt man der Gleichung der Curve diese Gestalt, so ist

$$\Phi_{uu} = \begin{vmatrix} \pi_{11}, & \cdots, & \pi_{14}, & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot, & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot, & u_3 \\ \pi_{41}, & \cdots, & \pi_{44}, & u_4 \\ u_1, & \cdots, & u_4, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

bei variabelen u die Gleichung einer Berührungscurve 3ter Ordnung aus einem System 2ter Art und

$$\Phi_{uv} = \begin{vmatrix} \pi_{11}, & \cdots, & \pi_{14}, & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41}, & \cdots, & \pi_{44}, & u_4 \\ v_1, & \cdots, & v_4, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Curve 3ter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte von $\Phi_{uu} = 0$ und $\Phi_{vv} = 0$ geht.

Wenn die Gleichung des Netzes von Flächen 2ter Ordnung in der symbolischen Form $0 = a_x \alpha_z^2 = b_x \beta_z^2 = \cdots$ geschrieben wird, worin die x ternäre und die z quaternäre Variabele sind, *so lautet die Gleichung von C_4*

$$(\alpha\beta\gamma\delta)^2 a_x b_x c_x d_x = 0,$$

und die Gleichungen der Curven 3ter Ordnung Φ_{uu}, Φ_{uv} sind:

$$\Phi_{uu} = (\alpha\beta\gamma u)^2 a_x b_x c_x = 0,$$
$$\Phi_{uv} = (\alpha\beta\gamma u)(\alpha\beta\gamma v) a_x b_x c_x = 0.$$

Von Interesse ist auch, *dass sich eine eindeutige umkehrbare Zuordnung zwischen den Geraden, welche die acht Fundamentalpunkte des Netzes der Flächen 2ter Ordnung zu je zweien verbinden, und den 28 Doppeltangenten feststellen lässt.*

Eine andere Erzeugungsart einer allgemeinen Curve 4ter Ordnung ist die folgende von Geiser, *Math. Ann.*, 1:

Wenn von einem Punkt P der Berührungskegel an eine cubische Fläche gezogen wird, so erhält man einen Kegel 6ter Ordnung, wenn aber der Punkt P auf der Fläche selbst liegt, so ergiebt sich ein Kegel 4ter Ordnung und zugleich die zweimal gezählte Berührungsebene in diesem Punkt P. Schneidet man nun diesen Kegel mit einer Ebene, so wird dadurch eine allgemeine Curve 4ter Ordnung erzeugt, deren Doppeltangente die Gerade ist, in welcher diese Ebene die in P berührende Ebene trifft.

Die ebenen Schnitte der Fläche 3ter Ordnung lassen sich in Curven 3ter Ordnung projiciren, welche die Curve 4ter Ordnung berühren; insbesondere ergibt sich das dreifach unendliche System von Berührungscurven 3ter Ordnung von der 1ten Art, welches der Doppeltangente zugeordnet ist, die aus der Berührungsebene in P resultirt. Die Projectionen der 27 Geraden der Fläche 3ter Ordnung sind die übrigen 27 Doppeltangenten der ebenen Curve 4ter Ordnung.

Für das Studium der Configuration der Doppeltangenten der ebenen Curve 4^{ter} Ordnung ist es von Vortheil, eine Bezeichnungsweise oder Darstellungsart zu benutzen, aus welcher die gesuchte Configuration leicht hervorgeht.

Eine der zur Anwendung gekommenen Darstellungsarten, zu welcher die oben erwähnte *Hesse'sche Figur* führen kann, geschieht *mittelst der 28 Geraden, welche acht Fundamentalpunkte zu je zweien verbinden.*

Eine andere Art, sie darzustellen, ist die *mittelst der sogenannten ungeraden Charakteristiken vom Geschlecht 3.* Siehe *Repert.*, 1, p. 454.

Jede Doppeltangente lässt sich durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} i & j & h \\ i_1 & j_1 & h_1 \end{pmatrix}$$

ausdrücken, worin i, j, h, i_1, j_1, h_1 *die Zahlen* 0 *oder* 1 *sind und die Summe*

$$ii_1 + jj_1 + hh_1$$

ungerade ist.

Nach der ersten Darstellungsart wird eine Gruppe von vier Doppeltangenten, durch deren Berührungspunkte ein Kegelschnitt geht, entweder durch die vier Seiten eines Vierseits (210 mal) repräsentirt oder durch vier Gerade, von denen keine zwei einen der acht Punkte gemeinschaftlich haben (105 mal).

Nach der zweiten Darstellungsart dagegen wird eine solche Gruppe durch vier ungerade Charakteristiken repräsentirt, die derart sind, dass die Summen der Elemente, welche die nämlichen Stellen einnehmen, sämmtlich gerade Zahlen sind.

Von diesen Principien ausgehend, kann man untersuchen, wie viel Triaden, Tetraden, etc. von Doppeltangenten existiren, denen besondere Eigenschaften zukommen; z. B. Triaden, deren 6 Berührungspunkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen, Tetraden, von deren 8 Berührungspunkten 6 (oder auch niemals 6) sich auf einem Kegelschnitt befinden, etc.

Unter den Gruppen von *sechs* Doppeltangenten (den *Hexaden* von Doppeltangenten) sind diejenigen zu beachten, welche Hesse und Steiner studirt haben: *es gibt 1008 Hexaden von Doppeltangenten, durch deren Berührungspunkte eine eigentliche Curve* 3^{ter} *Ordnung geht.*

Bei der ersten der oben angegebenen Darstellungsarten werden diese Gruppen durch drei verschiedene Figuren repräsentirt, nämlich: a) *die Seiten zweier Dreiecke, deren Ecken 6 der 8 Punkte* *sind;* b) *die Gerade, welche zwei Punkte verbindet, und die fünf Geraden, welche einen anderen Punkt mit den dann noch übrigen 5 Punkten verbinden;* c) *die Geraden, welche einen Punkt mit 3 anderen und einen anderen Punkt mit den 3 übrigen verbinden.*

Es existiren ferner 5040 Gruppen von 6 Doppeltangenten, deren 12 Berührungspunkte sich derart in je 6 theilen, dass durch jede Gruppe von 6 Punkten ein Kegelschnitt geht.

Die 6 Doppeltangenten einer der 1008 Gruppen der ersten Art berühren den nämlichen Kegelschnitt, während jede der 5040 Gruppen der zweiten Art in drei Paare von Doppeltangenten derart sich theilt, dass die drei Schnittpunkte der Tangenten eines jeden Paares in einer Geraden liegen.

Unter den Gruppen von *sieben* Doppeltangenten (den Heptaden von Doppeltangenten) gibt es 288, welche die *vollen Systeme* Aronhold's heissen und aus 7 Doppeltangenten bestehen, die so beschaffen sind, dass *niemals* die 6 Berührungspunkte dreier von ihnen sich auf einem Kegelschnitt befinden.

Diese vollen Systeme werden durch die 7 Geraden repräsentirt, welche einen der 8 Punkte mit den übrigen 7 verbinden, oder von den Geraden, welche die drei Seiten eines Dreiecks bilden, und von den vier Verbindungslinien eines der übrigen Punkte mit den anderen vier.

Es gibt 72 Aronhold'sche Systeme, welche eine gegebene Doppeltangente enthalten, und 16, in welchen zwei gegebene Doppeltangenten vorkommen.

Mittelst der sieben Doppeltangenten eines Aronhold'schen Systems lassen sich alle anderen durch lineare Constructionen bestimmen.

Umgekehrt: *Sind in der Ebene sieben beliebige Gerade gegeben, so kann man im Allgemeinen eine Curve 4ter Ordnung construiren, welche die sieben gegebenen Geraden zu Doppeltangenten hat, die in Bezug auf die Curve 4ter Ordnung ein volles Aronhold'sches System bilden.* Aronhold, *Berl. Monatsber.*, 1864; Salmon-Fiedler, *Höh. Curv.*, § 264, S. 307 u. ff.; Frobenius, *Crelle*, 99.

Von den verschiedenen Formen, welche eine Curve 4ter Ordnung haben kann, ist die sogenannte Plücker'sche von Interesse, welche aus 4 Ovalen besteht, von denen jedes ausserhalb eines jeden anderen liegt. Jedem dieser Ovale entspricht eine Doppeltangente, welche es in zwei Punkten berührt.

Alle Doppeltangenten einer solchen Curve sind reell.

Die Curven 4^{ter} Ordnung studirte Plücker, *Theorie der algebr. Curven,* Bonn, 1839; Hesse, *Crelle,* 49, 55, 59; Steiner, ib., 49; Cayley, ib., 68; Clebsch, ib., 63; Geiser, ib., 73; *Math. Ann.,* 1; Zeuthen, *Math. Ann.,* 7, 8; Klein, ib., 10, 11. Die letzteren beschäftigten sich speciell mit der Classification der Curven vom Gesichtspunkt der Realität der Doppeltangenten aus.

Die Bestimmung der Curve, welche durch die 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten geht, führte aus: Hesse, *Crelle,* 36, 40, 41; Salmon, *Quart. Journ.,* 3; Cayley, *Phil. Trans.,* 1859, 1861 und Dersch, *Math. Ann.,* 7.

Von den Arbeiten über die Bestimmung der Doppeltangenten ist auch Aeschlimann's Dissertation: *Zur Theorie der ebenen Curven 4^{ter} Ordnung,* Zürich 1880 zu erwähnen.

Die Curven 4^{ter} Ordnung wurden auch eingehend vom Gesichtspunkt der Theorie der Abel'schen Funktionen vom Geschlecht 3 (siehe Bd. 1, Kap. 17) studirt, mit welcher Theorie sie in der engsten Beziehung stehen. Wir citiren in der Beziehung: Riemann, *Theorie der Abel'schen Funktionen, Crelle,* 54, 1857; Clebsch-Gordan, *Theorie der Abel'schen Funct.,* Leipzig, 1866; Weber, *Th. d. Abel'schen Funct. vom Geschlecht 3,* Berlin, 1876; Klein, l. c.; siehe auch die *Geom.* von Clebsch-Lindemann.

Andere Studien über die Configuration der 28 Doppeltangenten sind von Aronhold, l. c.; Noether, *Math. Ann.,* 15, 46; Frobenius, *Crelle,* 99; Weber, *Math. Ann.,* 23; Pascal, *Rend. Lincei,* 1892, 1893, etc.

Das Studium der Configuration der Doppeltangenten lässt sich auf die sogenannten *Charakteristiken* begründen. Siehe Pascal, *Ann. di mat.,* 20. Man vergleiche ferner die Darstellung in *Weber's Algebra,* Bd. 2, p. 479 u. ff.; dort wird auch eine Behandlung der algebraischen Seite der Frage geliefert.

Ueber die Configuration der 24 Wendepunkte der allgemeinen Curve*) 4^{ter} Ordnung ist wenig bekannt. Eine *Dissertation* von Justus Grassmann in dieser Richtung, Berlin, 1875, in welcher

*) Unter *allgemeiner* Curve wird eine Ordnungscurve ohne Doppelpunkt (bez. eine Classencurve ohne Doppeltangente) verstanden.

bewiesen werden sollte, dass der durch 5 Wendepunkte gehende Kegelschnitt noch drei weitere Wendepunkte enthält, ist fehlerhaft; siehe Klein, *Math. Ann.*, 10, p. 397. Die Gleichung vom 24ten Grad, von welcher die Wendepunkte abhängen, untersuchte Gerbaldi, *Rend. Palermo,* 7.

§ 2. Curven 4ter Ordnung mit singulären Punkten.

Man gebe der Gleichung der Curve 4ter Ordnung die Gestalt $T_1 T_2 T_3 T_4 = S^2$. Wenn von den sechs Schnittpunkten der Geraden $T = 0$ einer, zwei, drei auf dem Kegelschnitt $S = 0$ liegen, so hat die Curve 4ter Ordnung einen, zwei, drei Doppelpunkte.

Gibt man ferner der Curve 4ter Ordnung die Form $UW = V^2$ und haben die drei Kegelschnitte

$$U = 0, \quad W = 0, \quad V = 0$$

einen, zwei, drei Punkte gemeinschaftlich, so besitzt die Curve 4ter Ordnung auch in diesem Fall einen, zwei, drei Doppelpunkte.

Eine Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkt hat nur 16 Doppeltangenten. Bei der Geiser'schen Darstellung (siehe § 1) erhält man sie, wenn das Projectionscentrum P auf einer der Geraden p der Fläche 3ter Ordnung angenommen wird; der Punkt, in welchem diese Gerade die schneidende Ebene trifft, ist alsdann der Doppelpunkt; die Projectionen der 16 Geraden, welche auf der Fläche 3ter Ordnung die Gerade p *nicht* schneiden, geben die 16 Doppeltangenten.

Bei der Hesse'schen Darstellung (siehe § 1) dagegen erhält man sie, indem man zwei von den 8 Fundamentalpunkten des Netzes von Flächen 2ter Ordnung zusammenfallen lässt.

Die Configuration der Doppeltangenten lässt sich auf die nämliche Art untersuchen, wie die allgemeine, wenn man sich denkt, zwei von den acht Fundamentalpunkten fallen zusammen und mithin die 16 Doppeltangenten durch die Geraden darstellt, welche *sechs* Fundamentalpunkte zu je zweien verbinden, und durch eine andere Gerade, welche durch einen siebenten Punkt geht. Die Geraden, welche diesen siebenten Punkt mit den übrigen sechs verbinden, entsprechen den sechs von dem Doppelpunkt an die Curve gelegten Tangenten.

Die 16 Doppeltangenten lassen sich auf 60 Arten in Gruppen von je vier derart vereinigen, dass durch die acht Berührungspunkte der vier Tangenten einer Gruppe ein Kegelschnitt geht.

Ueber die Curven 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkt siehe Brioschi, *Math. Ann.*, 4; Cremona, ib., id.; Brill, *Crelle*, 65; *Math. Ann.*, 6, etc.

Von den Curven 4ter Ordnung *mit zwei Doppelpunkten* sind in besonders eingehender Art diejenigen untersucht worden, deren beide Doppelpunkte die *imaginären unendlich fernen Kreispunkte* sind. Sie heissen *bicirculare Curven 4ter Ordnung*. Casey, *Trans. of the R. Irish Acad.*, 24, 1869 und Siebeck, *Crelle*, 57, 59, 1860.

Aus jedem der beiden Doppelpunkte einer Curve 4ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten gehen vier Tangenten an die Curve und die anharmonischen Verhältnisse dieser beiden Büschel von vier Tangenten sind einander gleich.

Die 16 Schnittpunkte der ersten 4 Tangenten mit den zweiten 4 Tangenten liegen zu je vieren auf Kegelschnitten, welche durch die beiden Doppelpunkte gehen.

Die bicirculare Curve lässt sich als die Enveloppe eines Kreises von variabelem Radius ansehen, dessen Centrum sich auf einem festen Kegelschnitt bewegt, und der einen anderen festen Kreis immer orthogonal durchschneidet. Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so zerfällt die bicirculare Curve in die unendlich ferne Gerade und in eine Curve 3ter Ordnung.

Ein specieller Fall der Curven 4ter Ordnung mit zwei Spitzen sind die sogenannten Cartesischen *Ovale*, (Siehe Kap. 17, § 11) deren beide Spitzen die zwei imaginären unendlich fernen Kreispunkte sind.

Die Cartesischen aus zwei Ovalen bestehenden Curven haben die Eigenschaft, dass auf einer Geraden immer drei feste Punkte A, B, C existiren, für deren Abstände ϱ, ϱ', ϱ'' von einem Punkt der Curve die Relationen

$$l\varrho + m\varrho' = c$$
$$l\varrho + n\varrho'' = c'$$
$$m\varrho' - n\varrho'' = c''$$

bestehen, worin l, m, n, c, c', c'' Constante sind. Die Punkte A, B, C heissen *Brennpunkte*; sind sie sämmtlich reell, so heisst die Curve *die beiden Ovale des Cartesius*; ist nur einer reell, so ist die Curve von der, die Descartes studirte, verschieden.

Die Gleichung der Cartesischen Curve lautet

$$S^2 = k^3 L,$$

worin $S = 0$ *die Gleichung eines Kreises,* $L = 0$ *die einer Geraden ist, und* k *eine Constante bedeutet. Die Gerade* $L = 0$ *ist eine Doppeltangente der Curve.*

Die Summe der Abstände eines Brennpunkts von den vier Punkten, in welchen eine Transversale die Cartesische Curve schneidet, ist constant.

Specielle Fälle der Cartesischen Curve sind die *Pascal'sche Schnecke* oder *Limaçon (lumaca)* und die *Cardioide* (siehe Kap. 17, § 11), von denen die erste ausser den beiden Spitzen in den beiden Kreispunkten noch einen Knotenpunkt hat, und bei der zweiten dieser Knotenpunkt von neuem in eine dritte Spitze ausgeartet ist.

Der Gleichung der Curve 4ter Ordnung mit drei Doppelpunkten kann man die Gestalt

$$a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 + 2 a_{23} x_1^2 x_2 x_3 + \\ + 2 a_{31} x_2^2 x_3 x_1 + 2 a_{12} x_3^2 x_1 x_2 = 0$$

geben, wenn die Ecken des Fundamentaldreiecks der homogenen Coordinaten in die drei Doppelpunkte gelegt werden.

Dividirt man die linke Seite mit x_1^2, x_2^2, x_3^2, so erkennt man aus der so erhaltenen Gestalt der vorstehenden Gleichung, dass sie sich aus der Gleichung eines Kegelschnitts durch Vertauschung der Variabelen mit ihren reciproken Werthen ableiten lässt.

Diese Bemerkung kann mit Vortheil zum Studium der Curve benutzt werden.

Bei einer Curve 4ter Ordnung mit drei Doppelpunkten berühren die sechs in diesen Punkten an die Curve gelegten Tangenten denselben Kegelschnitt.

Die sechs Tangenten, welche sich von den drei Doppelpunkten aus an die Curve ziehen lassen, berühren ebenfalls einen und denselben Kegelschnitt.

Die acht Berührungspunkte der 4 Doppeltangenten einer solchen Curve liegen auf dem nämlichen Kegelschnitt.

Die Gleichung der Curve 4ter Ordnung mit drei Cuspidalpunkten lässt sich immer in die Form

$$x_1^{-\frac{1}{2}} + x_2^{-\frac{1}{2}} + x_3^{-\frac{1}{2}} = 0$$

bringen; die drei Spitzentangenten sind dann durch die Gleichungen

$$x_1 = x_2$$
$$x_2 = x_3$$
$$x_3 = x_1$$

gegeben und gehen mithin durch denselben Punkt.

Die Curven 4^{ter} Ordnung mit drei Doppelpunkten wurden besonders von Brill, *Math. Ann.*, 12 und Bretschneider, *Diss.*, Erlangen, 1875 untersucht. Siehe auch eine neuere Arbeit von De Vries, *La quartique trinodale, Archives Teyler,* (2), 7, Haarlem 1900.

Die Curven 4^{ter} Ordnung mit *Undulationspunkten*, d. h. Punkten, in denen die Tangente die Curve vierpunktig berührt, wurden von Cayley, Salmon, *höhere ebene Curven,* etc., Kantor, *Sitzungsber. d. Wiener Acad.*, 79, 1879 und Masoni, *Dissert.*, Napoli 1882 studirt.

In den Undulationspunkten wird die Curve 4^{ter} Ordnung von ihrer eigenen Hesse'schen Curve berührt. Cayley.

Ueber die biquadratische ternäre Form, ihre Covarianten und Invarianten siehe Bd. 1, p. 339 und folgende.

Kapitel IX.

Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen und algebraischen Raumcurven.

§ 1. Allgemeines. Abwickelbare und windschiefe Flächen. Schnitte von Flächen. Die Geometrie auf den algebraischen Flächen.

Der Ort der Punkte, welche analytisch durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grads zwischen den drei Cartesischen Coordinaten eines Punkts des Raums bestimmt werden, heisst eine *Fläche* n^{ter} *Ordnung.*

Die Fläche 1^{ter} *Ordnung ist die Ebene.*

Jede Gerade des Raums trifft die Fläche n^{ter} *Ordnung in* n *(reellen oder imaginären) Punkten und jede Ebene schneidet sie in einer Curve* n^{ter} *Ordnung.*

Die Gleichung einer Fläche n^{ter} *Ordnung enthält homogen*

$$\tfrac{1}{6}n(n^2+6n+11)+1=\binom{n+3}{n}=N(n)+1$$

Coefficienten.

Tangente an eine Fläche wird die Grenzlage einer Geraden genannt, welche durch zwei Punkte der Fläche geht, wenn diese Punkte, immer auf der Fläche bleibend, sich unbegrenzt einander nähern (*zweipunktige Berührung*).

Osculationstangente einer Fläche ist die Grenzlage einer Geraden, welche durch drei oder mehr Punkte einer Fläche geht, wenn diese Punkte sich unbegrenzt einander nähern. *Dreipunktige Berührung, vierpunktige* etc.

Alle Tangenten an eine Fläche in einem Punkt P derselben liegen im Allgemeinen in einer Ebene, welche die Tangentenebene der Fläche in dem Punkt P heisst.

Die Tangentenebene einer Fläche in einem Punkt P schneidet die Fläche in einer Curve, die in P einen Doppelpunkt hat. Ist

P eine Spitze (oder Cuspidalpunkt), so heisst die Tangentenebene *stationär* oder *Wendungsberührungsebene.*

Die beiden Tangenten in dem Doppelpunkt (Inflexions- oder Haupttangenten) sind zwei Osculationstangenten der Fläche. Je nachdem diese Tangenten reell oder imaginär sind oder zusammenfallen, heisst der Punkt P der Fläche *hyperbolisch, elliptisch* oder *parabolisch.*

Die parabolischen Punkte einer Fläche bilden die sogenannte *parabolische Curve (Curve der parabolischen Punkte).*

Die Anzahl der Tangentenebenen, die man von einer beliebig im Raum gelegenen Geraden aus an eine Fläche legen kann, heisst *Classe der Fläche.*

Eine Fläche n^{ter} Ordnung ist im Allgemeinen von der Classe $n(n-1)^2$, wenn die Fläche keine Singularität enthält.

Die Gleichung der Fläche sei in homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 gegeben und es werde angenommen, die linke Seite sei nach den Potenzen von x_4 geordnet, die Gleichung habe also die Gestalt

$$u_0 x_4^n + u_1 x_4^{n-1} + u_2 x_4^{n-2} + \cdots = 0,$$

worin $u_0, u_1, u_2, \ldots$ homogene ganze Funktionen vom Grad $0, 1, 2, \ldots$ in x_1, x_2, x_3 sind.

Wenn der Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ein Punkt der Fläche ist, so folgt $u_0 = 0$, und *die Tangentenebene in diesem Punkt wird durch $u_1 = 0$ dargestellt.*

Wenn wir anstatt der Tangentialebene mit Dupin eine ihr parallele und unendlich nahe Ebene betrachten, so kann der Schnitt dieser Ebene mit der Fläche, abgesehen von Unendlichkleinen höherer Ordnung, annähernd als eine Curve 2^{ter} Ordnung angesehen werden, welche die Dupin'sche Indicatrix genannt wird. Der Punkt der Fläche ist elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem dieser Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Gibt man der Gleichung der Fläche die Gestalt $z = f(x, y)$, so ist der Punkt (x, y, z) der Fläche elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \lesseqgtr \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \quad \text{ist.}$$

Der nicht ebene Schnitt oder ein Theil des nicht ebenen Schnitts zweier *algebraischer* Flächen heisst *eine algebraische, nicht ebene oder gewundene, oder doppelt gekrümmte Curve oder auch eine algebraische Raumcurve.*

Jede algebraische Raumcurve wird von einer beliebigen Ebene des Raums in einer festen Anzahl von (reellen, zusammenfallenden oder imaginären) Punkten geschnitten. Diese Zahl heisst *die Ordnung der Raumcurve.*

Die geringste Ordnung einer nicht degenerirten Raumcurve ist die dritte.

Man beachte, dass *streng genommen nicht,* wie bei den ebenen Curven, die Gesammtheit zweier Raumcurven von den Ordnungen d, d' immer als Degeneration einer Raumcurve von der Ordnung $d + d'$ betrachtet werden kann; denn, wenn eine auf einer algebraischen Fläche liegende Raumcurve von der Ordnung $d + d'$ in zwei Curven von den Ordnungen d und d' zerfällt, so werden diese im Allgemeinen Schnittpunkte haben, und dieser Fall wird im Allgemeinen nicht eintreten, wenn die beiden gegebenen Curven beliebig im Raum liegen.

Die Grenzlage einer Geraden, welche durch zwei sich unbegrenzt einander nähernde Punkte einer Curve geht, heisst, wie immer, die *Tangente an die Curve,* und die Grenzlage einer Ebene, welche durch drei sich unbegrenzt einander nähernde Punkte einer Curve geht, *die Schmiegungsebene (Krümmungsebene oder Oculationsebene) an die Curve.*

Die Classe oder der Rang einer Raumcurve ist die Anzahl ihrer Tangenten, welche von einer beliebigen Geraden des Raums getroffen werden, oder auch die Anzahl der Ebenen, welche durch eine feste beliebige Gerade des Raums und durch Tangenten der Raumcurve gehen.

Einige Autoren nennen diese Zahl den *Rang* und verstehen unter *Classe* die Classe der osculirenden Developpabelen (siehe S. 207). Für uns jedoch sollen die Worte *Rang* und *Classe* einer gewundenen Curve dieselbe Bedeutung haben, ebenso wie wir den Worten *Ordnung* und *Rang* der Developpabelen (siehe § 4) denselben Sinn beilegen.

Jede durch die Bewegung einer Geraden erzeugte Fläche ist eine *Regelfläche.* Man unterscheidet *abwickelbare (developpabele)* und *windschiefe* (*nicht abwickelbare*) *Regelflächen.*

Jede *abwickelbare* Fläche ist der Ort der Tangenten einer Raumcurve. Sie wird daher durch die Bewegung einer Geraden erzeugt, deren beide aufeinander folgenden Lagen sich in derselben Ebene befinden.

Die Erzeugenden der Developpabelen sind die Tangenten der Raumcurve, welche ihrerseits *die Cuspidal- oder Rückkehrkante der Fläche* (*arête de rebroussement* nach Monge) ist.

Die Ordnung einer abwickelbaren Fläche ist der Classe der Raumcurve gleich.

Diese Zahl wird *der Rang* des aus der Raumcurve und ihrer Developpabelen bestehenden Systems genannt; vergl. S. 206.

Jede Osculationsebene der Raumcurve ist Tangentialebene an die abwickelbare Fläche, welche mithin die Enveloppe der Osculationsebenen der Raumcurve ist. Sie heisst daher auch *osculirende Developpabele. Schneidet man die abwickelbare Fläche mit einer Ebene, so ist der Punkt, in welchem diese Ebene die Raumcurve trifft, eine Spitze der Schnittcurve.*

Die Punkte, in welchen sich zwei nicht benachbarte Erzeugende der abwickelbaren Fläche treffen, bilden die *doppelt eingeschriebene Curve der developpabelen Fläche oder kurz ihre Doppelcurve oder Knotencurve.*

Die Curve, in welcher die Developpabele durch eine Ebene geschnitten wird, hat einen Doppelpunkt in jedem Punkt, in welchem die Doppelcurve von der Ebene getroffen wird.

Jede beliebige Erzeugende einer Developpabelen n^{ter} Ordnung trifft $n - 4$ andere nicht benachbarte Erzeugende.

Die Ebenen, welche durch zwei nicht consecutive Erzeugende gehen, hüllen eine neue Developpabele ein, welche die Raumcurve doppelt (in zwei Punkten) berührt und daher die *Bitangentialdeveloppabele an die Raumcurve* genannt wird.

Bei einer Raumcurve heisst die Anzahl ihrer *scheinbaren Doppelpunkte* die Zahl der von einem Punkt des Raums aus gezogenen Geraden, welche die Curve zweimal treffen. *Diese Zahl ist selbstverständlich für jeden beliebigen Punkt des Raums dieselbe.*

Bei einer developpabelen Fläche nennt man die Anzahl ihrer *scheinbaren Doppelebenen* die Zahl der in einer beliebigen Ebene des Raums liegenden Geraden, in denen zwei der die Developpabele einhüllenden Ebenen sich schneiden. *Auch diese Zahl ist natürlich constant.*

Classe der abwickelbaren Fläche heisst die Zahl der Tangentialebenen, welche sich von einem beliebigen Punkt des Raums aus an sie legen lassen, oder auch die Zahl der durch einen beliebigen Punkt des Raums gehenden Osculationsebenen an die Cuspidalcurve der Developpabelen.

Ein specieller Fall der abwickelbaren Fläche ist der *Kegel*. Diese Fläche wird durch die Bewegung einer Geraden erzeugt, von welcher ein Punkt festliegt.

Nimmt man an, der Schnitt des Kegels mit einer Ebene sei eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung, so heisst auch der Kegel algebraisch und n seine *Ordnung*. Die *Classe* des Kegels ist die Classe der Schnittcurve.

Die windschiefe Regelfläche wird durch eine Gerade erzeugt, welche sich so bewegt, dass im Allgemeinen keine zwei consecutiven Lagen derselben in der nämlichen Ebene liegen.

Eine windschiefe Fläche n^{ter} Ordnung ist auch n^{ter} Classe und umgekehrt. Cayley, *Cambr. Math. Journ.*, 7, 1852 = *Coll. math. papers*, 2, 33.

Die Punkte, in welchen sich zwei nicht benachbarte Erzeugende der windschiefen Fläche schneiden, bilden auch hier eine *Doppel- oder Knotencurve* der Fläche.

Die Ebenen, welche durch zwei nicht consecutive Erzeugende einer windschiefen Fläche gehen, sind Doppeltangentialebenen der Fläche. Sie hüllen eine abwickelbare Fläche ein, welche Doppeltangentialdeveloppabele der gegebenen windschiefen Fläche genannt wird.

Die Classe der Doppeltangentialdeveloppabelen einer windschiefen Fläche ist der Ordnung der Doppelcurve gleich (Cayley).

Wir wollen nun einige Fundamentalrelationen bez. *einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung ohne Singularitäten* betrachten. Vergl. § 4. Zugleich mit dieser allgemeinen Fläche sollen die beiden abwickelbaren Flächen in Betracht gezogen werden, welche von den Doppeltangentialebenen der Fläche und von den stationären Ebenen eingehüllt werden.

Wir bezeichnen mit:

n die Ordnung der Fläche,

a die Ordnung des der Fläche umschriebenen Kegels, dessen Spitze ein beliebiger Punkt des Raums ist,

δ die Anzahl der Doppelerzeugenden dieses Kegels,

$\varkappa$ die Anzahl der Rückkehrerzeugenden desselben Kegels,

n' die Classe der Fläche,
a' die Classe eines ebenen Schnitts derselben,
δ' die Anzahl der Doppeltangenten an diesen Schnitt,
$\varkappa'$ die Anzahl seiner Wendetangenten,
b' die Classe der von den Doppeltangentialebenen der Fläche umhüllten abwickelbaren Fläche,
k' die Anzahl der scheinbaren Doppelebenen dieser Developpabelen, d. h. die Anzahl der in einer beliebigen gegebenen Ebene liegenden Schnitte zweier ihrer Ebenen,
t' die Anzahl der die Fläche dreimal berührenden Ebenen,
q' die Ordnung der Developpabelen der Doppeltangentialebenen,
ϱ' die Ordnung der Curve der Berührungspunkte der Doppeltangentialebenen,
c' die Classe der Developpabelen der stationären Tangentialebenen der Fläche,
h' die Anzahl der scheinbaren Doppelebenen dieser Developpabelen,
r' die Ordnung derselben Fläche,
β' die Anzahl der den beiden abwickelbaren Flächen (d. h. der durch die Doppeltangentialebenen und der durch die stationären Ebenen erzeugten Developpabelen) gemeinschaftlichen Ebenen, welche für die letztere Fläche ebenfalls stationär sind,
γ' die Anzahl der denselben abwickelbaren Flächen gemeinsamen Ebenen, die jedoch auch für die erstere Fläche stationär sind,
σ' die Ordnung der parabolischen Curve.

Es bestehen dann die folgenden Relationen:

$a = a' = n(n-1)$, (diese Zahl pflegt man den *Rang der Fläche* zu nennen),

$\delta = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$,

$\varkappa = n(n-1)(n-2)$,

$n' = n(n-1)^2$,

$\delta' = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$,

$\varkappa' = 3n(n-2)$,

$b' = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)$,

$k' = \frac{1}{8}n(n-2)(n^{10}-6n^9+16n^8-54n^7+164n^6-$
$-288n^5+547n^4-1058n^3+1068n^2-1214n+1464)$,

$t' = \frac{1}{6}n(n-2)(n^7-4n^6+7n^5-45n^4+114n^3-$
$-111n^2+548n-960)$,

$q' = n(n-2)(n-3)(n^2+2n-4)$,

$\varrho' = n(n-2)(n^3-n^2+n-12)$,

$$
\begin{aligned}
c' &= 4n(n-1)(n-2),\\
h' &= \tfrac{1}{2}n(n-2)(16n^4 - 64n^3 + 80n^2 - 108n + 156),\\
r' &= 2n(n-2)(3n-4),\\
\beta' &= 2n(n-2)(11n-24),\\
\gamma' &= 4n(n-2)(n-3)(n^3+3n-16),\\
\sigma' &= 4n(n-2).
\end{aligned}
$$

Zwei Flächen von den Ordnungen n_1 und n_2 schneiden sich in einer Raumcurve von der Ordnung $n_1 n_2$.

Alle Flächen n^{ter} Ordnung, welche durch

$$N(n) - 1 = \binom{n+3}{3} - 2$$

willkürlich im Raum gegebene Punkte gehen, schneiden sich in einer und derselben Raumcurve von der Ordnung n^2.

Ist eine Raumcurve von der Ordnung n^2 der vollständige Schnitt zweier Flächen n^{ter} Ordnung, so enthält jede Fläche n^{ter} Ordnung, welche durch $N(n) - 1$ beliebige Punkte der Curve geht, die Curve vollständig.

Wenn eine Raumcurve μ^{ter} Ordnung gegeben ist, so lässt sich eine Fläche n^{ter} Ordnung durch sie legen, wenn nur

$$N(n) > n\mu$$

ist, weil alsdann jede Fläche n^{ter} Ordnung, die durch $n\mu + 1$ beliebig auf der Curve angenommene Punkte geht, die Curve μ^{ter} Ordnung vollständig enthält.

Die Anzahl nicht weiter reducirbarer Bedingungen, unter welchen eine Fläche n^{ter} Ordnung sich durch eine Curve μ^{ter} Ordnung legen lässt, hat als obere Grenze die Zahl

$$n\mu + 1.$$

Für eine Curve vom Geschlecht Null (vergl. § 4) *ist die Anzahl der Bedingungen genau $n\mu + 1$.*

Bei einer Curve vom Geschlecht Eins (elliptischen Curve) beträgt sie $n\mu$. Hermite, *Crelle, 82.*

Für eine Curve vom Geschlecht $p \leqq \mu - 3$ ist diese Zahl nicht weiter zurückführbarer Bedingungen $n\mu + 1 - p$, Lindemann, *Crelle,* 84; Halphen, *Journ. de l'École polyt.,* 52, p. 15.

Man beachte jedoch, dass diese Zahlen nur für hinreichend grosse n genau sind.

Wenn die Curve der vollständige Schnitt von Flächen der Ordnungen n_1, n_2 ist, so beträgt die Anzahl der entsprechenden *nicht reducirbaren Bedingungen für eine Fläche n^{ter} Ordnung, falls sie durch die Curve gehen soll, wieder*

$$n\mu + 1 - p$$

für jedes beliebige p, vorausgesetzt dass

$$n \geqq n_1 + n_2 - 3$$

ist; in dem anderen Fall setze man

$$n = n_1 + n_2 - \delta,$$

und findet dann als gesuchte Anzahl von Bedingungen:

$$n\mu + 1 - p + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{6}.$$

Siehe Halphen, l. c., p. 18.

Die Raumcurve, welche der vollständige Schnitt zweier Flächen von den Ordnungen n_1, n_2 ist, wird durch

$$N(n_1) - N(n_1 - n_2) - 1$$

willkürlich im Raum gegebene Punkte individualisirt.

Wenn die Schnittlinie zweier Flächen n^{ter} Ordnung eine vollständig auf einer Fläche p^{ter} Ordnung liegende Curve von der Ordnung np enthält, so ist ihr übriger Theil eine auf einer Fläche von der Ordnung $n - p$ gelegene Curve $[n(n - p)]^{ter}$ Ordnung. Poncelet, 1830.

Alle Flächen n^{ter} Ordnung, die durch $N(n) - 2$ beliebig im Raum gegebene Punkte gehen, schneiden sich ausser in diesen noch in anderen $n^3 - N(n) + 2$ durch die ersteren bestimmten Punkten.

Drei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 schneiden sich in $n_1 n_2 n_3$ Punkten, von denen ein Theil durch die übrigen bestimmt ist. Es sind ins Besondere, wenn $n_1 \geqq n_2 + n_3$ ist,

$$\tfrac{1}{2} n_2 n_3 (2n_1 - n_2 - n_3 + 4) - 1$$

Punkte willkürlich und der Rest ist durch diese bestimmt; wenn dagegen $n_1 < n_2 + n_3$ aber $n_1 > n_2$, $n_1 > n_3$ ist, so beträgt die Anzahl der willkürlichen Punkte

$$\tfrac{1}{2} n_2 n_3 (2n_1 - n_2 - n_3 + 4) + N(n_2 + n_3 - n_1 - 4).$$

Diese Formeln gelten nicht für $n_2 = n_3$. Jacobi, *Crelle*, 15.

Wenn von den n^3 Punkten, die drei Flächen n^{ter} Ordnung gemeinsam sind, $n^2 p$ auf einer Fläche p^{ter} Ordnung liegen, so befinden sich die $n^2(n - p)$ übrigen auf einer Fläche $(n - p)^{ter}$ Ordnung. Poncelet.

Drei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, welche eine Curve n^{ter} Ordnung und r^{ter} Classe (r^{ten} Rangs) gemeinsam haben, schneiden sich überdies in

$$n_1 n_2 n_3 - n(n_1 + n_2 + n_3 - 2) + r$$

Punkten.

Wenn diese Curve auf der ersten Fläche eine Doppelcurve ist (vergl. § 4), *so beträgt die Anzahl der gemeinsamen Punkte*

$$n_1 n_2 n_3 - n(n_1 + 2n_2 + 2n_3 - 4) + 2r.$$

Siehe Salmon-Fiedler, *Geom. des Raumes*, 2, p. 145, 146, 3te Ausg.

Wenn ein drei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 gemeinschaftlicher Punkt für sie ein vielfacher Punkt (vergl. § 4) *von den Ordnungen λ, μ, bez. ν ist, so besteht die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit in diesem Punkt sich $\lambda\mu\nu$ der $n_1 n_2 n_3$ Schnitte vereinigen, darin, dass die Berührungskegel an die drei Flächen in dem gemeinsamen Punkt keine gemeinschaftliche Erzeugende haben.* Einen strengen Beweis dieses Satzes, der die Erweiterung eines ähnlichen Theorems über die ebenen Curven ist (siehe z. B. die Arbeit von Voss, die auf S. 129 citirt wurde, *Math. Ann.*, 27, p. 533 und ff.), hat Berzolari, *Ann. di mat.*, 24 zu geben versucht; doch sind seine Untersuchungen viel umfangreicher.

Mit den Schnitten von Flächen beschäftigten sich Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures* etc., 2, Metz und Paris, 1822; Jacobi, *Crelle*, 15; Plücker, ib., 16, 19; Cayley, *Collected mathematical papers*, 13 Bde. und ein Indexband, Cambridge 1889—1898, 1, p. 259; Reye, *Math. Ann.*, 2; etc.

Von besonderem Interesse sind die hierher gehörigen Untersuchungen über Flächen, welche vielfache Punkte oder Linien gemeinschaftlich haben.

Resultate darüber verdankt man Cayley's Abhandlung über die birationalen Transformationen des Raums: *On the rational transf. between two spaces, Proc. of the Lond. Math. Soc.*, Bd. 3, 1870 = *Coll. math. papers*, 7, p. 189 mit ihren sogenannten *Aequivalenz- und Postulationsformeln.* Spätere Untersuchungen sind von Noether, *Ann. di mat.*, (2), 5 und Anderen.

Man kann über die Flächen und Raumcurven Theoreme aufstellen, die sich als Erweiterungen der Sätze ansehen lassen, welche die Grundlage der Theorie der Punktgruppen auf einer ebenen Curve bilden.

Es sei eine allgemeine Fläche F_n von der Ordnung n gegeben. Zwei Curven R, R', welche zusammengenommen den vollständigen Schnitt von F_n durch eine andere Fläche bilden, heissen *residual* und die eine das *Residuum* der anderen. Zwei Curven heissen ferner *corresidual*, wenn jede von ihnen in Bezug auf dieselbe dritte Curve *residual* ist. Analoge Definitionen gelten für die Gruppen von Punkten, welche aus einer Raumcurve von Flächen ausgeschnitten werden.

Wir können jetzt die *Restsätze* über die Flächen und Raumcurven auf die folgende Art fassen:

Sind auf einer Fläche zwei Curven R, R' residual zu derselben Curve R'', also corresidual zueinander, so sind sie es auch in Bezug auf jede andere Curve R''', ..., welche zu einer von ihnen (etwa R) residual ist.

Es sei eine Curve R als Schnitt zweier Flächen F, Φ gegeben und R' sei eine Residual- oder Restcurve von R; die durch R' gehenden Flächen mögen R in Punktgruppen schneiden, die zu einer anderen gegebenen Gruppe corresidual sind; nimmt man nun für F, Φ und R' andere Flächen bez. Curven und lässt nur R unverändert, so bleibt das System der Punktgruppen dasselbe.

Untersuchungen dieser Art (über die *Geometrie auf einer algebraischen Fläche*), deren erste Anregung Clebsch zu verdanken ist, stellte speciell Noether, *Math. Ann.*, 2, 8 an; in der letzten Zeit haben sich namentlich Castelnuovo und Enriques in verschiedenen Publicationen damit beschäftigt. Eine Darlegung der erhaltenen Resultate findet man in einer Arbeit der letzteren Autoren, *Math. Ann.*, 48.

Die ersten Studien über die Theorie der Flächen stammen aus der Zeit Euler's, von dem auch die Grundlage der Theorie der abwickelbaren Flächen herrührt.

Systematische Behandlungen dieser Theorie der Flächen vom Standpunkt der höheren Geometrie aus gibt es nicht viele. Indem wir uns vorbehalten, die speciellen Arbeiten an den betreffenden Stellen zu citiren, führen wir hier als grundlegend nur an: die Abhandlung von Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, Bologna, 1866, deutsch von Curtze, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen*, Berlin, 1870 und *Die analytische Geometrie des Raumes* von Salmon, deutsch v. Fiedler, 3te Aufl., Leipzig 1880. Man

beachte, dass in der deutschen Uebersetzung des Cremona'schen Werkes zahlreiche neue Abschnitte hinzugefügt wurden, die in dem italienischen Text nicht enthalten sind; unsere Citate beziehen sich überall auf die deutsche Ausgabe.

§ 2. Analytische Darstellung der gewundenen Curven. Die Monoidflächen Cayley's.

In der Lehre von den algebraischen Raumcurven ist die analytische Darstellung dieser Curven ein besonders interessantes Problem.

Wenn die Coordinaten eines Punkts der Curve als Functionen eines Parameters festgestellt sind, so ist das Problem damit gelöst; es ist jedoch nur selten thunlich, die Coordinaten in dieser Art auszudrücken.

Der Gedanke, die Curve durch die Gleichungen zweier Flächen darzustellen, welche durch sie gehen, bietet sich als der natürlichste zunächst dar; man erkennt aber leicht, dass es Curven gibt, welche nicht *vollständige Schnitte* zweier Flächen sind; diese Darstellung lässt uns daher im Stich, da sie die Raumcurve im Allgemeinen *nicht individualisiren* kann.

Alsdann dachte man daran, die Curve durch die Gleichungen *dreier* durch sie gehender Flächen zu bestimmen, welche sonst keine Punkte gemeinschaftlich haben. Man sah aber ein, dass im Allgemeinen auch *drei* Flächen nicht hinreichen, und fand in Folge eines Theorems von Kronecker, *Crelle*, 92, welches sich auf die Lehre von den algebraischen Funktionen bezieht, dass die Gleichungen von *vier* Flächen nöthig sein können, um eine allgemeine Curve zu kennzeichnen. Vahlen, *Crelle*, 108 gab dafür das folgende Beispiel an: Man nehme an, der Schnitt zweier Flächen F_μ, F_ν von den Ordnungen $\mu.\nu$ zerfalle in zwei Curven $R_m^p, R_{m'}^{p'}$ von den Ordnungen m, m' und den Geschlechtern p, p'*). Die Anzahl der Schnittpunkte der beiden Curven ist

$$s = m(\mu + \nu - 4) - 2(p - 1).$$

Legt man nun eine neue Fläche F_ϱ nur durch R_m^p, so wird diese von $R_{m'}^{p'}$ in

$$S = \mu\nu\varrho - m(\mu + \nu + \varrho - 4) + 2(p - 1)$$

1) Ueber die Definition des Geschlechts der Raumcurven siehe § 4.

Punkten geschnitten werden, welche auf allen drei Flächen, aber nicht auf R_m^p liegen.

Nun wird es im Allgemeinen nicht möglich sein, für eine gegebene Curve R_m^p drei Flächen derart zu bestimmen, dass S verschwindet; denn, betrachtet man eine Curve 5ter Ordnung vom Geschlecht Null R_5^0, welche eine vierfach schneidende Gerade (eine Quadrisecante) hat, so muss, wenn S verschwinden soll, weil durch R_5^0 keine Fläche zweiter Ordnung geht, $\mu = \nu = \varrho = 3$ sein; durch drei Flächen 3ter Ordnung allein kann aber R_5^0 nicht bestimmt werden, da, wie man leicht sieht, jede solche Fläche, weil sie R_5^0 enthält, auch die Quadrisecante enthalten müsste.

Eine andere Methode, eine Raumcurve darzustellen, besteht darin, die Gesammtheit aller die Curve treffender Geraden zu betrachten; führt man die sechs Geradencoordinaten im Raum ein, so wird der Complex von Geraden analytisch durch eine Beziehung zwischen diesen sechs Coordinaten ausgedrückt; umgekehrt aber stellt nicht jede Relation zwischen den sechs Geradencoordinaten auf solche Art eine Curve dar. Siehe Kap. 14. Mit dieser Darstellung beschäftigten sich Cayley, *Quart. Journ.*, 3, 5, 1860, 1862 und Voss, *Math. Ann.*, 13.

Noch eine weitere Darstellungsart schliesslich rührt ebenfalls von Cayley her und beruht auf den sogenannten *Monoidflächen*.

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines Punkts der Curve und von dem Punkt O $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$, einer Ecke des Fundamentaltetraeders, aus möge die Curve R_m^p von der Ordnung m und dem Geschlecht p auf die Ebene $x_4 = 0$ projicirt werden.

Die Gleichung der Projectionscurve sei

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

worin wir uns die Coordinaten ξ derart gewählt denken, dass

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_1 : x_2 : x_3 \quad \text{ist.}$$

Es bestehen dann die Relationen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \frac{\psi_n(\xi)}{\psi_{n-1}(\xi)},$$

worin die ψ rationale ganze Functionen der ξ von der Ordnung n bez. $n - 1$ sind.

Die Curve R_m^p ergibt sich dann als Schnitt der beiden Flächen

$$f_m(x) = 0 \quad \text{und} \quad x_4 \psi_{n-1}(x) - \psi_n(x) = 0,$$

von welchen die erste ein Kegel m^{ter} Ordnung ist, dessen Spitze in dem Punkt O $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ liegt, und die zweite eine Fläche n^{ter} Ordnung ist, die den Punkt O zum $(n-1)$-fachen Punkt hat (vergl. § 4) und von Cayley eine *Monoid*fläche genannt wurde.

Der Kegel und das Monoid schneiden sich ausser in R_m^p noch in $m(n-1)$ durch O gehenden Geraden, welche die Schnitte zweier Kegel $f_m = 0$ und $\psi_{n-1} = 0$ sind. Diese Geraden theilen sich in

$$(n-1)(m-n) + \alpha$$

doppelt zu zählende und

$$(n-1)(2n-m) - 2\alpha$$

weitere Gerade, wobei α auch Null sein kann; jede der $(n-1)(m-n)+\alpha$ Geraden ist eine Doppelgerade des Kegels $f_m = 0$; sowohl die $(n-1)(m-n)+\alpha$ wie die $(n-1)(2n-m)-2\alpha$ Geraden, deren Anzahl zusammen $n(n-1)-\alpha$ beträgt, liegen auf dem Kegel $\psi_n = 0$.

Die beiden Kegel $\psi_n = 0$ und $\psi_{n-1} = 0$ heissen *der obere bez. der untere Kegel* des Monoids.

Wenn R_m^p keine ebene Curve ist, so muss immer

$$n \geqq \tfrac{1}{2}m \quad \textit{sein;}$$

im Uebrigen ist die Ordnung des Monoids nicht bestimmt, da man ein Monoid durch ein anderes von verschiedener Ordnung ersetzen kann.

Dieser Kunstgriff, wie man wohl sagen darf, wurde von Cayley, *Compt. Rend.*, 1862 = *Coll. math. papers*, 5, 7 angegeben und später von anderen Autoren Noether, Halphen, Em. Weyr, etc. bei ihren Studien über die Raumcurven benutzt.

§ 3. Classification der gewundenen Curven.

Mit dem Problem der analytischen Darstellung der Raumcurven steht das ihrer Classification in enger Verbindung; denn für die Raumcurven gilt nicht, wie für die ebenen Curven oder die Flächen, der Satz, dass die Ordnung zur Charakterisirung der Art der Curve genüge; in der That existiren schon für die

4^{te} Ordnung zwei besondere durch vollständig verschiedene Eigenschaften ausgezeichnete Curven, wie zuerst Salmon, *Cambr. Journ.*, 5, 1850 und dann Steiner, *Flächen 3^{ten} Grades, Crelle,* 53, 1856 nachgewiesen hat.

Das Problem, von dem die Rede ist, lässt sich präcis auf die folgende Weise aussprechen:

Die verschiedenen Familien von Curven derselben Ordnung d derart aufzuzählen, zu definiren und voneinander zu unterscheiden, dass niemals eine Familie der specielle Fall einer anderen allgemeineren sein kann.

Bei diesen Untersuchungen kommen nur Curven ohne singuläre Punkte in Betracht (vergl. § 4), indem als Postulat angenommen wird, dass jede Curve mit singulären Punkten der specielle Fall einer Curve derselben Ordnung ohne singuläre Punkte sei. Siehe Halphen, an dem unten citirten Ort.

Mit diesem Problem beschäftigten sich besonders Halphen und Noether in zwei Abhandlungen, welche von der Berliner Akademie 1882 den Steiner'schen Preis erhielten, Halphen, *Journ. de l'École polyt.*, Hft. 52, 1882; Noether, *Berlin. Abhandl.*, 1883; *Crelle*, 93. Auf sie folgten Andere, darunter Valentiner, *Acta math.*, 2; Noether, ib., 8; etc.

Diese Untersuchungen haben noch nicht dazu geführt, das Problem in seiner vollen Allgemeinheit aufzulösen; bisher ist dies nur in speciellen Fällen gelungen.

Geht man davon aus, dass die Ordnung d allein nicht genügt, eine Raumcurve zu charakterisiren, so wird man wohl daran denken, andere Zahlen einzuführen, die man *Charakteristiken* nennen könnte, und die in Verbindung mit der Ordnung die Curve von den übrigen unterscheiden würden. Wenn man nun zunächst die beiden Arten von Raumcurven 4^{ter} Ordnung im Auge hat, so bietet sich der Gedanke, in Verbindung mit der Ordnung, die Anzahl h der *scheinbaren Doppelpunkte* zu betrachten, d. h. die Anzahl der Sehnen, die sich von einem *beliebigen* Punkt des Raums durch die Curve ziehen lassen.

Man findet aber, dass für die Ordnung 9 zwei *verschiedene* Curven existiren, für welche die Anzahl dieser Doppelpunkte dieselbe ist, nämlich $h = 18$. Die beiden Curven lassen sich jedoch durch eine andere Zahl unterscheiden, die Halphen mit dem Buchstaben n bezeichnete, *und welche die geringste Ordnung der Kegel angibt, welche alle h Sehnen enthalten, die von einem beliebigen Punkt des Raums an die Curve gezogen werden können; für die eine ist $n = 4$, für die andere $n = 5$.* Halphen selbst jedoch bemerkte, dass zwei verschiedene Curven 15^{ter} Ordnung existiren, für welche $h = 63$, $n = 9$ ist.

Cayley, *Coll. Math. Pap.*, 5, p. 613, sowie *Crelle*, 111 machte darauf aufmerksam, dass in gewissen Fällen, in welchen Halphen eine Curve gefunden hatte, eine solche in Wirklichkeit nur für specielle Configurationen der h Knotenlinien existiren kann; wie er z. B. fand, reicht es für die Existenz der Curven 9^{ter} Ordnung, für welche $h = 16$ und $n = 4$ ist, nicht hin, dass die 16 Knotenlinien auf einem Kegel 4^{ter} Ordnung liegen; sie müssen gleichzeitig auf zwei solchen Kegeln liegen. Die drei Zahlen d, h, n genügen daher im Allgemeinen nicht, die Curve zu individualisiren, es müssen ausserdem noch die Bedingungen untersucht werden, unter welchen die Curve, welche diese charakteristischen Zahlen besitzt, wirklich existirt.

Wir wollen nun die Hauptsätze angeben, zu denen Halphen und Andere gekommen sind.

Die Curven von der Ordnung d mit h scheinbaren Doppelpunkten bilden eine einzige Familie, wenn h zwischen

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad \textit{und} \quad \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1 \ \textit{liegt.}$$

Der grösste Werth von h ist $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, und der kleinste ist die grösste ganze Zahl in $\frac{1}{4}(d-1)^2$ enthaltene Zahl.

Man kann jedoch die Zahl h zwischen diesen Grenzen nicht willkürlich wählen, weil für ein gegebenes d die Reihe der h Lücken aufweist; von der grössten in

$$\frac{(d-1)(d-2)}{3}$$

enthaltenen ganzen Zahl an sind dagegen Lücken nicht mehr vorhanden.

Die Curven d^{ter} Ordnung, für welche h kleiner als die grösste in $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$ enthaltene ganze Zahl ist, liegen auf Flächen 2^{ter} Ordnung; ist h grösser als diese Zahl, so befinden sich die entsprechenden Curven auf einer Fläche 3^{ter} Ordnung, ist h grösser als $3\,\frac{(d-2)^2}{8}$, auf einer Fläche 4^{ter} Ordnung etc.

Jede Curve d^{ter} Ordnung, für welche die Zahl n (siehe oben) kleiner als $\frac{1}{3}(d-3)$ ist, liegt auf einer Fläche 2^{ter} Ordnung.

Jede Curve von der Ordnung d, welche nicht auf einer Fläche 2^{ter} Ordnung gelegen i[illegible] welche $n < \frac{1}{4}(d-4)$ ist, *liegt auf einer Fläche 3^{ter} Ordnung; ist $n < \frac{4}{5}(d-5)$, so befindet sich die Curve auf einer Fläche 4^{ter} Ordnung, wenn sie nicht schon auf Flächen 2^{ter} oder 3^{ter} Ordnung liegt; ist $n < \frac{5}{6}(d-6)$ und ist die Curve nicht auf einer Fläche niedrigerer Ordnung gelegen, so liegt sie auf einer solchen 5^{ter} Ordnung.*

Die folgenden Tabellen geben für jede Ordnung d die Anzahl der existirenden Curvenfamilien an; wir folgen dabei der citirten Abhandlung Halphen's, beschränken uns jedoch auf die ersten Fälle, um so mehr, weil die Resultate Halphen's nicht vollständig sicher sind; bei der neunten Ordnung muss z. B. die Halphen'sche Tabelle in der Art corrigirt werden, wie Cayley, *Coll. Math. Papers*, 5, p. 616 angegeben hat; über die Definition von *Geschlecht* siehe § 4.

1) *Nicht degenerirte gewundene Curven 2^{ter} Ordnung gibt es nicht;*

2) *Ordnung $d = 3$; es existirt eine einzige Familie gewundener Curven 3^{ter} Ordnung; die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte ist $h = 1$; das Geschlecht $p = 0$;*

3) *Ordnung $d = 4$; es gibt zwei Familien gewundener Curven 4^{ter} Ordnung; sie unterscheiden sich durch die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte, die 2 bez. 3 beträgt; ihr Geschlecht ist 1 bez.* 0;

4) *Ordnung $d = 5$; es existiren drei Familien gewundener Curven 5^{ter} Ordnung.*

In der nachstehenden Tabelle sind die entsprechenden Werthe von h und n, die kleinsten Ordnungen der Flächen, aus deren Schnitten diese Curven sich ergeben, die aus den Schnitten dieser Flächen resultirenden Ergänzungscurven und schliesslich das grösste Geschlecht p der Curven jeder Familie angegeben:

$d = 5$	$h =$	$n =$	kleinste Ordnungen der Flächen etc.	Ergänzungscurven	$p =$
	4	2	2 und 3	eine Gerade	2
	5	2	3 und 3	eine gewundene Curve 4^{ter} Ordnung mit 3 scheinbaren Doppelpunkten	1
	6	3	3 und 3	zwei Kegelschnitte	0

Alle diese Curven werden durch 20 Bedingungen bestimmt.

Salmon unterscheidet in seiner *Geometrie des Raumes*, Thl. 2 vier Familien von Curven 5^{ter} Ordnung; die 4^{te} ist jedoch als specieller Fall der 3^ten anzusehen; siehe Halphen, *Éc. polyt.*, 52, p. 12, Anm.

5) *Ordnung $d = 6$. Es gibt fünf Familien von gewundenen Curven 6^{ter} Ordnung. Die Anzahl der Constanten aller dieser Curven beträgt 24, d. h. jede von ihnen wird durch 24 Bedingungen bestimmt.*

Die entsprechende Tabelle lautet:

$d = 6$	$h =$	$n =$	kleinste Ordnungen der Flächen etc.	Ergänzungscurven	$p =$
	6	2	2 und 3	0	4
	7	3	3 und 3	gewundene Curve 3^{ter} Ordnung	3
	8	3	3 und 3	eine Gerade und ein Kegelschnitt	2
	9	3	3 und 3	3 Gerade	1
	10	4	3 und 4	eine zweite Curve 6^{ter} Ordnung von derselben Familie	0

6) *Ordnung $d = 7$. Es gibt sieben Familien gewundener Curven 7^{ter} Ordnung. Die Anzahl der Constanten einer jeden beträgt 28.*

$d = 7$	$h =$	$n =$	kleinste Ordnungen der Flächen etc.	Ergänzungscurven	$p =$
	9	3	2 und 4	eine Gerade	6
	10	3	3 und 3	ein Kegelschnitt	5
	11	4	3 und 3	zwei Gerade	4
	12	4	3 und 4	eine gewundene Curve 6^{ter} Ordnung mit 6 scheinbaren Doppelpunkten	3
	13	4	4 und 4	eine gewundene Curve neunter Ordnung	2
	14	4			1
	15	5			0

In allen diesen Fällen genügt, wie man sieht, die Zahl h zur Charakterisirung der Curve; erst von der neunten Ordnung an reicht die Zahl h, wie wir bereits gesagt haben, zu diesem Zweck nicht mehr aus.

Dementsprechend gilt für die Ordnung $d = 9$ auch die andere Eigenschaft, dass es zwei Familien von Curven gibt, welche dasselbe grösste Geschlecht p, nämlich $p = 10$, haben, und als verschieden voneinander anzusehen sind.

Ueber die Einzelheiten speciell in Bezug auf die vielfachen Secanten bei den verschiedenen oben aufgezählten Familien von Curven verweisen wir auf Noether, an den angegebenen Stellen, z. B. *Crelle,* 93, p. 310.

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch hinzufügen, dass einige Autoren auch daran gedacht haben, die gewundenen Curven nach der Beschaffenheit der ihnen entsprechenden abwickelbaren Flächen zu classificiren. Damit beschäftigten sich Chasles, *Compt. Rend.,* 54 und Schwarz, *Crelle,* 64, p. 1.

§ 4. Singuläre Punkte der Flächen und Raumcurven. Ihre charakteristischen Zahlen. Vielfache Secanten der Raumcurven. Das Geschlecht. Die Cayley'schen Formeln. Berührungen von Flächen.

Wenn ein Punkt einer Fläche derart ist, dass jede durch ihn gehende Gerade daselbst die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, so heisst er ein *Doppelpunkt* der Fläche.

Es gibt unendlich viele Gerade, die durch den Doppelpunkt P gehen, und in ihm eine dreipunktige Berührung (drei unendliche nahe Schnittpunkte) mit der Fläche haben. Der Ort dieser Geraden ist ein Kegel 2^{ter} Ordnung von der Beschaffenheit, dass jede Berührungsebene an ihn die Fläche in einer Curve schneidet, die in P eine Spitze hat.

Dieser Kegel kann in zwei verschiedene oder in zwei zusammenfallende Ebenen zerfallen; man erhält so drei Arten von Doppelpunkten: *conische, biplanare und uniplanare Punkte.*

Der *konische Punkt* führt auch den Namen *Knotenpunkt,* der *uniplanare* oder *Cuspidalpunkt* wurde von Cayley *Pinchpoint,* von den Franzosen auch *pinces-point* genannt.

Wenn $F = 0$ in homogenen Coordinaten die Gleichung der Fläche ist, so besteht die Bedingung, damit die Fläche einen Doppelpunkt habe, darin, dass ihre Discriminante, d. h. das Resultat der Elimination der x aus den vier Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0$$

gleich Null sei, und soll ein Punkt (x) ein doppelter sein, so müssen seine Coordinaten gleichzeitig diesen vier Gleichungen genügen.

Es gibt im Allgemeinen sechs Erzeugende des eben erwähnten Tangentialkegels, welche die Fläche vierpunktig berühren, d. h. sie in vier unendlich nahen Schnittpunkten treffen.

Ein konischer Punkt vermindert im Allgemeinen die Classe der Fläche um zwei Einheiten und wird deshalb mit C_2 bezeichnet. Von biplanaren und uniplanaren Punkten gibt es verschiedene Arten; zu ihrer Bezeichnung dienen die Symbole B_i oder U_j, je nachdem sie die Classe der Fläche um i oder j Einheiten erniedrigen.

Diese singulären Punkte wurden *für die cubischen Flächen* von Schläfli, *Phil. Trans.*, 1863; Cayley, ib., 1869; Rodenberg, *Math. Ann.*, 14, p. 46 studirt. Siehe weiter unten Kap. 11, § 1. Ausschliesslich der Theorie der biplanaren und uniplanaren Punkte für eine beliebige Fläche ist die Arbeit von Rohn, *Math. Ann.*, 22, p. 124 gewidmet.

Ein Punkt einer Fläche, welcher derart ist, dass jede durch ihn gehende Gerade die Fläche daselbst in r zusammenfallenden Punkten trifft, heisst ein r-facher Punkt der Fläche. Auch hier, wie in dem vorigen Fall, *lässt sich ein Kegel r^{ter} Ordnung construiren, von welchem jede Erzeugende in diesem Punkt $r+1$ Punkte mit der Fläche gemeinschaftlich hat (Osculationskegel); auf diesem Kegel gibt es dann im Allgemeinen $r(r+1)$ Erzeugende, welche $r+2$ Punkte mit der Fläche gemeinsam haben.*

Eine Fläche n^{ter} Ordnung mit einem n-fachen Punkt O ist nothwendiger Weise ein Kegel mit der Spitze in O.

Eine Fläche kann *mehrfache oder singuläre Linien* haben, d. h. Linien, deren sämmtliche Punkte mehrfach sind. Durch eine r-fache Linie gehen r Schalen der Fläche.

Die Punkte einer r-fachen Linie sind r-fache Punkte, für welche der oben besprochene Tangentenkegel in r Ebenen zerfällt.

Für $r=2$ erhält man, wenn die beiden Tangentenebenen zusammenfallen, die *Cuspidalcurve* der Fläche, deren Punkte sämmtlich uniplanar sind.

Wie für die ebenen Curven, so lässt sich auch für die Flächen eine Zahl definiren, die *Geschlecht* heisst, und im Allgemeinen, wenn die Fläche keine anderen singulären Linien von höherer Ordnung hat, von der Anzahl ihrer Doppellinien und

Cuspidallinien abhängt; dabei besitzt die Fläche jedoch statt *eines einzigen* Geschlechts mehrere Geschlechter.

Eine so beschaffene Zahl wurde von Clebsch, *Compt. Rend.*, 67, 1868 eingeführt und wird für die Flächen n^{ter} Ordnung als die Anzahl der Coefficienten definirt, welche in der Gleichung einer Fläche $(n - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch die Doppel- und Cuspidallinien der gegebenen Fläche geht, noch unbestimmt bleiben. Diese Zahl heisst *geometrisches* oder *erstes Geschlecht* und wird mit p_g bezeichnet.

Hat die Fläche keine Doppel- und Cuspidallinien, so ist ihr geometrisches Geschlecht:

$$p_g = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}.$$

Die Zahl p_g bleibt bei jeder birationalen Transformation unverändert. Der Satz wurde von Clebsch, *Compt. Rend.*, 1868 mitgetheilt und von Noether, *Math. Ann.*, 2 und Zeuthen, ib., 4 bewiesen. Neben diesem Geschlecht untersuchte Noether, ib., 8 zwei andere Zahlen von analoger Eigenschaft.

Wenn die Fläche eine Doppelcurve von der Ordnung d $(\geqq 0)$ und dem Geschlecht π hat und eine gewisse endliche Zahl t $(\geqq 0)$ von Punkten besitzt, welche für die Fläche und die Curve dreifach sind, so heisst die Zahl

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)d + 2t + \pi - 1$$

numerisches Geschlecht. Cayley, *Math. Ann.*, 3. *Es ist immer* $p_g \geqq p_n$. Wenn $p_g = p_n$ ist, so pflegt man die Fläche *regulär* zu nennen.

Für rationale (auf eine Ebene eindeutig abbildbare) Flächen (vergl. § 7) *ist* $p_n = p_g = 0$.

Zum *Geschlecht* der Regelflächen wird das Geschlecht p ihrer ebenen Schnitte genommen, *da diese offenbar sämmtlich dasselbe Geschlecht haben. Für die Regelflächen ist*

$$p_g = 0, \; p_n = -p.$$

Ueber *einen anderen Charakter der Flächen* siehe Segre, *Atti Torino,* 1896 und über weitere Untersuchungen bez. der verschiedenen Geschlechter der Flächen Castelnuovo-Enriques, *Math. Ann.*, 48, sowie das ausgezeichnete Buch von Picard und Simart, *Théorie des fonctions algebriques de deux variables indépendantes,* Paris 1897.

Die allgemeine Fläche von der Ordnung $n > 3$ besitzt keine Gerade.

Wenn eine Fläche n^{ter} Ordnung eine $(n-2)$-fache Curve enthält, so besitzt sie Gerade, ist die vielfache Curve eine Gerade, so enthält die Fläche ausser ihr noch $2(3n-4)$ andere Gerade.

Ueber eine solche Fläche siehe Noether, *Math. Ann.* 3, p. 175.

Eine Fläche n^{ter} Ordnung kann nicht mehr als $n(11n-24)$ Gerade haben.

Durch eine Gerade einer Fläche n^{ter} Ordnung gehen immer $(n+2)(n-2)^2$ Ebenen, welche die Fläche noch in einem anderen Punkt ausserhalb der Geraden berühren.

Wenn n die Ordnung einer Regelfläche ist, so liegt die Ordnung ihrer Doppelcurve (vergl. § 1) *zwischen $(n-2)$ und $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.* Cayley.

Untersuchungen über die Relationen, welche zwischen den charakteristischen Zahlen und den Singularitäten der Flächen bestehen, wurden von Salmon, Cayley, Zeuthen angestellt; siehe Salmon-Fiedler, *Geom. d. Raum.*, 2, p. 671.

Wenn ein Punkt einer Raumcurve derart ist, dass jede durch ihn gehende Ebene die Curve daselbst in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, so heisst er ein *Doppelpunkt* der Curve. *Es existiren im Allgemeinen in dem Doppelpunkt zwei Tangenten und zwei Osculationsebenen an die Curve.* Fallen die beiden Tangenten zusammen, so erhält man *eine Spitze* oder *einen stationären Punkt* der Curve. *In einem stationären Punkt fallen auch die beiden Osculationsebenen der Curve zusammen.*

Wenn zwei Flächen sich in einem Punkt P berühren (eine gemeinschaftliche Berührungsebene in P besitzen), so hat ihre Schnittcurve in P einen Doppelpunkt.

Ist dieser Punkt speciell eine Spitze, so sagt man, *die beiden Flächen haben in P eine stationäre Berührung.*

Wenn die Schnittcurve der beiden Flächen in P einen dreifachen Punkt hat, so sagt man, *sie osculiren sich in P. Alsdann schneidet jede Ebene durch P die beiden Flächen in Linien, die einander osculiren.*

Ist ein zwei Flächen gemeinschaftlicher Punkt für die eine ein r_1-facher und für die andere ein r_2-facher, so ist er für die Schnittcurve ein vielfacher von der Ordnung $r_1 r_2$; ist $r_1 = r_2 = r$ und haben die beiden Flächen in diesem Punkt denselben Oscu-

lationskegel, so ist der Punkt für den Schnitt ein $r(r+1)$-*facher.*

Wenn zwei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2 *längs einer Curve* n^{ter} *Ordnung eine Berührung* $(k-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung haben, so schneiden sie sich in einer zweiten Curve von der Ordnung* $n_1 n_2 - kn$.

Die grösste Anzahl von Punkten, in welchen zwei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2 *sich berühren können, beträgt, wenn der Schnitt der beiden Flächen nicht degenerirt,*

$$\tfrac{1}{2}n_1 n_2(n_1 + n_2 - 4) + 1.$$

Wenn der Schnitt der beiden Flächen dagegen degenerirt, so kann die Anzahl der Berührungspunkte grösser sein, so können z. B. zwei Flächen 2^{ter} *Ordnung 4 Berührungspunkte haben.*

Für die gewundenen Curven und die entsprechenden Osculationsdeveloppabelen sind die folgenden Formeln, die sogenannten Cayley'schen, *Journ. de Liouville,* 10, 1845 = *Coll. Math. Pap.*, 1, p. 207, von Bedeutung, welche die verschiedenen charakteristischen Zahlen der Curve miteinander verbinden und den Plücker'schen Formeln analog sind (siehe Kap. 5, § 1), mit deren Hülfe sie sich zum Theil ermitteln lassen.

(Man vergleiche in § 1 die Definitionen in Bezug auf das aus der Raumcurve, der Osculationsdeveloppabelen, der Knotencurve und der Bitangentialdeveloppabelen bestehende System.)

Es sei:

n die Ordnung der Raumcurve,

r die Classe der Raumcurve oder ihr Rang,

h die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte der Curve d. h. die Anzahl der Geraden, welche man von einem beliebigen Punkt aus so ziehen kann, dass sie die Curve zweimal treffen,

y die Zahl der Ebenen, die durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen, und die Curve in zwei verschiedenen Punkten berühren (Bitangentialebenen), d. h. die Classe der Bitangentialdeveloppabelen,

β die Anzahl der Spitzen (stationären Punkte),

H die Anzahl der Doppelpunkte,

v die Anzahl der Inflexionstangenten (stationären oder Wendetangenten) der Curve (Tangenten, welche mit der Curve drei unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich haben).

Es sei ferner:

m die Classe der Osculationsdeveloppabelen an die Curve,

r ihre Ordnung oder ihr Rang,

g die Anzahl der Geraden einer durchaus beliebigen Ebene, welche so beschaffen sind, dass durch jede von ihnen zwei Berührungsebenen an die Developpabele gehen, oder die Classe der Congruenz der Schnittgeraden der Osculationsebenen der Curve, siehe Kap. 14,

x die Anzahl der in einer beliebigen Ebene gelegenen Punkte, durch deren jeden zwei verschiedene Erzeugende der Developpabelen gehen, oder die Ordnung der Knotencurve,

α die Anzahl der stationären Ebenen (Ebenen, welche die Developpabele längs zweier unendlich naher Erzeugenden berühren, oder Ebenen, welche mit der Curve vier unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich haben),

G die Anzahl der Doppeltangentialebenen (in zwei Punkten berührenden Ebenen) an die Developpabele,

v die Anzahl der Erzeugenden, durch deren jede drei consecutive Tangentenebenen gehen (Inflexionserzeugende),

ω die Anzahl der Doppelerzeugenden der Developpabelen.

Es gelten dann die folgenden (Cayley'schen) Relationen:

$$\begin{aligned}
m &= r(r-1) - 2(x+\omega) - 3(n+v),\\
n &= r(r-1) - 2(y+\omega) - 3(m+v),\\
r &= m(m-1) - 2(g+G) - 3\alpha =\\
&= n(n-1) - 2(h+H) - 3\beta,\\
\alpha &= 3r(r-2) - 6(x+\omega) - 8(n+v),\\
\beta &= 3r(r-2) - 6(y+\omega) - 8(m+v),\\
n+v &= 3m(m-2) - 6(g+G) - 8\alpha,\\
m+v &= 3n(n-2) - 6(h+H) - 8\beta,
\end{aligned}$$

welchen *sechs* unabhängige Beziehungen entsprechen.

Geschlecht einer Raumcurve oder ihrer Osculationsdeveloppabelen heisst die durch die folgenden Formeln definirte Zahl:

$$\begin{aligned}
p &= \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - (h+H+\beta),\\
&= \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2) - (y+\omega+m+v),\\
&= \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - (g+G+\alpha),\\
&= \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2) - (x+\omega+n+v).
\end{aligned}$$

Führt man jetzt noch die Charakteristiken ein:

k die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte der Knotencurve,

λ die Anzahl der berührenden Geraden, welche die gegebene Curve noch anderswo schneiden,

τ die Anzahl der dreifachen Punkte der Knotencurve oder der dreifachen Punkte der Developpabelen oder die Anzahl der Punkte, in denen sich drei (nicht unendlich nahe) Tangenten an die gegebene Curve schneiden,

λ' die Anzahl der Osculationsebenen, welche die gegebene Curve noch anderswo berühren,

τ' die Anzahl der dreifachen Tangentialebenen der gegebenen Curve,

R der Rang oder die Classe der Knotencurve,

p' das Geschlecht derselben,

so ergeben sich ferner die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\lambda &= n(r+4) - 6(r+\beta) - 4(\omega + H) - 2v,\\
\tau &= \tfrac{1}{3}[(x - m - 3n - 3v - 2\omega)(r-2) + 8m + 20v +\\
&\qquad + 10\beta + 18\omega],\\
\lambda' &= m(r+4) - 6(r+\alpha) - 4(\omega + G) - 2v,\\
\tau' &= \tfrac{1}{3}[(y - n - 3m - 3v - 2\omega)(r-2) + 8n + 20v +\\
&\qquad + 10\alpha + 18\omega],\\
R &= rm + 6r - 3n - 9m - 3v - 2G,\\
k &= \tfrac{1}{8}[r^4 - 6r^3 + 11r^2 + 66r -\\
&\quad - 2r(r-5)(m+3n+3v+2\omega) + (m+3n+3v+2\omega)^2 -\\
&\quad - 58m - 126n - 126v - 76\omega - 24H],\\
p - p'(r-14) &= \tfrac{1}{2}(r-5)(r-6) - (\omega + G + H).
\end{aligned}$$

Diese Formeln wurden untersucht von: Salmon, *Trans. R. Irish Acad.*, 23, 1857; Cayley, *Quart. Journ.*, 11 = *Coll. Math. Pap.*, 8, p. 72; Cremona, *Deutsche Uebers. der Preliminari*, Kap. 2 und Thl. 2, Kap. 4; Zeuthen, *Ann. di mat.*, 3. Sie werden auch von Salmon-Fiedler, *Geom. d. Raum.*, 2, p. 660 u. ff., 3[te] Aufl. angegeben.

Da die verschiedenen Autoren sich verschiedener Symbole zur Bezeichnung der Charakteristiken bedienen, so wollen wir zur Bequemlichkeit des Lesers nachstehend eine Tabelle dieser zur Anwendung gekommenen Bezeichnungen zusammenstellen.

Bezeichnungen				Bezeichnungen			
Cayley's	Cremona's	Salmon's	die unsrigen	Cayley's	Cremona's	Salmon's	die unsrigen
m	ν	m	n	x	ξ	x	x
n	μ	n	m	y	η	y	y
r	ϱ	r	r	ω	ω	d	ω
α	α	α	α	k	$\varkappa$	k	k
β	β	β	β	γ	λ	γ	λ
v	θ	θ	v	γ'	λ_1	γ'	λ'
g	γ	g	g	t	τ	t	τ
h	ȣ	h	h	t'	τ_1	t'	τ'
Δ	γ	G	G	D_x		p^*	p'
H	ȣ$'$	D	H	q		R	R

Der Raumcurve von der Ordnung $n_1 n_2$, welche der vollständige Schnitt von zwei Flächen n_1^{ter} und n_2^{ter} Ordnung ist, die sich in δ Punkten einfach berühren und χ stationäre Berührungen haben, entsprechen die folgenden Charakteristiken:

$$
\begin{aligned}
p &= \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) - (\delta + \chi - 1), \\
m &= 3 n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) - 6\delta - 8\chi, \\
r &= n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2\delta - 3\chi, \\
h &= \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1), \\
g &= \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3)\,[9 n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3) - \\
&\quad - 6(6\delta + 8\chi) - 22] + \tfrac{5}{2} n_1 n_2 + 2(3\delta + 4\chi)^2 + 22\delta + 28\chi^{*)}, \\
y &= \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)\,[n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - \\
&\quad - 2(2\delta + 3\chi) - 10] + 4 n_1 n_2 + \tfrac{1}{2}(2\delta + 3\chi)^2 + 10\delta + \tfrac{27}{2}\chi, \\
x &= \tfrac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)\,[n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - \\
&\quad - 2(2\delta + 3\chi) - 4] + \tfrac{1}{2}(2\delta + 3\chi)^2 + 4\delta + \tfrac{11}{2}\chi.
\end{aligned}
$$

*) Diese Formel ist in dem Cremona'schen Werk fehlerhaft angegeben, und der Fehler wird von allen späteren Autoren wiederholt. Herr Prof. Pittarelli an der Universität zu Rom war so liebenswürdig, die Berichtigung Herrn Prof. Pascal mitzutheilen.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2n_1 n_2(3n_1 + 3n_2 - 10) - 3(4\delta + 5\chi),\\
\beta &= \chi,\\
H &= \delta,\\
G &= 0,\\
v &= 0,\\
\omega &= 0.
\end{aligned}$$

Wenn sich zwei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2 in zwei (Ergänzungs-) Curven von den Ordnungen n, n' und den Classen r, r' schneiden, welche bez. h, δ; h', δ' scheinbare und wirkliche Doppelpunkte und χ, χ' Spitzen haben, und wenn k die Anzahl ihrer scheinbaren Schnitte, d. h. die Anzahl der Geraden, welche von einem Punkt des Raums so gezogen werden können, dass sie beide Curven schneiden, und i die Anzahl der wirklichen Schnitte bezeichnen, so bestehen die Relationen:

$$\begin{aligned}
&h + h' + k = \tfrac{1}{2}(n + n')(n_1 - 1)(n_2 - 1),\\
&r - r' = (n - n')(n_1 n_2 - 1) - 2(h - h') - 2(\delta - \delta') - 3(\chi - \chi'),\\
&(n_1 + n_2 - 2)n = r + i + 2\delta + 3\chi,\\
&(n_1 + n_2 - 2)n' = r' + i + 2\delta' + 3\chi',
\end{aligned}$$

woraus auch folgt:

$$\begin{aligned}
n(n_1 - 1)(n_2 - 1) &= 2h + k,\\
n'(n_1 - 1)(n_2 - 1) &= 2h' + k.
\end{aligned}$$

Für eine auf einem Hyperboloid beschriebene Raumcurve, welche in α_1 bez. α_2 Punkten jede Erzeugende des 1^{ten} bez. 2^{ten} System des Hyperboloids trifft, δ Doppelpunkte und χ Spitzen besitzt, gelten die folgenden charakteristischen Zahlen:

$$\begin{aligned}
r &= 2\alpha_1\alpha_2 - 2\delta - 3\chi,\\
m &= 6\alpha_1\alpha_2 - 3(\alpha_1 + \alpha_2) - 6\delta - 8\chi,\\
y &= \tfrac{1}{2}[2(\alpha_1\alpha_2 - \delta) - 3\chi]^2 - 10(\alpha_1\alpha_2 - \delta - \chi) + 4(\alpha_1 + \alpha_2) - \tfrac{7}{2}\chi,\\
h &= \tfrac{1}{2}[\alpha_1(\alpha_1 - 1) + \alpha_2(\alpha_2 - 1)],\\
y &= \tfrac{1}{2}[6(\alpha_1\alpha_2 - \delta) - 3(\alpha_1 + \alpha_2) - 8\chi]^2 - 22\alpha_1\alpha_2 +\\
&\quad + \tfrac{27}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + 2(11\delta + 14\chi),\\
x &= \tfrac{1}{2}[2(\alpha_1\alpha_2 - \delta) - 3\chi]^2 - 4(\alpha_1\alpha_2 - \delta) + \tfrac{11}{2}\chi,\\
\alpha &= 4[3\alpha_1\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)] - 3(4\delta - 5\chi).
\end{aligned}$$

Wenn speciell die Raumcurve der vollständige Schnitt des Hyperboloids mit einer allgemeinen Fläche μ^{ter} Ordnung ist, so genügt es, in diesen Formeln $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$ zu setzen, um aus ihnen die charakteristischen Zahlen für diesen neuen Fall zu erhalten.

Eine auf einem Hyperboloid beschriebene Raumcurve, welche jede Erzeugende des 1^{ten} und 2^{ten} Systems in α_1 bez. α_2 Punkten trifft, kann nicht mehr als

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1$$

Doppelpunkte und Spitzen haben. Setzt man $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu$, so ergibt sich der entsprechende Satz für den Fall, in welchem die Curve der vollständige Schnitt des Hyperboloids mit einer Fläche μ^{ter} Ordnung ist.

Die vorstehenden Theoreme lassen sich mit Hülfe der Abbildung des Hyperboloids auf eine Ebene ableiten. Siehe § 7.

Es seien n und p die Ordnung und das Geschlecht (siehe oben) einer algebraischen Regelfläche; ν und π die Ordnung und das Geschlecht einer auf der Regelfläche aufgezeichneten algebraischen Curve, welche für die Fläche einfach sei; k die Anzahl der Schnittpunkte der Curve mit jeder Erzeugenden der Regelfläche und δ die Anzahl ihrer Doppelpunkte; es gilt alsdann die bemerkenswerthe Relation:

$$(k-1)\,\nu - \pi - \delta = \frac{k(k-1)}{2}\,n - k(p-1) - 1.$$

Für den Fall, in welchem die Regelfläche ein Kegel ist, wurde die Formel von Sturm, *Math. Ann.*, 19, p. 487 gefunden; den allgemeinen Fall findet man bei Segre, *Lincei*, 1887; *Math. Ann.*, 34 behandelt.

Mit den Formeln dieses Paragraphen stehen diejenigen für die Geraden in Zusammenhang, die eine Raumcurve in mehr als zwei Punkten treffen (*die vielfachen Secanten*), oder die zwei oder mehr Raumcurven schneiden.

Die dreifachen Secanten einer Raumcurve n^{ter} Ordnung mit h scheinbaren Doppelpunkten bilden eine Regelfläche von der Ordnung

$$(n-2)\left(h - \frac{n(n-1)}{6}\right).$$

Diese Fundamentalformel findet sich zum ersten Mal bei Zeuthen, *Ann. di mat.*, (2), 3, 1870; dann bei Picquet, *Bull. de la Soc. math.*, 1, 1872, p. 268; Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879, § 43; Geiser, *Collect. math. in memoriam Chelini*, Mediolani 1881 und bei Berzolari, *Rend. Palermo*, 9, 1895.

Die Anzahl der vierfachen Secanten einer Raumcurve n^{ter} Ordnung mit h scheinbaren Doppelpunkten beträgt

$$\tfrac{1}{2}h(h - 4n + 11) - \tfrac{1}{24}n(n - 2)(n - 3)(n - 13).$$

Auch diese Formel kommt zuerst bei Zeuthen vor, l. c., dann bei Picquet, l. c. und *Compt. Rend.*, 77, 1873.

Die Anzahl der Geraden, welche eine Curve n^{ter} Ordnung mit h scheinbaren Doppelpunkten dreimal schneiden und eine zweite Curve n'^{ter} Ordnung treffen, welche mit der ersten i Punkte gemeinschaftlich hat, ist:

$$n'(n - 2)[h - \tfrac{1}{6}n(n - 1)] - i(h - n + 2).$$

Von solchen Geraden, welche eine Curve n^{ter} Ordnung mit h scheinbaren Doppelpunkten in zwei Punkten und eine zweite Curve, welcher die Charakteristiken n′ und h′ zugehören, und die mit der ersten i Punkte gemeinschaftlich hat, ebenfalls in zwei Punkten treffen, sind

$$hh' + \tfrac{1}{4}nn'(n - 1)(n' - 1) - i(n - 1)(n' - 1) + \tfrac{1}{2}i(i - 1)$$

vorhanden.

Die Anzahl von Geraden, welche eine Curve (n, h) in zwei Punkten und jede von zwei anderen Curven n'^{ter} bez. n''^{ter} Ordnung, welche mit der ersten i′ bez. i″ und unter sich j Punkte gemeinschaftlich haben, in einem Punkt treffen, beträgt:

$$n'n''[h + \tfrac{1}{2}n(n - 1)] - (n - 1)(i'n'' + i''n') - hj + i'i''.$$

Die Anzahl der Geraden, die vier Curven treffen, welche von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 und derart sind, dass diejenigen n_r^{ter} und n_s^{ter} Ordnung i_{rs} Punkte gemeinschaftlich haben, beträgt

$$2n_1n_2n_3n_4 - \sum_1^4 n_pn_qi_{rs} + \sum_1^4 i_{pq}i_{rs},$$

worin jeder der Indices p, q, r, s einen anderen Werth als die übrigen hat.

Bei diesen Formeln wird vorausgesetzt, dass alle den Curven gemeinschaftlichen Punkte von einander verschieden sind. Man findet die Formeln bei Picquet, l. c. Ueber Correcturen einiger von diesem Autor gefundenen Resultate siehe Guccia, *Rend. Palermo,* 1.

Mit den mehrfach schneidenden *Räumen* einer algebraischen Curve beschäftigt sich eine neuere Arbeit von Tanturini, *Ann. di mat.,* (3), 4, 1900.

§ 5. Polarflächen. Covariante Flächen.

Wir wollen hier nicht die Definitionen und Sätze wiederholen, die der Polaritätstheorie zu Grunde liegen, da sie den in Kap. 5, § 2 für ebene Curven gegebenen analog sind. Wir führen nur dasjenige an, was sich bei den Flächen Neues bietet.

Die erste Polare eines beliebigen Punkts O bezüglich einer Fläche schneidet diese in einer Curve, welche die Berührungscurve des umschriebenen Kegels, dessen Spitze in O liegt, mit der Fläche ist.

Wenn der Pol auf der Fundamentalfläche liegt, so haben diese und alle ihre Polarflächen daselbst die nämliche Berührungsebene und die nämlichen Osculationsgeraden.

Die Polarfläche 2^{ter} Ordnung [die $(n-2)^{\text{te}}$ Polarfläche] eines parabolischen Punkts der Fläche ist ein Berührungskegel an die betreffende stationäre Tangentenebene, und die Berührungserzeugende ist die Gerade, welche in diesem Punkt die Fundamentalfläche osculirt.

Ein parabolischer Punkt der gegebenen Fläche ist auch parabolisch für alle ihm zugehörigen Polarflächen.

Die $(n-r)^{\text{te}}$ Polare eines r-fachen Punkts der Fundamentalfläche ist ein Kegel r^{ter} Ordnung, dessen Spitze in diesem Punkt liegt, und die folgenden Polaren sind unbestimmt. Dieser Kegel r^{ter} Ordnung ist der Ort der Geraden, die in diesem Punkt $r+1$ Punkte mit der Fläche gemeinschaftlich haben, und seine Schnitte mit der $(n-r-1)^{\text{ten}}$ Polarfläche sind die $r(r+1)$ Geraden, welche $r+2$ unendlich nahe Punkte mit der Fläche gemeinschaftlich haben.

Der Ort der Punkte, deren Polarebenen durch eine Gerade gehen, ist eine Raumcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese Curve wird *die Polarcurve der gegebenen Geraden* genannt.

Die Enveloppe der Polarebenen der Punkte einer Geraden ist eine abwickelbare Fläche $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe und $2(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche *die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare der Geraden* heisst.

Die Knotenlinie dieser Developpabelen ist eine Curve $2(n-3)(n-4)^{\text{ter}}$ *Ordnung, welche der Ort der Pole ist, deren erste Polarflächen die Gerade in zwei verschiedenen Punkten berühren.*

Die Enveloppe der Polarebenen der Punkte einer Curve m^{ter} *Ordnung ist eine Developpabele* $m(n-1)^{\text{ter}}$ *Classe, welche auch der Ort der Punkte ist, deren erste Polarflächen die Curve berühren.*

Analog lassen sich viele andere ähnliche Sätze über die Enveloppen der Polarebenen der Punkte einer Fläche, die Orte der Pole der Tangentenebenen an eine Fläche, etc. aufstellen.

Der Ort der Doppelpunkte der ersten Polaren einer Fläche F_n ist eine neue Fläche und wird *die Hesse'sche Fläche* der gegebenen oder *die Jacobi'sche des Systems der ersten Polaren* genannt.

Der Ort der Punkte, deren erste Polaren Doppelpunkte haben, ist die sogenannte *Steiner'sche Fläche* der gegebenen.

Die Gleichungen dieser Flächen ergeben sich aus Formeln, die denjenigen für die gleichnamigen Curven in Kap. 5, § 2 entsprechen.

Andere Definitionen dieser Flächen sind:

Die Hesse'sche Fläche von F_n *ist der Ort eines Punkts, dessen Polarebenen bez. der ersten Polaren von* F_n *durch den nämlichen Punkt gehen,* oder:

der Ort der Berührungspunkte der ersten Polaren von F_n, oder:

der Ort eines Punkts, dessen Polarfläche 2^{ten} *Grads bez.* F_n *ein Kegel ist.*

Die Steiner'sche Fläche von F_n *ist der Ort der Spitze eines eine Polarfläche* 2^{ter} *Ordnung bildenden Kegels* 2^{ten} *Grads,* oder:

die Enveloppe der Polarebenen der Punkte der Hesse'schen Fläche.

Die Hesse'sche Fläche ist von der Ordnung $4(n-2)$ *und hat im Allgemeinen* $10(n-2)^3$ *Doppelpunkte.*

Die Steiner'sche ist von der

$$4(n-1)^2(n-2)^{\text{ten}} \textit{ Klasse}$$

und besitzt $10(n-2)^3$ *Gerade, von denen jede einem Doppelpunkt der Hesse'schen entspricht; d. h. also:*

die Polarfläche 2^{ten} Grads eines Doppelpunkts der Hesse'schen Fläche besteht aus einem Paar von Ebenen, die durch die entsprechende Gerade der Steiner'schen Fläche gehen: und die Polarebene eines Doppelpunkts der Hesse'schen Fläche berührt die Steiner'sche längs der entsprechenden Geraden.

Die Curve der parabolischen Punkte einer gegebenen Fläche ist der vollständige Schnitt der Fläche mit ihrer Hesse'schen Fläche; die Curve ist daher von der Ordnung $4n(n-2)$.

Wenn die gegebene Fläche eine einfache Gerade besitzt, so berührt diese letztere die Hesse'sche Fläche und mithin die parabolische Curve in $2(n-2)$ Punkten.

§ 6. Lineare Flächensysteme.

Wenn $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0, \cdots$ in symbolischer Bezeichnung die Gleichungen in *Punktcoordinaten* x von $k+1$ Flächen n^{ter} Ordnung sind, so bildet das durch

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \cdots = 0$$

dargestellte System, worin $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ willkürliche $k+1$ Parameter sind, ein sogenanntes *lineares System k^{ter} Stufe.*

Wenn $k = 1$ ist, so erhält man das *Büschel*, für $k = 2$ das *Netz* oder *Bündel*. Werden die Flächen in *Ebenencoordinaten* ausgedrückt, so heisst ihr lineares System (∞^1) *Schar.*

Alle Flächen eines Büschels haben eine Curve von der Ordnung n^2 (die Basiscurve des Büschels) und alle Flächen eines Netzes haben n^3 Basispunkte gemeinschaftlich.

Ist $k = N(n) = \binom{n+3}{3} - 1$, siehe § 1, so besteht das System aus allen Flächen n^{ter} Ordnung des Raums.

Wenn eine Fläche n^{ter} Ordnung gegeben ist, so bilden die ersten Polaren der Punkte einer Ebene ein Netz und die ersten Polaren der Punkte des Raums ein lineares System 3^{ter} Stufe.

Ein lineares System k^{ter} Stufe ist durch $k+1$ Flächen derselben Ordnung bestimmt, die nicht dem nämlichen linearen System niedrigerer Stufe angehören.

Unter den Flächen eines linearen Systems k^{ter} Stufe gibt es $(k+1)(n-k)$, welche eine Berührung k^{ter} Ordnung mit einer gegebenen Geraden haben, und

$$2^k \frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!},$$

von welchen jede eine gegebene Gerade k-mal berührt.

Von den Flächen eines Büschels berühren

$$2(n-1)$$

eine gegebene Gerade und $3(n-1)^2$ *eine gegebene Ebene.*

Unter den Flächen eines Netzes gibt es $3(n-2)$, *welche eine gegebene Gerade osculiren,*

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11),$$

welche eine doppelte Berührung mit einer gegebenen Ebene, und $12(n-1)(n-2)$, *welche eine stationäre Berührung mit einer gegebenen Ebene haben.*

Der Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf alle Flächen eines Büschels ist eine Raumcurve von der Ordnung $3(n-1)^2$.

In einem Flächenbüschel gibt es $4(n-1)^3$ *Flächen mit einem Doppelpunkt; jeder dieser Doppelpunkte hat die nämliche Polarebene in Bezug auf alle Flächen des Büschels.*

Der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf alle Flächen eines Netzes ist eine Fläche $3(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Der Ort der Punkte, in welchen sich eine Ebene und die Flächen eines Netzes berühren, ist eine Curve von der Ordnung

$$3(n-1).$$

Der Ort der Doppelpunkte der Flächen eines Netzes ist eine Raumcurve von der Ordnung $6(n-1)^2$, *welche zugleich der Ort der Punkte ist, in denen sich die Flächen dieses Netzes berühren; er ist auch der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen in Bezug auf die Flächen des Netzes durch dieselbe Gerade gehen.* Diese Curve führt den Namen *Jacobi'sche Curve des Netzes.*

Der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen bezügl. der Flächen eines linearen Systems 3^{ter} *Stufe sämmtlich durch einen Punkt gehen, ist eine Fläche* $4(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung und heisst Hesse'sche oder Jacobi'sche Fläche des Systems; sie ist auch der Ort der Doppelpunkte der Flächen des Systems oder der Ort der Berührungspunkte dieser Flächen.*

Wenn das lineare System aus den ersten Polaren einer gegebenen Fläche besteht, so erhält man die Hesse'sche oder Jacobi'sche Fläche der Fläche, siehe *§ 5.*

Eine analoge Fläche kann man auch in dem Fall definiren, in welchem vier Flächen vorliegen, die aber nicht von derselben Ordnung sind, d. h. kein lineares System bilden:

Der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen in Bezug auf vier gegebene Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 durch den nämlichen Punkt gehen, ist eine Fläche von der Ordnung

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4$$

und heisst *die Hesse'sche oder Jacobi'sche Fläche* der vier Flächen.

Man kann dann auch hier lineare Systeme k^{ter} Stufe von Flächen betrachten, *die in projectiver Zuordnung zu einander stehen oder projectiv sind,* und die Orte untersuchen, welche durch die Schnitte der entsprechenden Flächen erzeugt werden.

Ueber die vielen Theoreme, die sich auf diesen Gegenstand beziehen, verweisen wir speciell auf die oben citirte *Introduzione* von Cremona.

§ 7. Birationale Transformation des Raums oder der Flächen. Abbildung der Flächen auf eine Ebene.

Wie man sich in der Ebene die eindeutige umkehrbare Transformation zwischen zwei Ebenen (die Cremona'sche) oder eine solche *nur* zwischen zwei Curven der beiden Ebenen, ohne dass sie zwischen den beiden Ebenen besteht, vorstellen kann, so lassen sich auch im Raum ein-eindeutige Transformationen zwischen zwei Räumen oder *nur* zwischen zwei Flächen der beiden Räume denken. Dieses letztere Problem ist das der sogenannten Abbildung einer Fläche auf eine andere und ein specieller Fall desselben ist *die Abbildung* der Flächen *auf eine Ebene.*

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten der Punkte eines Raums und y_1, y_2, y_3, y_4 diejenigen in einem anderen Raum und man habe die Relationen

$$y_i \equiv f_i(x_1, x_2, x_3, x_4),\ (i = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

worin die f rationale ganze homogene Funktionen n^{ten} Grads sind; diese Relationen seien derart, dass man aus ihnen die x mittelst der y ableiten kann:

$$x_i \equiv \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4), \tag{2}$$

worin auch die φ rationale, ganze, homogene Funktionen aber vom m^{ten} Grad sind. Eine solche Transformation heisst *ein-eindeutig, birational oder eine Cremona'sche; bei ihr entspricht einem Punkt eines jeden der beiden Räume ein und nur ein Punkt des anderen Raums.*

Ist der Punkt (x) gegeben, so ergibt sich der entsprechende Punkt (y) aus den Formeln (1); ist der Punkt (y) als Schnitt der drei Ebenen

$$\sum_1^4 \lambda_i y_i = 0, \quad \sum_1^4 \mu_i y_i = 0, \quad \sum_1^4 \nu_i y_i = 0$$

gegeben, so sind die entsprechenden Punkte x die Schnitte der drei Flächen

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i(x) = 0, \quad \sum_1^4 \mu_i f_i(x) = 0, \quad \sum_1^4 \nu_i f_i(x) = 0.$$

Damit die Transformation ein-eindeutig sei, ist es nöthig, dass diese drei Flächen einen einzigen variabelen Schnittpunkt haben, und dass alle anderen Schnittpunkte fest bleiben, wie man auch die Parameter λ, μ, ν variiren mag. Daraus folgt:

Bei der ein-eindeutigen Transformation müssen alle Flächen des linearen Systems 3^{ter} Stufe

$$\sum_1^4 \varrho_i f_i = 0$$

durch $n^3 - 1$ feste Punkte gehen.

Für die ein-eindeutige Transformation ist es nothwendig, dass die Flächen $f_i(x) = 0$ vom Geschlecht Null seien. Die Coordinaten ihrer Punkte lassen sich durch rationale Funktionen zweier Parameter ausdrücken. Für diese Flächen hat Cremona nach Sylvester den Namen *homaloidale* vorgeschlagen, während Cayley die Bezeichnung *unicursale* wählte.

Der variabele (d. h. nicht allen f gemeinschaftliche) Schnitt R zweier beliebiger der Flächen $f_i = 0$ ist eine rationale Curve (d. h. vom Geschlecht Null) m^{ter} Ordnung.

Auch das aus solchen Flächen f gebildete System wird *homaloidal* bez. *unicursal* genannt.

Man beachte, dass der für die ebenen birationalen Transformationen bestehende Satz, dass die Grade m und n gleich sein müssen, hier nicht mehr gilt.

Haupt- oder Fundamentalpunkte oder -Linien heissen die allen Flächen des homaloidalen Systems gemeinschaftlichen Punkte oder Linien.

Von den nm Schnitten einer Curve R (siehe oben) mit einer Fläche f, auf welcher die Curve nicht ganz liegt, befinden sich $nm - 1$ in den Fundamentalpunkten und -Curven der Transformation.

Jedem Punkt einer Fundamentalcurve, welche i-fach für alle Flächen des homaloidalen Systems ist, entspricht eine rationale

Curve i^{ter} Ordnung, deren geometrischer Ort eine Fläche ist, welche einen Theil der Jacobi'schen Fläche des linearen Systems der Flächen $\varphi_i = 0$ bildet.

Eine für die Flächen $f = 0$, i-fache Fundamentalcurve des Raums (x), welche von den Curven R geschnitten wird, ist $(4i - 1)$-fach für die Jacobi'sche Fläche der f. Wird sie dagegen von den Curven R nicht geschnitten, so ist sie $4i$-fach für diese Jacobi'sche Fläche der f.

Ein für die f, l-facher Fundamentalpunkt des Raums (x) ist $(4l - 2)$-fach für die Jacobi'sche Fläche der f.

Ueber die numerischen Relationen zwischen den Ordnungen der Vielfachheit der Fundamentalpunkte und -Curven, analog denjenigen, welche für die ebenen Transformationen bestehen und von uns in Kap. 5, § 5 angegeben wurden, verweisen wir auf Noether, *Ann. di mat.*, (2), 5, p. 175, 176.

Die Theorie der birationalen Transformation des Raums ist noch nicht so vollständig durchforscht worden, wie die der Ebene.

Die Hauptarbeiten sind von Cayley, *Proc. of the London Math. Soc.*, 3 = *Coll. math. papers*, 7, p. 189; Cremona, *Gött. Nachr.*, 1871; *Math. Ann.*, 4; *Rend. Ist. Lomb.*, 1871; *Ann. di mat.*. (2), 5; *Mem. Acc. Bologna*, 1871, 1872; Noether, *Math. Ann.*, 3. Neuer sind: Montesano, *Rend. Ist. Lomb.*, 1888, 92, 93; *Rend. Acc. Lincei*, 1888, 1889; *Rend. Acc. Napoli*, 1888, 1895; *Mem. Acc. Bologna*, 1893; *Atti Acc. Torino*, 1892; *Giorn. di Batt.*, 1893. Montesano studirte speciell die *involutorischen* Transformationen.

Ein besonderer Fall ist *die Transformation durch reciproke Radien vectoren oder Inversion* (vergl. Kap. 17, § 1), *welche die Eigenschaft besitzt, dass die Winkel erhalten bleiben.*

Soll die Transformation nicht *für den ganzen Raum*, sondern nur für zwei in den beiden Räumen enthaltene Flächen $F(x) = 0$ und $\Phi(y) = 0$ birational sein, so ist nicht erforderlich, dass die Flächen des linearen Systems

$$\sum_1^4{}' \varrho_i f_i(x) = 0$$

$n^3 - 1$ Punkte gemeinschaftlich haben; *es ist nur nöthig, dass alle Flächen dieses Systems, welche durch einen Punkt von $F = 0$ gehen, sich nicht gleichzeitig auf dieser Fläche schneiden.*

Es gilt auch hier das Theorem, welches als eine Erweiterung des Riemann'schen anzusehen ist, *dass nämlich das Geschlecht* *der beiden Flächen, die sich ein-eindeutig die eine in die andere transformiren lassen, das nämliche sein muss.* Siehe Clebsch, *Compt. Rend.*, 1868; *Math. Ann.*, 2; Cayley, *Math. Ann.*, 3; Noether, *Ann. di mat.*, (2), 5; *Math. Ann.*, 2, 8; Zeuthen, *Math. Ann.*, 4; Castelnuovo-Enriques, *Math. Ann.*, 48.

Wie bei den ebenen Curven, so hat man auch bei den Flächen, den Untersuchungen Noether's über die Zerlegung der singulären Punkte entsprechend, versucht, ob es nicht möglich sei, durch birationale Transformationen des Raums oder der Flächen eine Fläche mit höheren Singularitäten auf eine solche mit nur gewöhnlichen Singularitäten zurückzuführen. Mit diesem Problem haben sich in verschiedenem Sinn Noether, *Math. Ann.*, 29; *Berl. Sitzungsber.*, 1888; Del Pezzo, *Rend. Palermo*, 2, 3; Segre, *Ann. di mat.*, (2), 25; Pannelli, ib., 25; Levi, ib., 26; G. Kobb, *Journ. de Liouv.*, 1892 beschäftigt. Ueber das ähnliche die Raumcurven betreffende Problem sehe man Poincaré, *Compt. Rend.*, 108, 1888; Pannelli, *Rend. Ist. Lomb.*, 1893 nach.

Ein specieller Fall der birationalen Transformation der Flächen ist die sogenannte *Abbildung der Flächen* auf die Ebene. Wie oben bereits angegeben wurde, nennt Cremona *eine Fläche, die sich auf die Ebene abbilden lässt, ein Homaloid.*

Soll sich eine Fläche auf die Ebene abbilden lassen, so muss sie vom numerischen Geschlecht $p_n = 0$ sein. Ausführlicheres über diesen Satz findet man in Kap. 13, § 7.

Eine ausreichende Bedingung für die Möglichkeit der Abbildung einer Fläche auf eine Ebene besteht darin, dass sie eine einfach unendliche Schar rationaler Curven besitze, welche auf der Fläche von einem Büschel anderer Flächen geschnitten werden. Noether, *Gött. Nachr.*, 1870; *Math. Ann.*, 3. Ueber weitere Sätze siehe Kap. 13, § 7.

Es liege eine Fläche S von der Ordnung n vor, und die homogenen Coordinaten ihrer Punkte mögen sich durch die Formeln

$$x_i = f_i(y_1, y_2, y_3), \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ausdrücken lassen, worin die f rationale homogene Functionen m^{ter} Ordnung seien; wir wollen ferner annehmen, man könne die Verhältnisse zwischen den y umgekehrt mittelst dieser Formeln als rationale Funktionen der x darstellen. Man sagt alsdann, die Fläche S sei auf die Ebene abbildbar, weil bei der Interpretation der y als homogene Coordinaten der Punkte einer Ebene die vorstehenden Formeln eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Ebene und der Fläche S feststellen.

Wenn die Curven des ebenen linearen Systems

$$\sum_1^4 \lambda_i f_i(y) = 0$$

α_1 einfache Punkte, α_2 Doppelpunkte, α_3 dreifache Punkte, etc. gemeinschaftlich haben, *so besteht die Relation:*

$$n = m^2 - \alpha_1 - 4\alpha_2 - 9\alpha_3 - \cdots.$$

Nennt man p_1 das Geschlecht eines ebenen Schnitts der Fläche, d die Ordnung der Doppelcurve derselben Fläche, r die Ordnung der Cuspidalcurve, *so gilt die Beziehung:*

$$p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r =$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \alpha_2 - 3\alpha_3 - 6\alpha_4 - \cdots.$$

Ueberdies besteht die Ungleichheit:

$$4 \leqq \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \alpha_1 - 3\alpha_2 - 6\alpha_3 - \cdots.$$

Aus diesen Relationen folgt:

$$p_1 \leqq n - 2,$$
$$d + r \geqq \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Die Flächen 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung lassen sich offenbar immer auf die Ebene abbilden. Bei den Flächen 2^{ter} Ordnung braucht man nur von einem ihrer Punkte aus die Punkte auf die Ebene zu projiciren, und für die Flächen 3^{ter} Ordnung (siehe Kap. 11) genügt es, zwei ihrer Geraden zu betrachten, die sich nicht schneiden, und dann von einem beliebigen Punkt einer Ebene die Gerade zu ziehen, welche die beiden Geraden der Fläche trifft; sie wird die Fläche noch in einem anderen Punkt treffen, der ein-eindeutig dem Punkt der Ebene entspricht.

Um die ebene Abbildung einer Fläche 4^{ter} Ordnung mit Doppelkegelschnitt (siehe Kap. 12, § 6) geometrisch zu construiren, kann man, wie folgt, verfahren:

Wir betrachten von den 16 Geraden der Fläche eine solche g, welche den Doppelkegelschnitt schneidet. Durch einen Punkt P einer Ebene und durch g wird eine Ebene gelegt, welche den Kegelschnitt noch einmal in einem Punkt schneidet, welcher, mit P verbunden, eine Gerade liefert, die den Doppelkegelschnitt und g trifft und daher die Fläche in noch einem Punkt Q schneidet; *die Zuordnung zwischen P und Q ist eineindeutig.*

Falls die Fläche 4^{ter} Ordnung eine Doppelgerade hat (siehe Kap. 12, § 8), kann analog verfahren werden, wenn man beachtet, dass alsdann auf der Fläche Kegelschnitte existiren, welche die Doppelgerade schneiden.

Bei den Flächen 5^{ter} Ordnung mit zwei sich nicht schneidenden Doppelgeraden (siehe Kap. 13) lässt sich eine ähnliche geometrische Construction ausführen, wie bei den Flächen 3^{ter} Ordnung.

Besitzt die Fläche 5^{ter} Ordnung eine Doppelcurve 3^{ter} Ordnung, so kann man offenbar die Sehnen der Curve 3^{ter} Ordnung, welche die Fläche in einem weiteren Punkt schneiden, zu projicirenden Strahlen nehmen. Analog ist die Construction, wenn die Curve 3^{ter} Ordnung in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt, welche den Kegelschnitt in einem Punkt schneidet, oder in drei Gerade, von denen eine die beiden anderen trifft. Die Fälle, in denen die Curve 3^{ter} Ordnung eben wäre, oder in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfiele, welche den Kegelschnitt nicht trifft, oder auch in drei sich nicht schneidende Gerade, sind unmöglich.

Man beachte jedoch, dass bei allen diesen Abbildungen Ausnahmestellen auftreten, an denen die Abbildung aufhört, eindeutig umkehrbar zu sein.

Die Abbildung der Flächen auf die Ebene lässt sich zum Studium der auf diesen Flächen gezogenen Curven benutzen. Die ältesten Untersuchungen in dieser Hinsicht beziehen sich, wie man wohl sagen darf, auf die stereographische Projection und allgemein auf alle Projectionen, die man zur Herstellung der geographischen Karten erdacht hat.

Das Verebnen der Flächen 2^{ter} Ordnung wurde von Plücker, *Crelle,* 34, 1847; Chasles, *Compt. Rend.,* 1861; Cayley, *Phil. Mag.,* 22, 1861 durchgeführt, welche sich dessen zur Untersuchung der Curven auf einer Fläche 2^{ter} Ordnung bedienten. Siehe auch Clebsch-Lindemann, *Geom.,* 2 und weiter unten, Kap. 10, § 1.

Die ebene Abbildung der Flächen 3^{ter} Ordnung untersuchten Cremona, *Crelle,* 69 und Clebsch, *Crelle,* 65; die der Flächen 4^{ter} Ordnung mit Doppelkegelschnitt oder doppelter Geraden und die der Flächen 5^{ter} Ordnung mit Doppelcurve 3^{ter} Ordnung Clebsch, *Crelle,* 69; *Math. Ann.,* 1; Korndörfer, *Math. Ann.,* 1, 4; Frahm, ib., 7.

Ebene Abbildungen schliesslich der rationalen Regelflächen studirten Cremona, *Ann. di mat.,* 1; Armenante, *Ann. di mat.,* 4, 1870, Clebsch, *Math. Ann.,* 2, 5; Noether, ib., 2.

Für den Fall, in welchem die Fläche nicht speciell algebraisch, sondern beliebig ist, lässt sich das Problem des Verebnens der ganzen Fläche oder eines Theils derselben nach den Methoden der Differentialgeometrie behandeln. Siehe weiter unten, Kap. 16.

Wie in der Ebene, so lassen sich auch im Raum *mehrdeutige Transformationen* betrachten (vergl. Kap. 5, § 5, S. 161). Von Arbeiten darüber citiren wir De Paolis, *Mem. Lincei,* 1885.

Kapitel X.

Raumcurven verschiedener Ordnungen.

§ 1. Die Curven auf den Flächen 2ter Ordnung. Die sphärischen Curven.

Wie wir in dem letzten Paragraphen des vorigen Kapitels gesagt haben, lassen sich die auf einer Fläche 2ter Ordnung liegenden Curven mit Hülfe der Abbildung dieser Flächen auf die Ebene leicht studiren. Projicirt man von einem Punkt P der Fläche 2ter Ordnung (welcher auch ein unendlich ferner Punkt sein kann) die Punkte der Fläche auf eine Ebene, z. B. auf die Berührungsebene an die Fläche in dem 2ten Schnittpunkt O des durch P gehenden Durchmessers mit der Fläche, so erhält man eine ebene Abbildung der Fläche, die man der Analogie mit der Abbildung der Kugel wegen, *stereographische Projection* nennen kann.

Die auf den beiden durch P gehenden Erzeugenden der Fläche 2ter Ordnung gelegenen Punkte haben sämmtlich ihre Projection in denselben beiden unendlich fernen Punkten P_1, P_2, welche *Fundamentalpunkte* heissen; die Gerade $P_1 P_2$, welche in diesem Fall die unendlich ferne Gerade ist, wird *Fundamentalgerade* genannt.

Die Gesammtheit aller Geraden der Fläche 2ter Ordnung projicirt sich in zwei Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte in P_1 und P_2 liegen.

Wir wollen nun auf der Fläche 2ter Ordnung ein Coordinatensystem festsetzen.

Wir wählen den Punkt O zum Coordinatenanfang und die beiden Geraden, in welchen die Berührungsebene in O die Fläche zweiter Ordnung schneidet, zu Axen OX, OY.*) Es sei A ein

*) Will man diese Constructionen in dem reellen Gebiet ausführen, so braucht man nur anzunehmen, die Fläche sei ein *Hyperboloid.*

16*

Punkt der Fläche; durch A gehen zwei Erzeugende, eine des ersten und eine des zweiten Systems, welche die festen Erzeugenden OX und OY in den Punkten A_1 auf OX und A_2 auf OY schneiden; die Abstände $\xi = OA_1$ und $\eta = OA_2$ kann man als Coordinaten des Punktes A der Fläche 2ter Ordnung ansehen. Diese Coordinaten pflegt man *hyperboloidale* zu nennen; sie wurden von Plücker, *Crelle*, 34 eingeführt.

Bemerkenswerth ist, *dass der in der Tangentialebene XY gelegene Punkt, dessen Coordinaten eben ξ und η sind, die Projection des Punktes A der Fläche 2ter Ordnung von P aus ist.*

Jede Gleichung ersten Grads

$$a\xi + b\eta + c = 0$$

zwischen den Coordinaten ξ, η stellt auf der Fläche eine ebene durch den Punkt P gehende Curve dar.

Nimmt man als Cartesische Coordinatenaxen im Raum die Axen OX, OY und eine dritte beliebige Axe OZ an, *so sind die Cartesischen Coordinaten x, y, z eines Punkts A der Fläche 2ter Ordnung mit den Hyperboloidencoordinaten ξ, η desselben Punkts A durch die Relationen*

$$\xi = -\frac{dz}{cz + \mu y}, \quad \eta = -\frac{dz}{bz + \mu x}$$

oder

$$\frac{y}{z} = -\left[\frac{d}{\mu}\frac{1}{\xi} + \frac{c}{\mu}\right], \quad \frac{x}{z} = -\left[\frac{d}{\mu}\frac{1}{\eta} + \frac{b}{\mu}\right]$$

verbunden, wenn die Gleichung der Fläche 2ten Grads die Gestalt

$$z(az + by + cx + d) + \mu xy = 0 \quad \textit{hat.}$$

Wählt man speciell den durch O gehenden Durchmesser zur Z-Axe, *so wird die Gleichung der Fläche*

$$z(z + d) + \mu xy = 0, \textit{ wenn die Fläche ein Hyperboloid ist,}$$

oder

$$dz + \mu xy = 0, \textit{ wenn sie ein Paraboloid ist,}$$

und die oben angegebenen Relationen werden:

$$\xi = -\delta\frac{z}{y}, \quad \eta = -\delta\frac{z}{x}, \quad \left(\delta = \frac{d}{\mu}\right).$$

Die vorstehenden Formeln wurden von Plücker l. c. benutzt. In homogenen Coordinaten erhalten sie grössere Symmetrie. Siehe Clebsch-Lindemann, *Geom.*, 2, p. 422.

Es seien P, O zwei beliebige Punkte der Fläche 2ter Ordnung, welche nicht mehr nothwendiger Weise die Endpunkte eines Durchmessers zu sein brauchen, und das Fundamentaltetraeder der Coordinaten habe die Punkte P, O, P_1, P_2 zu Ecken, wobei P_1 und P_2 die beiden Fundamentalpunkte in der Berührungsebene an die Fläche in O bezeichnen.

Die Gleichung der Fläche 2^ter^ Ordnung hat die Gestalt

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0,$$

wenn die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ bez. die Ebenen POP_1, POP_2, OP_1P_2, PP_1P_2 sind.

Bezeichnet man nun mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 die homogenen Coordinaten des Punkts (in der Ebene OP_1P_2), in welchen sich ein Punkt der Fläche 2ter Ordnung projicirt, *so erhält man die Formeln*

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 \xi_3 : \xi_2 \xi_3 : \xi_1 \xi_2 : \xi_3^2.$$

Die Grössen $\frac{x_3}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_2}$ kann man zu Coordinaten des Punkts auf der Fläche wählen, Cayley, *Coll. Math. Pap.*, 5, p. 70; sie kommen schliesslich auf die Hyperboloidencoordinaten Plücker's hinaus.

Jede ebene Curve auf der Fläche 2ter Ordnung projicirt sich in einen Kegelschnitt, welcher zum Kreis wird, wenn P ein Kreis- oder Nabelpunkt der Fläche 2ter Ordnung und O der diametral gegenüberliegende Punkt ist. Alle diese Kegelschnitte sind einander ähnlich und ähnlich gelegen; ihre Asymptoten sind den beiden Axen OX, OY parallel, in welchen die Berührungsebene in O die Fläche 2ter Ordnung schneidet.

Eine Curve $n$ter Ordnung auf der Fläche 2ter Ordnung, welche nicht durch P geht, wird in eine ebene Curve $n$ter Ordnung projicirt.

Geht die Curve m-mal durch den Punkt P, so ist die Projection von der Ordnung $n - m$.

Jede Curve $n$ter Ordnung auf der Fläche 2ten Grads schneidet jede Erzeugende des einen Systems k-mal und jede Erzeugende des anderen k'-mal, so dass $k + k' = n$ ist; die Projection dieser Curve geht dann k-mal durch P_1 und k'-mal durch P_2. Die beiden Zahlen k, k' charakterisiren die Gattung (Species) der Curven $n$ter Ordnung auf der Fläche 2ten Grads. Diese Gattung pflegt man daher mit dem Symbol $[k, k']$ zu bezeichnen.

Wenn eine der Zahlen k, k' Null ist, so zerfällt die Curve in die Gesammtheit von n Geraden der Fläche 2ter Ordnung.

Betrachtet man die beiden Gattungen von Curven $[k, k']$ und $[k', k]$ als nicht wesentlich voneinander verschieden, so gilt der Satz:

Auf jeder Fläche 2^{ter} Ordnung gibt es $\frac{n-1}{2}$ verschiedene Gattungen (Species) von eigentlichen, d. h. nicht zerfallenden Curven n^{ter} Ordnung bei ungeradem n und $\frac{n}{2}$ verschiedene Gattungen bei geradem n.

Der vollständige Schnitt der Fläche 2^{ter} Ordnung mit einer allgemeinen Fläche m^{ter} Ordnung (d. h. ohne singuläre Punkte) ist von der Ordnung $2m$ und der Gattung $[m, m]$.

Durch $kk' + k + k'$ auf der Fläche 2^{ter} Ordnung beliebig gegebene Punkte lässt sich nur eine einzige Curve von der Gattung $[k, k']$ legen.

Zwei Curven von den Gattungen $[k, k']$ und $[k_1, k_1']$ schneiden sich in $kk_1' + k'k_1$ Punkten.

Jede Curve von der Gattung $[k, k']$, welche δ Doppelpunkte und χ Spitzen besitzt, berührt

$$2k'(k-1) - 2\delta - 3\chi$$

Erzeugende des ersten Systems und

$$2k(k'-1) - 2\delta - 3\chi$$

Erzeugende des zweiten.

Ueber die Singularitäten und charakteristischen Zahlen der Curven auf den Flächen 2^{ter} Ordnung siehe Kap. 9, § 4.

Auf der Fläche 2^{ter} Ordnung gibt es keine anderen eigentlichen Curven 2^{ter} Ordnung, als die ebenen Schnitte, welche den Typus $[1, 1]$ haben.

Es existiren keine anderen eigentlichen Curven 3^{ter} Ordnung als die vom Typus $[1, 2]$ oder, was dasselbe ist, $[2, 1]$; es sind die Raumcurven 3^{ter} Ordnung.

Es gibt zwei verschiedene Familien von Curven 4^{ter} Ordnung, die durch $[2, 2]$ (Curven 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species) und $[1, 3]$ (Curven 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species) dargestellt werden.

Durch Verallgemeinerung der stereographischen Projection der Kugel wurde zuerst Chasles zur Abbildung der Flächen 2^{ter} Ordnung auf eine Ebene geführt, *Ann. de Gergonne*, 18, 19; *Aperçu histor.*, 1837, p. 219, Anm. Das Studium der Curven auf der Fläche 2^{ter} Ordnung unternahm Plücker in zwei Aufsätzen, *Crelle*, 34, p. 341, 360. Mit demselben Gegenstand beschäftigten sic' ‾ ‾ in einem kurzen Artikel, *Phil. Magaz.*, 22, 1861; *Coll. Math. Pap.*, 5, p. 70 und Chasles, *Compt. Rend.*, 1861. Siehe auch Clebsch-Lindemann, *Geom.*, 2, p. 414 u. ff.

Specielle Fälle dieser Untersuchungen betreffen die stereographische Projection der Kugel und die sphärischen Curven, insbesondere die sogenannten *sphärischen Kegelschnitte.* Die stereographische Projection der Kugel ist schon seit den Zeiten der alten Griechen bekannt; ihre wichtigste Eigenschaft besteht in der sogenannten *conformen* (*winkeltreuen*) *Abbildung*; d. h.: *der Winkel, den zwei sphärische Curven miteinander bilden, ist dem Winkel ihrer ebenen Projectionen gleich,* wenn man, wie oben, das Projectionscentrum in einen Punkt P der Kugel legt und die Projectionsebene parallel zur Berührungsebene in P annimmt, oder speciell die Berührungsebene in dem Punkt O, der P diametral gegenüber liegt, zur Projectionsebene nimmt.

Diese Eigenschaft scheinen Hooke und Moivre gefunden zu haben, siehe Halley, *Phil. Trans.*, 1696; jedoch glauben auch Einige, sie sei schon 1587 Mercator bekannt gewesen; vergl. A. Breusing, *Das Verebnen der Kugeloberfläche* etc., Leipzig, 1892; spätere Untersuchungen sind von Lambert, Euler, Lagrange, Gauss, etc.; siehe Chasles, *Aperçu hist.*, p. 219 u. 235. Deutsche von Wangerin besorgte Ausgaben der Arbeiten von Lambert, Euler, Lagrange u. Gauss über Kartenprojection sind in Ostwald's Klass. der ex. Wiss., Nr. 54, 55, 93 erschienen.

Jeder ebene Schnitt der Kugel projicirt sich in einen Kreis.

Die Projection des Pols der Schnittebene ist das Centrum des Kreises, in welchen der ebene Schnitt projicirt wird. Theorem von Chasles. Siehe Hachette, *Géom. à 3 dim.*, Paris, 1817.

Die Coordinaten auf der Kugel und die sphärischen Kegelschnitte (Schnitte der Kugel mit Kegeln 2$^{\text{ter}}$ Ordnung) haben Chasles, *Mém. de Belgique*, 6; Gudermann, *Crelle*, 6; Möbius, *Werke*, 2; etc. studirt. Eine ausführliche Darstellung ihrer Theorie findet man bei Hesse, *Vorl. über analytische Geom. d. Raumes*, 3. Aufl., Leipzig 1876, p. 51 und Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. d. Raumes*, 1, 3$^{\text{te}}$ Aufl., p. 340 u. ff.

Ein sphärischer Kegelschnitt ist eine Raumcurve 4$^{\text{ter}}$ Ordnung und 1$^{\text{ter}}$ Species (vergl. § 3); er ist der Schnitt der Kugel mit einem Kegel 2$^{\text{ten}}$ Grads, dessen Spitze in dem Centrum der Kugel liegt.

Bei jedem sphärischen Kegelschnitt ist das anharmonische Verhältniss der vier Strahlen, welche einen variabelen Punkt der Curve mit vier festen Punkten derselben Curve verbinden, constant, *wenn man unter dem anharmonischen Verhältniss der vier (nicht in einer Ebene liegenden) Strahlen das der vier Ebenen versteht, welche sie vom Mittelpunkt der Kugel aus projiciren;* diese Eigenschaft ist der für die ebenen Kegelschnitte geltenden analog.

Bei einem sphärischen Kegelschnitt steht das Product der Sinus der Normalen, die sich von einem Punkt der Kugel nach zwei Bogen den Kegelschnitt berührender grösster Kreise ziehen lassen, zu dem Quadrat des Sinus der Normalen, welche von demselben Punkt aus auf den Bogen des durch die beiden Berührungspunkte gehenden grössten Kreises gefällt wird, in constantem Verhältniss.

Legt man durch das Centrum der Kugel die beiden Kreisschnittebenen des Kegels 2ten Grads (die ihn in Kreisen schneiden), so heissen die diesen Ebenen auf der Kugel entsprechenden grössten Kreise die dem sphärischen Kegelschnitt zugehörigen *cyclischen Kreise.*

Wenn ein grösster Kreis den sphärischen Kegelschnitt in zwei Punkten P und Q und die cyklischen Kreise in A und B schneidet, so ist $AP = BQ$ und es gilt insbesondere:

Der Bogen jedes grössten Kreises, welcher den Kegelschnitt berührt und zwischen den beiden cyclischen Kreisen enthalten ist, wird von dem Berührungspunkt halbirt.

§ 2. Die Raumcurven 3ter Ordnung.

Zwei Flächen 2ter Ordnung, die eine Gerade gemeinschaftlich haben, schneiden sich in einer Restcurve, welche eine *Raumcurve 3ter Ordnung* ist.

Benutzen wir dieselben Bezeichnungen, wie in Kap. 9, § 4, für die charakteristischen Zahlen und die Singularitäten der Raumcurven, so ergeben sich die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned} n &= 3, & m &= 3, \\ r &= 4, & g &= 1, \\ h &= 1, & x &= 0, \\ y &= 0, & \alpha &= 0, \\ \beta &= 0, & G &= 0, \\ H &= 0, & \omega &= 0, \\ v &= 0, & p &= 0, \end{aligned}$$

woraus sich die Sätze formulieren lassen:

Die Raumcurve 3ter Ordnung ist eine Curve 4ter Classe vom Geschlecht Null; ihre Osculationsdeveloppabele ist 4ter Ordnung und 3ter Classe.

Durch einen beliebigen Punkt des Raums gehen eine einzige Sehne und drei Osculationsebenen an die Curve 3^{ter} Ordnung.

Jede beliebige Ebene des Raums enthält eine und nur eine Gerade, in welcher sich zwei Osculationsebenen der Curve 3^{ter} Ordnung schneiden.

Die Projection der cubischen Raumcurve auf irgend eine Ebene ist eine Plancurve 3^{ter} Ordnung mit einem Doppelpunkt.

Jede Raumcurve 3^{ter} Ordnung kann man sich auf einer Fläche 2^{ter} Ordnung aufgetragen denken; sie trifft die Erzeugenden des einen Systems in je einem Punkt und die Erzeugenden des anderen Systems in je zwei Punkten. Siehe oben, § 1. Daraus folgt:

Auf einer Fläche 2^{ter} Ordnung kann man sich zwei verschiedene Systeme von Curven 3^{ter} Ordnung aufgetragen denken, je nachdem diese Curven die Erzeugenden des 1^{ten} Systems in je einem oder je zwei Punkten (und mithin die des 2^{ten} in je zwei oder je einem Punkt) schneiden.

Zwei Curven 3^{ter} Ordnung von verschiedenen Systemen treffen sich in fünf Punkten und zwei solche Curven desselben Systems in vier Punkten.

Wenn zwei Flächen 2^{ten} Grads sich in einer Curve 3^{ter} Ordnung und mithin auch in einer Geraden schneiden, so gehört diese letztere auf jeder der beiden Flächen 2^{ten} Grads dem System an, dessen Erzeugende von der Curve 3^{ter} Ordnung in je zwei Punkten geschnitten werden.

Durch fünf beliebig auf einer Fläche 2^{ten} Grads gegebene Punkte gehen zwei auf dieser Fläche liegende Curven 3^{ter} Ordnung (für jedes der beiden Systeme eine, siehe oben).

Durch sechs beliebig im Raum gegebene Punkte geht immer eine Curve 3^{ter} Ordnung.

Um diese Curve 3^{ter} Ordnung zu erhalten, braucht man nur den Kegel 2^{ter} Ordnung zu construiren, dessen Spitze in einem der sechs Punkte liegt, und der durch die übrigen fünf geht, und dann ebenso einen zweiten Kegel 2^{ter} Ordnung, dessen Spitze in einem anderen der sechs Punkte liegt, und der durch die übrigen fünf geht. Die beiden Kegel schneiden sich in der Geraden, welche die beiden Spitzen verbindet, und in einer Curve, welche die gesuchte Curve 3^{ter} Ordnung ist.

Eine Raumcurve 3^{ter} Ordnung ist der Ort der Punkte, welche den Tripeln sich entsprechender Ebenen dreier zu einander projectiver Ebenenbüschel gemeinschaftlich sind.

Die Osculationsdeveloppabele einer Raumcurve 3ter Ordnung lässt sich als die Enveloppe der Ebenen ansehen, welche durch die Tripel sich entsprechender Punkte dreier projectiver Punktreihen gehen.

Eine *Ausartung der Raumcurve 3ter Ordnung* mit einem einzigen scheinbaren Doppelpunkt ist die Gesammtheit eines Kegelschnitts und einer Geraden, welche so im Raum gelegen sind, dass die Gerade den Kegelschnitt nur in *einem* Punkt schneidet.

Verschiedene Eigenschaften der Curven 3ter Ordnung. Die vier Ebenen, welche durch eine variabele Sehne der Curve und durch jeden von vier festen Punkten derselben Curve gehen, stehen in constantem anharmonischem Verhältniss.

Vier feste Osculationsebenen der Curve werden von einer beliebigen Geraden, die der Schnitt zweier Osculationsebenen ist, in vier Punkten getroffen, welche in constantem anharmonischem Verhältniss stehen.

Insbesondere:

Die vier Ebenen, welche eine Tangente an die Curve mit vier festen Punkten der Curve verbinden, behalten bei dem Variiren der Tangente dasselbe anharmonische Verhältniss bei.

Die vier Punkte, in welchen vier Osculationsebenen durch eine variabele Tangente geschnitten werden, liegen in constantem anharmonischem Verhältniss.

Wenn sieben Punkte 1, 2, ..., 7 *einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, so schneiden sich die Ebenen*

712 und 745,
723 und 756,
734 und 761

in drei Geraden einer Ebene, welche durch eine feste Sehne der Curve geht, wenn die ersten sechs Punkte fest liegen bleiben und nur der Punkt 7 seine Lage ändert. Cremona.

Gegeben sind zwei durch dieselben fünf Punkte gehende Curven dritter Ordnung; die Sehnen der ersten, welche durch Punkte der zweiten gehen, schneiden alle Sehnen der zweiten, die durch Punkte der ersten gehen.

Die Osculationsebenen dreier Punkte 1, 2, 3 *der Curve 3ter Ordnung schneiden sich in einem Punkt* (4) *der Ebene* 1 2 3.

Die Berührungspunkte der drei von einem Punkt (4) *aus an die Curve 3ter Ordnung gezogenen Osculationsebenen liegen in derselben Ebene, wie der Punkt* (4). Chasles.

Die Schnittgerade von Osculationsebenen, welche in der Ebene 1 2 3 *liegt, ist die harmonische Polare des Punktes* 4 *in Bezug auf das Dreiseit* (1 2 3)*).

Die durch den Punkt 4 gehende Sehne der Curve 3^{ter} Ordnung ist die harmonische Polargerade der Ebene 1 2 3 *in Bezug auf das Dreiflach der drei Osculationsebenen***).

Vier Punkte einer Curve 3^{ter} Ordnung bilden ein Tetraeder und ein zweites Tetraeder wird durch die Osculationsebenen in den vier Punkten bestimmt; jedes der beiden Tetraeder ist dem anderen zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben. Möbius, *Crelle,* 3, p. 273.

Das Theorem von Chasles zeigt, dass durch eine gewundene Curve 3^{ter} Ordnung eine besondere Zuordnung zwischen den Punkten und Ebenen im Raum derart festgesetzt wird, *dass jedem Punkt eine durch ihn gehende Ebene und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt entspricht.* Diese Zuordnung ist eine *polare oder involutorische Dualität* und zwar speciell diejenige, die wir auf S. 44 *Nullpolarität* oder *Nullsystem* genannt haben. Siehe Möbius, *Statik,* Leipzig, 1837, 1, p. 151 und *Crelle,* 10, p. 317. Der Punkt und die ihm entsprechende Ebene heissen *Pol* und *Polarebene.*

Die Sehne der Curve 3^{ter} Ordnung, welche durch einen gegebenen Pol P geht und die in der Polarebene von P liegende Gerade, in welcher sich zwei Osculationsebenen der Curve schneiden, sind zwei in der Nullpolarität sich entsprechende Gerade.

Verschiedene Constructionen der Curven 3^{ter} Ordnung. Die Probleme, deren Lösung wir hier angeben, betreffen die Construction der gewundenen Curven 3^{ter} Ordnung, wenn gewisse Bedingungen gegeben sind, denen sie genügen sollen.

1. Gegeben sind sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 der Curve; die Curve zu construiren.

Man lege durch (1 2) *eine beliebige Ebene α und bestimme die Schnitte*

---

*) Unter *harmonischer Polaren s* eines Punktes S (des *harmonischen Pols* von s) in Bezug auf ein Dreiseit versteht man die Gerade, welche die Seiten eines Dreiseits ABC in drei Punkten A', B', C' so schneidet, dass die Strahlenpaare SA, SA'; SB, SB'; SC, SC' in Involution stehen. Siehe oben das letzte Theorem auf S. 58.

**) Jeder wird leicht selbst die Definition der *harmonischen Polaren* in der vorigen Anmerkung auf den Fall des Dreiflachs ausdehnen können.

$$
\begin{array}{ll}
[\alpha, (345)] = a, & [\alpha, (456)] = b, \\
[(23), (561)] = A, & [(61), (234)] = B, \\
[\alpha, (B4)] = C, & [\alpha, (A5)] = D, \\
[(CD), a] = E, & [(CD), b] = F;
\end{array}
$$

der Punkt

$$[(1E), (2F)] = P$$

gehört der Curve 3^{ter} *Ordnung an.*

Oder auch:

Man bestimme

$$
\begin{array}{ll}
[\alpha, (45)] = G, & \\
[1AG] = \beta, & [2BG] = \gamma, \\
[\beta, (34)] = H, & [\gamma, (56)] = K;
\end{array}
$$

die drei Ebenen

$$[61H], \quad \alpha, \quad [23K]$$

schneiden sich in einem Punkt der Curve 3^{ter} *Ordnung, welcher selbstverständlich der in der Ebene* α *liegende dritte Punkt der Curve ist.*

2. Gegeben sind fünf Punkte $1, 2, 3, 4, 5$ und eine Secante (a); die Curve 3^{ter} Ordnung zu construiren.

Man lege durch die Secante (a) *eine beliebige Ebene* α, *welche die Ebenen*

$$[123], \ [124], \ [134], \ [234]$$

in vier Geraden schneidet, die, mit (a) *zusammen genommen, einen sie berührenden Kegelschnitt bestimmen; die Ebene* α *schneidet ferner die Ebenen*

$$[123], \ [125], \ [135], \ [235]$$

in vier anderen Geraden, welche mit (a) *zusammen einen weiteren Kegelschnitt festlegen; die beiden Kegelschnitte haben zu gemeinschaftlichen Tangenten* (a) *und* $[\alpha, (123)]$. *Der Schnittpunkt der beiden anderen gemeinschaftlichen Tangenten ist ein Punkt der Curve* 3^{ter} *Ordnung.*

3. Gegeben sind vier Punkte und zwei Secanten; die Curve zu construiren. *Dieses Problem hat entweder keine oder unendlich viele Auflösungen.*

4. Gegeben sind drei Punkte und drei Secanten; die Curve 3^{ter} Ordnung zu construiren.

Es genügt, die drei Ebenenbüschel zu betrachten, welche die drei Secanten zu Axen haben, und zwischen den Ebenen der drei

Büschel eine projective Zuordnung derart herzustellen, dass sich die Ebenen, welche durch jeden der drei gegebenen Punkte gehen, einander entsprechen; die Punkte der Curve sind als Schnitte von drei beliebigen anderen sich entsprechenden Ebenen bestimmt.

5. Gegeben zwei Punkte A, B und vier Secanten a, a', b, b'; die Curve zu construiren.

Man ziehe die Gerade, welche durch A *geht und die Geraden* a, a' *schneidet, und die Gerade, welche* A *enthält und* b, b' *trifft; diese Geraden seien* c, c'; *alsdann ziehe man ebenso die Geraden* d, d', *welche durch* B *gehen und* a, a' *bez.* b, b' *treffen. Der Schnitt der Ebenen* $[cd]$ *und* $[c'd']$ *sei* l; *die beiden Hyperboloide*

$$[aa'l],\ [bb'l]$$

schneiden sich in der gesuchten Curve 3^{ter} *Ordnung.*

6. *Das Problem,* die Curve 3^{ter} Ordnung zu construiren, welche durch einen Punkt geht, und fünf gegebene Gerade zu Secanten hat, *lässt ebenfalls immer eine Lösung zu.*

7. *Dagegen hat das Problem,* die Curve 3^{ter} Ordnung zu construiren, von welcher sechs Secanten gegeben sind, *im Allgemeinen sechs Auflösungen.*

Wir verweisen in Bezug auf diese Aufgaben auf die oben citirten Werke von Schröter, Cremona und Sturm.

Verschiedene Species von Curven 3^{ter} *Ordnung.* In derselben Art, wie die Kegelschnitte je nach der Realität oder Nichtrealität ihrer unendlich fernen Punkte unterschieden werden, so lassen sich analoge Unterschiede auch bei den gewundenen Curven 3^{ter} Ordnung feststellen:

1) wenn die unendlich ferne Ebene die Curve *in einem einzigen reellen* Punkt schneidet, so ergibt sich die *cubische Ellipse*;

2) wenn die unendlich ferne Ebene *drei reelle* Punkte der Curve enthält, die *cubische Hyperbel*;

3) wenn speciell von diesen drei reellen Punkten zwei zusammenfallen, die *cubische parabolische Hyperbel*;

4) und wenn schliesslich diese drei Punkte sämmtlich zusammenfallen, d. h. also, die unendlich ferne Ebene eine Osculationsebene ist, *die cubische Parabel.*

Durch jede cubische Hyperbel gehen drei hyperbolische reelle Cylinder 2^{ten} *Grads.*

Durch die cubische Ellipse geht ein einziger reeller Cylinder zweiten Grads, welcher elliptisch ist.

Durch die cubische parabolische Hyperbel gehen zwei reelle Cylinder 2^ten Grads, von denen der eine hyperbolisch, der andere parabolisch ist.

Durch die cubische Parabel geht nur ein reeller Cylinder 2^ten Grads und dieser ist parabolisch.

Nennt man die reelle Tangente (im Endlichen) an einen unendlich fernen Punkt der Curve *Asymptote*, so gelten die Sätze:

Die cubische Ellipse hat nur eine Asymptote.

Die cubische Hyperbel hat deren drei.

Die cubische parabolische Hyperbel hat eine einzige Asymptote.

Die cubische Parabel hat überhaupt keine.

Die gewundenen Curven 3^ter Ordnung wurden zuerst von Möbius studirt, *Barycentr. Calcul*, 1827, p. 120; *Crelle*, 10, dann von Chasles, *Aperçu hist.*, Note 33; *Journ. de Liouville*, 2, 1854; *Compt. Rend.*, 45. Auf sie folgten Seydewitz, *Grunert's Archiv*, 10; Hesse, *Crelle*, 26; Schröter, ib., 56; v. Staudt, *Beiträge zur Geom. der Lage*, 3, 1860, p. 298—311; Cremona, *Ann. di mat.*, (1), 1, 2, 5; *Crelle*, 58, 60, 63; *Nouv. Annales etc.*, 1, 2^te Ser.; R. Sturm, *Crelle*, 79, 80, 86; Müller, *Math. Ann.*, 1.

Andere Untersuchungen über die Raumcurven 3^ter Ordnung speciell auch die Anwendung der Theorie der Invarianten der binären Formen auf dieses Studium findet man bei Beltrami, *Ist. Lomb.*, 1868; R. Sturm, l. c.; Voss, *Math. Ann.*, 13; D'Ovidio, *Acc. Torino*, 32, 1879; *Giorn. di Batt.*, 17; *Collect. math. in memoriam D. Chelini*, Mediolani 1881; Pittarelli, *Giorn. di Batt.*, 17; Gerbaldi, *Mem. Torino*, 1880.

Von Werken, die sich mit den Raumcurven 3^ter Ordnung beschäftigen, citiren wir Salmon-Fiedler, *An. Geom. d. Raum.*, 2 und Schröter, *Theorie der Oberflächen 2^ter Ordnung und der Raumcurven 3^ter Ordnung*, Leipzig 1880, der ausführlicher auf sie eingeht. Vergleiche auch die Schrift von Drach, *Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte*, Leipzig 1867.

§ 3. Die Raumcurven 4^ter Ordnung 1^ter Species.

Jede Raumcurve 4^ter Ordnung 1^ter Species ist der vollständige Schnitt zweier Flächen 2^ten Grads; *sie schneidet auf jeder von ihnen jede Erzeugende des einen Systems in zwei*

Punkten und jede Erzeugende des anderen Systems ebenfalls in zwei Punkten; siehe § 1.

Die Charakteristiken für diese Curve sind, wenn vorausgesetzt wird, dass die beiden Flächen 2ten Grads beliebig seien:

$$\begin{aligned} n &= 4, & m &= 12, \\ r &= 8, & g &= 38, \\ h &= 2, & x &= 16, \\ y &= 8, & \alpha &= 16, \\ \beta &= 0, & G &= 0, \\ H &= 0, & \omega &= 0, \\ v &= 0, & p &= 1. \end{aligned}$$

Wenn dagegen die beiden Flächen 2ten Grads in einem Punkt eine gewöhnliche Berührung haben, so erhält die Curve 4ter Ordnung einen Doppelpunkt, und ihre Charakteristiken sind:

$$\begin{aligned} n &= 4, & m &= 6, \\ r &= 6, & g &= 6, \\ h &= 2, & x &= 6, \\ y &= 4, & \alpha &= 4, \\ \beta &= 0, & G &= 0, \\ H &= 1, & \omega &= 0, \\ v &= 0, & p &= 0. \end{aligned}$$

Haben die beiden Flächen 2ten Grads in einem Punkt eine stationäre Berührung, so besitzt die Curve 4ter Ordnung eine Spitze; ihre Charakteristiken werden

$$\begin{aligned} n &= 4, & m &= 4, \\ r &= 5, & g &= 2, \\ h &= 2, & x &= 2, \\ y &= 2, & \alpha &= 1, \\ \beta &= 1, & G &= 0, \\ H &= 0, & \omega &= 0, \\ v &= 0, & p &= 0. \end{aligned}$$

Degenerationen der Raumcurve 4ter Ordnung 1ter Species sind:

1. Eine ebene Curve 3ter Ordnung und eine Gerade, welche so im Raum liegt, dass sie die Curve in einem einzigen Punkt schneidet.

2. Eine Raumcurve 3ter Ordnung und eine ihrer Sehnen.

3. Zwei Kegelschnitte, die so im Raum liegen, dass sie zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

Aus dem Satz über die Anzahl der Kegel 2^{ten} Grads, welche in einem Büschel von Flächen 2^{ten} Grads existiren, folgt:

Durch jede Curve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species gehen vier Kegel 2^{ten} Grads. Poncelet.

Eine Curve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species kann keine dreifache Secante haben.

Jede Ebene des Ebenenbüschels, welches zur Axe eine Sehne oder Tangente der Curve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species hat, schneidet die Curve in zwei Punkten, deren Verbindungslinie die Erzeugende einer Fläche 2^{ten} Grads ist, auf welcher die Curve 4^{ter} Ordnung vollständig liegt.

In einem solchen Büschel gibt es vier Berührungsebenen an die Curve 4^{ter} Ordnung.

Acht beliebig im Raum gegebene Punkte bestimmen eine Curve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species.

Zwei auf derselben Fläche 2^{ten} Grads gelegene Curven 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species schneiden sich in acht Punkten.

Solche acht Punkte sind diejenigen, in welchen sich drei Flächen 2^{ten} Grads schneiden; *sind sieben von ihnen gegeben, so lässt sich der noch fehlende durch lineare Construction bestimmen;* sie bilden eine *Gruppe von acht associirten Punkten; durch sie gehen unendlich viele Curven 4^{ter} Ordnung.* Siehe z. B. Hesse, *Crelle*, 26; Reye, ib., 100; Zeuthen, ib., 99; *Acta math.*, 12, etc.

Durch sechs Punkte einer Gruppe von acht associirten Punkten lege man die Raumcurve 3^{ter} Ordnung; die durch die beiden übrigen Punkte gehende Gerade ist eine Sehne der Curve 3^{ter} Ordnung; und umgekehrt: *acht Punkte einer Curve 4^{ter} Ordnung, welche diese Eigenschaft besitzen, sind acht associirte Punkte.*

Durch fünf Punkte einer Curve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species ziehe man alle möglichen Flächen 2^{ten} Grads, welche die Curve in noch drei Punkten schneiden. Die Ebene dieser drei Punkte geht durch einen festen Punkt der Curve.

Man habe auf einer Curve 4^{ter} Ordnung zwei Gruppen von acht associirten Punkten, im Ganzen also 16 Punkte; wenn es nun möglich ist, acht von ihnen so auszuwählen, dass sie eine neue Gruppe associirter Punkte bilden, so liefern auch die übrigen acht eine Gruppe associirter Punkte.

Man ziehe drei Ebenen, welche die Curve 4^{ter} Ordnung in den Punkten

$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1;$$
$$A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2;$$
$$A_3,\ B_3,\ C_3,\ D_3$$

schneiden; die Ebenen $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$ *treffen dann die Curve in weiteren vier Punkten, welche in einer Ebene liegen.*

Die vier Ebenen, welche in vier in einer Ebene gelegenen Punkten osculiren, schneiden die Curve in vier Punkten einer Ebene. Reye.

Es gibt auf der Curve 4^{ter} *Ordnung Tripel von Punkten* A_1, A_2, A_3, *die mit der Eigenschaft begabt sind, dass die drei in ihnen osculirenden Ebenen sich in einem Punkt* S *der Curve schneiden, durch welchen auch die Ebene* $A_1A_2A_3$ *geht.* Der Punkt S heisst *Begleitpunkt (Satellit) des Tripels.*

Man habe eine Curve 4^{ter} *Ordnung auf einer Fläche* 2^{ten} *Grads; die drei Punkte* B_1, B_2, B_3, *in denen die durch* A_1, A_2, A_3 *gehenden Erzeugenden desselben Systems die Curve* 4^{ter} *Ordnung zum zweiten Mal schneiden, bilden ebenfalls ein Tripel.*

Es sei O *ein Punkt der Curve* 4^{ter} *Ordnung; die drei Punkte, in denen die drei Ebenen* OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_1 *die Curve wieder treffen, bilden auch ein Tripel.*

Die drei Punkte, in denen die drei bez. durch A_1, A_2, A_3 *und durch eine Secante oder durch eine Tangente der Curve* 4^{ter} *Ordnung gehenden Ebenen die Curve von Neuem schneiden, machen wieder ein Tripel aus.*

Um für eine gegebene Curve 4^{ter} Ordnung ein *Tripel* von Punkten zu construiren, kann man auf die folgende Art verfahren: Man nimmt einen Punkt S der Curve als Begleitpunkt an, und projicirt dann die Curve 4^{ter} Ordnung von S aus auf eine Ebene in eine Curve 3^{ter} Ordnung; *die durch* S *und eine der Inflexionsgeraden der cubischen Plancurve gehende Ebene schneidet die Curve* 4^{ter} *Ordnung in den drei Punkten eines Tripels.*

Wir haben oben gesagt, *dass es in dem Ebenenbüschel. dessen Axe eine Sehne der Curve* 4^{ter} *Ordnung ist, vier Berührungsebenen an die letztere gibt;* wir wollen die vier Berührungspunkte ein *Punktequadrupel* nennen.

Das anharmonische Verhältniss dieser vier Ebenen des Büschels bleibt beim Variiren der Sehne, welche die Axe des Büschels ist, constant; oder auch:

Das anharmonische Verhältniss der vier Punkte, in welchen die Tangenten in den vier Punkten eines Quadrupels die dem Quadrupel zugehörige Sehne schneiden, ist constant.

Die durch eine Sehne der Curve und durch je einen der vier Punkte eines Quadrupels gehenden Ebenen schneiden die Curve in vier Punkten, die ihrerseits ein Quadrupel bilden.

Die vier Seitenflächen des Tetraeders, welches die vier Punkte eines Quadrupels zu Eckpunkten hat, schneiden die Curve in vier Punkten eines zweiten Quadrupels, die eben die vier Punkte sind, in denen die Curve von den vier Osculationsebenen in den Punkten des ersten Quadrupels getroffen wird.

Es gibt auf der Curve 4^{ter} Ordnung 24 Punktepaare von der Beschaffenheit, dass die Osculationsebene in dem einen Punkt des Paares durch den anderen Punkt des Paares geht, und umgekehrt.

Man hat auch die Configuration der 16 Berührungspunkte der stationären Ebenen der Osculationsdeveloppabelen mit der Curve 4^{ter} Ordnung studirt, d. h. der 16 Punkte der Curve 4^{ter} Ordnung, in welchen die Osculationsebene eine Berührung 3^{ter} Ordnung mit der Curve hat.

Diese 16 Punkte sind die Schnittpunkte der Curve mit den vier Seitenflächen des Polartetraeders, d. h. des Tetraeders, welches die Spitzen der vier durch die Curve 4^{ter} Ordnung gehenden Kegel zu Eckpunkten hat.

Jede Ebene, welche durch drei dieser 16 Punkte geht, enthält auch einen vierten von ihnen, der übrigens mit einem der drei in Betracht gezogenen zusammenfallen kann. Man erhält so 116 Ebenen.

Die 16 Punkte lassen sich durch die Symbole (i, j) darstellen, worin $i, j = 0, 1, 2, 3$ *sind,* und diejenigen vier Punkte liegen in einer Ebene, für welche die Summe der ersten Indices und die der zweiten Indices, jede für sich, $\equiv 0 \pmod{4}$ sind.

Die Coordinaten eines Punkts der Raumcurve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species lassen sich durch elliptische Functionen eines Parameters ausdrücken; man kann insbesondere

$$x = p(u), \quad y = p'(u), \quad z = p''(u)$$

setzen, worin p die bekannte elliptische Function von Weierstrass bedeutet. Vergl. *Repert.* 1, Kap. 16, § 4. *Vier Punkte in einer Ebene sind alsdann diejenigen, für welche die Summe der vier Argumente* $\equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'}$ *ist.*

Von diesem Gesichtspunkt aus wurde die Raumcurve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species von Harnack, *Math. Ann.*, 12; Lange, *Dissert., Dresden,* 1882 und Schlömilch's *Zeitschr.*, 28 studirt; siehe auch Halphen, *Fonct. ellipt.*, 2, p. 449 u. ff.

Die Raumcurve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species untersuchte Chasles, *Compt. Rend.*, 52, 54; Reye, *Ann. di mat.*, 2; Gegenbauer, *Wien. Berichte*, 93; Ameseder, ib., 37, abgesehen von den anderen bereits oben citirten Autoren. Wir verweisen auch auf Schröter, *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumcurve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species,* Leipzig 1890, worin man noch viele andere Angaben findet.

Zu dieser Species von Curven 4^{ter} Ordnung gehören auch die sphärischen Kegelschnitte, von denen in § 1 die Rede war.

§ 4. Raumcurven 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species.

Die Raumcurve 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species ist als diejenige Curve 4^{ter} Ordnung definirt, durch welche nur *eine einzige* Fläche 2^{ten} Grads geht.

Wenn eine Fläche 2^{ten} Grads und eine Fläche 3^{ten} Grads eine ebene Curve 2^{ter} Ordnung (zwei Gerade in einer Ebene oder einen Kegelschnitt) gemeinschaftlich haben, so ist im Allgemeinen der übrig bleibende Schnitt eine Curve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species; die Curve 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species ist dagegen der Restschnitt einer Fläche 2^{ter} und einer 3^{ter} Ordnung, welche zwei windschiefe Gerade gemeinschaftlich haben.

Man erhält auch eine Curve 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species, wenn die Flächen 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung eine einzige Gerade gemeinschaftlich haben, welche für die cubische Fläche doppelt ist.

Die allgemeine Fläche 3^{ter} Ordnung kann man durch eine windschiefe Regelfläche ersetzen; d. h.:

Jede Curve 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species lässt sich als der Schnitt einer Fläche 2^{ten} Grads und einer windschiefen cubischen Fläche ansehen, welche eine Sehne der Curve zur Doppeldirectrix hat. Cremona.

Jede Curve 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species kann als der Ort der Punkte betrachtet werden, die den sich entsprechenden Ebenen dreier projectiver Büschel gemeinschaftlich sind, von welchen das erste einfach, das zweite doppelt involutorisch und das dritte zu dem zweiten homographisch ist. Cremona.

Die Projection der Curve 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species auf eine Ebene ist im Allgemeinen eine Curve 4^{ter} Ordnung, 6^{ter} Classe, *mit drei Doppelpunkten, vier Doppeltangenten und sechs Inflexionspunkten.*

Wenn das Centrum der Projection auf der Curve liegt, so erhält man eine Curve 3^{ter} Ordnung und 4^{ter} Classe.

Durch die Curve 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species gehen vier Kegel 3^{ter} Ordnung und 3^{ter} Classe.

Die charakteristischen Zahlen für die Curve 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species sind:

$$
\begin{array}{ll}
n = 4, & m = 6, \\
r = 6, & g = 6, \\
h = 3, & x = 6, \\
y = 4, & \alpha = 4, \\
\beta = 0, & G = 0, \\
H = 0, & \omega = 0, \\
v = 0, & p = 0.
\end{array}
$$

Alle Erzeugenden des einen der beiden Systeme auf der Fläche zweiten Grads werden von der Curve 4^{ter} Ordnung in drei Punkten, und alle diejenigen des anderen Systems in einem einzigen Punkt geschnitten; siehe § 1; daraus folgt:

Die Curve lässt ein einfach unendliches System von dreifachen Secanten zu.

Es gibt vier Punkte, in welchen die Tangente an die Curve die Curve noch einmal schneidet.

Die Curve kann *speciell* eine oder auch zwei *stationäre Tangenten* oder *lineare Inflexionen* ($v = 1, 2$) haben, was bei Curven 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species nicht der Fall sein kann.

Die charakteristischen Zahlen für diese speciellen Fälle sind:

$$
\begin{array}{ll}
n = 4, & m = 5, \\
r = 6, & g = 4, \\
h = 3, & x = 5, \\
y = 4, & \alpha = 2, \\
\beta = 0, & G = 0, \\
H = 0, & \omega = 0, \\
v = 1, & p = 0
\end{array}
$$

und

$$\begin{aligned} n &= 4, & m &= 4, \\ r &= 6, & g &= 3, \\ h &= 3, & x &= 4, \\ y &= 4, & \alpha &= 0, \\ \beta &= 0, & G &= 0, \\ H &= 0, & \omega &= 0, \\ v &= 2, & p &= 0. \end{aligned}$$

Degenerationen der Raumcurve 4ter Ordnung 2ter Species sind:

1. *Eine Raumcurve 3ter Ordnung und eine Gerade, welche sie in einem einzigen Punkt schneidet.*

2. *Zwei Kegelschnitte, welche einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben.*

Das anharmonische Verhältniss der vier Ebenen, welche durch vier Punkte der Curve und durch eine beliebige dreifache Secante der Curve gehen, bleibt beim Variiren der dreifachen Secante constant. Man kann es daher *das anharmonische Verhältniss der vier Punkte der Curve 4ter Ordnung* nennen.

Auf einer Fläche 2ten Grads kann man zwei Systeme von Curven 4ter Ordnung 2ter Species aufzeichnen, je nachdem diese Curven die Erzeugenden des einen Systems (das 1te System) in je einem und die des anderen Systems (das 2te System) in je drei Punkten treffen oder umgekehrt.

Zwei Curven 4ter Ordnung, welche verschiedenen Systemen angehören, schneiden sich in zehn Punkten und zwei Curven desselben Systems in sechs Punkten.

Eine Curve 4ter Ordnung 1ter Species und eine solche 2ter Species, welche auf derselben Fläche 2ten Grads beschrieben sind, treffen sich in acht Punkten.

Eine Raumcurve 3ter Ordnung und eine Curve 4ter Ordnung 2ter Species, die auf derselben Fläche 2ter Grads aufgetragen sind, und von welchen jede dieselbe Erzeugende der Fläche in einem einzigen Punkt trifft, schneiden sich in fünf Punkten.

Wenn dagegen die Curve 3ter Ordnung dieselbe Erzeugende in zwei Punkten und die Curve 4ter Ordnung in nur einem Punkt trifft, so haben die beiden Curven sieben Punkte gemeinschaftlich.

Durch acht beliebige Punkte des Raums gehen vier Curven 4ter Ordnung 2ter Species.

Durch sieben Punkte auf einer Fläche 2^{ten} Grads lassen sich zwei Curven 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species ziehen, die auf dieser Fläche 2^{ten} Grads liegen.

Von einem Punkt P der Curve aus können drei Osculationsebenen an die Curve gezogen werden; die drei Berührungspunkte liegen in einer durch P gehenden Ebene, welche die harmonische Polarebene der durch P gezogenen dreifachen Secante in Bezug auf das Dreiflach der drei Osculationsebenen ist. Ueber die Definition der harmonischen Polarebene siehe die Anm. zu § 2 dieses Kapitels.

Variirt man den Punkt P, so hüllt die Ebene der drei Berührungspunkte einen Kegel 2^{ter} Ordnung ein. Cremona.

Man nennt diejenigen Sehnen der Curve, durch welche sich zwei Osculationsebenen von der Beschaffenheit an die Curve legen lassen, dass die Berührungspunkte die Schnittpunkte der Sehnen mit der Curve sind, *Hauptsehnen.* Bertini.

Es gibt drei Hauptsehnen; sie schneiden sich in demselben Punkt.

Durch einen Punkt des Raums gehen drei Sehnen der Curve ($h = 3$); wenn man nun durch diesen Punkt und durch die sechs Tangenten an die Curve in den sechs Schnittpunkten mit den Sehnen Ebenen legt, so

berühren diese sechs Ebenen denselben Kegel 2^{ter} Ordnung.

Es gelten ferner die Sätze:

Die sechs von einem Punkt an die Curve gezogenen Osculationsebenen berühren denselben Kegel 2^{ten} Grads.

Die acht Geraden, welche durch einen Punkt des Raums sich nach den Berührungspunkten der vier durch diesen Punkt gelegten Doppeltangentialebenen ziehen lassen, sind Erzeugende eines Kegels 2^{ten} Grads.

Die Osculationsebenen der Curve berühren eine Fläche 2^{ten} Grads, deren Tangentialebenen die Curve in vier eine äquianharmonische Gruppe bildenden Punkten schneiden. Diese Fläche 2^{ten} Grads ist in die Osculationsdeveloppabele der Curve eingeschrieben. Cremona.

Die Ebenen, welche die Curve 4^{ter} Ordnung in vier eine harmonische Gruppe bildenden Punkten schneiden, hüllen eine Steiner'sche Fläche (4^{ter} Ordnung und 3^{ter} Classe), siehe Kap. 12, § 9, *ein, welche der Osculationsdeveloppabelen der Curve 4^{ter} Ordnung eingeschrieben ist.* Cremona.

Wir wollen das Büschel von Ebenen betrachten, dessen Axe eine Gerade ist, welche die Curve 4^{ter} Ordnung in zwei Punkten schneidet; *der Ort der Geraden, welche die beiden anderen Punkte* *verbindet, in denen eine jede Ebene die Curve 4ter Ordnung trifft, ist eine windschiefe Regelfläche 3ter Ordnung, deren Doppeldirectrix die Axe des Ebenenbüschels ist.*

Aus den Tabellen im Anfang dieses Paragraphen ersieht man, dass die Curve 4ter Ordnung 2ter Species *vier* stationäre Osculationsebenen hat ($\alpha = 4$); nun gelten die Sätze:

Die vier Tangenten in den vier stationären Punkten (wir nennen die Berührungspunkte der stationären Ebenen *stationäre Punkte*) *liegen auf demselben Hyperboloid.*

Die vier stationären Punkte gehören der Knotencurve (6ter Ordnung) der Osculationsdeveloppabelen an (Kap. 9, § 1); *in ihnen sind die stationären Ebenen zugleich auch Osculationsebenen an die Knotencurve.*

Die Knotencurve hat ebenfalls vier stationäre Punkte und keine anderen mehrfachen Punkte; sie ist der Schnitt einer Fläche 2ter mit einer Fläche 3ter Ordnung, welche in vier Punkten eine stationäre Berührung haben.

Die Curve 4ter Ordnung 2ter Species schneidet die entsprechende Knotencurve in acht Punkten, von welchen vier die stationären Punkte der Curve 4ter Ordnung und die übrigen vier die stationären Punkte der Knotencurve sind.

Die Existenz der Curven 4ter Ordnung 2ter Species haben Salmon und Cayley nachgewiesen, *Cambr. Math. Journ.*, 5, 1850, später Steiner, *Flächen 3ten Grades, Crelle,* 53, 1857.

Die erste bedeutende Arbeit über den Gegenstand ist von Cremona, *Acc. Bologna,* 1861 oder *Ann. di Tortolini,* 4; dann folgten Emil Weyr mit vielen Beiträgen, *Math. Ann.*, 4; *Wien. Berichte,* 1871, 75, 76, 78; Bertini, *Ist. Lomb.*, 1872; Armenante, *Giorn. di mat.*, 11, 12; Rohn, *Leipz. Ber.*, 1890/91 und viele Andere.

Bez. der Curve 4ter Ordnung 2ter Species hat Study, *Leipz. Berichte,* 1886 gefunden, dass, wenn ein Punkt des Raums gegeben ist, auf der Curve eine Involution 4ter Ordnung und 1ter Stufe bestimmt ist; ein specieller Fall dieser Involution war schon Bertini (l. c.) bekannt. Sie ersetzt gewissermassen das Fehlen jener anderen Involution, die auf den rationalen Raumcurven von der Ordnung $n > 4$ existirt. Siehe § 6.

Die sogenannte *Theorie der Osculanten* steht in Verbindung mit der Theorie dieser Involutionen. Vergl. Jolles, *Theor. der Osculanten,* Aachen, 1886; Stahl, *Crelle,* 101, 104.

Ausführlichere historische- und Literaturnachweise findet man in der Vorrede zu einer neueren Arbeit Berzolari's über diesen Gegenstand, *Ann. di mat.*, 20. Berzolari bewies, *dass die in Rede stehende Involution die apolare derjenigen ist, die man durch Schnitte der Curve mit den durch den gegebenen Punkt gehenden Ebenen erhält.*

Ueber die weiter oben (S. 260, 261) besprochenen speciellen Fälle, in denen die Curve stationäre Tangenten besitzt, siehe Cremona, *Rend. Ist. Lomb.*, 1868; Appell, *Compt. Rend.* 1876; etc.

§ 5. Die Raumcurven 5ter, 6ter etc. Ordnung.

Die Curven 5ter Ordnung.

Wie wir schon gesagt haben (siehe Kap. 9, § 3), gibt es drei Familien von Raumcurven 5ter Ordnung, eine mit 4 scheinbaren Doppelpunkten und vom grössten Geschlecht 2, die andere mit 5 scheinbaren Doppelpunkten und vom grössten Geschlecht 1 und die dritte mit 6 scheinbaren Doppelpunkten und vom Geschlecht 0. Es versteht sich von selbst, dass die Curven keine wirklichen Singularitäten, d. h. wirkliche Doppelpunkte, Spitzen, etc. haben dürfen.

Wir wollen diese Curven mit R_5^2, R_5^1, R_5^0 bezeichnen.

Durch jede Raumcurve 5ter Ordnung gehen unendlich viele Flächen 3ter Ordnung.

Die charakteristischen Zahlen für R_5^2 sind:

$$\begin{aligned} r &= 12, & x &= 48, \\ m &= 21, & y &= 32, \\ h &= 4, & \alpha &= 32, \\ g &= 156. \end{aligned}$$

Die übrigen charakteristischen Zahlen sind Null.

Von jedem Punkt der Curve R_5^2 geht eine dreifache Secante der Curve aus.

Die Curve ist der theilweise Schnitt einer Fläche 2ter und einer Fläche 3ter Ordnung, welche eine die Curve dreimal schneidende Gerade gemeinschaftlich haben.

Der Ort der dreifachen Secanten der Curve ist die Fläche 2ten Grads, auf welcher die Curve liegt.

Es existiren acht Punkte von der Beschaffenheit, dass die in ihnen an die Curve gelegten Tangenten die Curve auch sonst noch treffen ($\lambda = 8$, vergl. Kap. 9, § 4).

Es gibt 96 Punkte, in denen sich drei nicht unendlich nahe liegende Tangenten schneiden (dreifache Punkte der Knotencurve der Developpabelen).

Es gibt 72 Osculationsebenen, welche die gegebene Curve noch anderswo berühren.

Die Curve R_5^2 *hat keine vierfachen Secanten.*

Die Curve R_5^2 *kann man sich aus drei projectiven Büscheln entstanden denken, von denen das eine aus Flächen* 2^{ter} *Ordnung und die beiden anderen aus Ebenen bestehen; die Fläche* 2^{ter} *Ordnung, welche durch* R_5^2 *geht, wird durch die Schnitte der sich entsprechenden Ebenen der beiden Ebenenbüschel erzeugt.*

R_5^2 *kann auch definirt werden als der theilweise Schnitt zweier Flächen* 3^{ter} *Ordnung, welche ausserdem eine Raumcurve* 4^{ter} *Ordnung* 1^{ter} *Species gemeinschaftlich haben. Diese letztere Curve trifft* R_5^2 *acht mal.*

Die charakteristischen Zahlen für R_5^1 *sind:*

$$\begin{aligned} r &= 10, \\ m &= 15, \\ h &= 5, \\ g &= 70, \\ x &= 30, \\ y &= 20, \\ \alpha &= 20. \end{aligned}$$

Diese Curve lässt sich als der partielle Schnitt zweier Flächen 3^{ter} *Ordnung ansehen, welche sich ausserdem in einer Curve* 4^{ter} *Ordnung* 2^{ter} *Species treffen.*

Von jedem Punkt der Curve kann man zwei dreifache Secanten durch sie ziehen.

Es gibt 10 Tangenten der Curve, welche sie ausserdem noch anderswo schneiden.

Es existiren 30 Osculationsebenen, welche die gegebene Curve noch anderswo berühren.

Es gibt 40 Schnittpunkte von drei nicht unendlich nahen Tangenten an die gegebene Curve.

Der Ort der dreifachen Secanten von R_5^1 *ist eine Regelfläche* 5^{ter} *Ordnung.*

R_5^1 *hat keine vierfache Secante.*

Die charakteristischen Zahlen für R_5^0 sind:

$$\begin{aligned} r &= 8, \\ m &= 9, \\ h &= 6, \\ g &= 20, \\ x &= 16, \\ y &= 12, \\ \alpha &= 8. \end{aligned}$$

Durch jeden Punkt der Curve gehen drei dreifache Secanten.

Es gibt 12 Tangenten, welche die Curve noch sonstwo schneiden.

Es existiren 12 Osculationsebenen, welche die Curve auch sonst noch berühren.

Es gibt acht Punkte, in welchen sich drei nicht unendlich nahe Tangenten der Curve schneiden.

Die Curven R_5^0 unterscheiden sich in zwei Species, welche dadurch charakterisirt werden, dass die erste eine einzige vierfach schneidende Gerade enthält, während die andere deren unendlich viele besitzt, die eine Fläche 2ten Grads bilden.

Jede R_5^0 der ersten Species lässt sich als Ort des Punkts ansehen, welcher den sich entsprechenden Ebenen dreier projectiver Büschel gemeinschaftlich ist, von denen zwei doppelt und das dritte einfach involutorisch sind.

Die R_5^0 der zweiten Species kann als Ort des Punkts aufgefasst werden, in welchem sich die entsprechenden Ebenen dreier projectiver Büschel schneiden, von denen zwei einfach und das dritte dreifach involutorisch sind.

Jede R_5^0 der ersten Species ist der theilweise Schnitt zweier Flächen 3ter Ordnung, welche ausserdem noch eine Raumcurve 3ter Ordnung und eine Gerade, welche diese Raumcurve nicht schneidet, gemeinschaftlich haben; oder auch der theilweise Schnitt zweier Regelflächen 3ter Ordnung, welche ausserdem eine Doppelgerade und zwei andere Gerade gemeinschaftlich haben, von denen die eine die Doppelgerade schneidet und die andere nicht.

Die R_5^0 der zweiten Species ist der partielle Schnitt einer Fläche 2ten Grads mit einer Regelfläche 4ter Ordnung, welche eine vierfache Secante von R_5^0 zur dreifachen Geraden hat.

Die dreifachen Secanten einer R_5^0 der ersten Species bilden eine Regelfläche 8ter Ordnung, für welche R_5^0 dreifach und die vierfache Secante von R_5^0 vierfache Gerade ist.

Von dem Standpunkt der Classification der Raumcurven darf man die zweite R_5^0 nicht als Repräsentantin einer von der ersten R_5^0 verschiedenen Familie ansehen, sondern als speciellen Fall von ihr. Siehe darüber Halphen, *Journ. de l'École polyt.*, 52, p. 12.

Die Curven 5$^{\text{ter}}$ Ordnung untersuchte zuerst Cayley, *Compt. Rend.*, 54, 58, 1862, 1864; *Coll. Math. Pap.*, 5, p. 15, 24; später R. Sturm, *Synthetische Untersuchungen über Flächen 3$^{\text{ter}}$ Ordn.*, Leipzig 1867, da, wo er die Curven studirt, die auf der Fläche 3$^{\text{ter}}$ Ordnung liegen; dann folgten, bez. der R_5^0, Bertini, *Collect. math. in memoriam D. Chelini*, Mediolani, 1881; Berzolari, *Mem. Lincei*, 1893 und, bez. der R_5^1, Emil Weyr, *Wiener Berichte*, 90, 2. Abth., 1884, p. 206; 92, 2. Abth., 1885, p. 498; 97, 2. Abth., 1889, p. 592 und Montesano, *Acc. Napoli*, 1888.

Curven 6$^{\text{ter}}$ Ordnung.

Es gibt fünf Familien von Raumcurven 6$^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte charakterisirt werden. Siehe Kap. 9, § 3. *Durch jede von ihnen geht immer eine Fläche 3$^{\text{ter}}$ Ordnung.* Die wichtigste ist vom Geschlecht 4 und *der vollständige Schnitt einer Fläche 2$^{\text{ter}}$ mit einer Fläche 3$^{\text{ter}}$ Ordnung.* Diese Curve ist speciell für die Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 4 von Bedeutung; sie leistet dieser Lehre dieselben Dienste, wie die ebene Curve 4$^{\text{ter}}$ Ordnung den Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3.

Die charakteristischen Zahlen für diese Curve sind:

$$\begin{aligned} r &= 18, \\ m &= 36, \\ h &= 6, \\ g &= 531, \\ x &= 126, \\ y &= 96, \\ \alpha &= 60. \end{aligned}$$

Durch jeden ihrer Punkte gehen zwei dreifache Secanten (die beiden Geraden der Fläche 2$^{\text{ten}}$ Grads, auf welcher sie liegt).

Die Anzahl der Tangenten, die auch sonst noch schneiden, beträgt 24.

Die Anzahl der Osculationsebenen, die sonst noch berühren, ist 324.

Die Osculationsdeveloppabele hat 480 dreifache Punkte.

Die Curve besitzt 120 dreifache Tangentialebenen und kann selbstverständlich keine vierfache Secante haben.

Man hat angefangen, die Configuration der 120 dreifachen Tangentialebenen der Raumcurve 6ter Ordnung und der 360 zugehörigen Berührungspunkte zu studiren. Diese Configuration ist für das Geschlecht $p = 4$ als eine Erweiterung dessen zu betrachten, was die Configuration der 28 Doppeltangenten der ebenen Curve 4ter Ordnung für das Geschlecht $p = 3$ ist.

Die 360 Berührungspunkte der Curve 6ter Ordnung mit ihren dreifachen Tangentialebenen liegen zu je 12 auf 32130 Flächen 2ten Grads.

Diese Flächen 2ten Grads lassen sich in Paare vereinigen und es gibt acht verschiedene Arten solcher Paare; ein Paar erster Art ist durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass vier andere der Flächen 2ten Grads existiren, welche jede der beiden gegebenen Flächen in 6 *Punkten (auf der Curve 6ter Ordnung) treffen, und dass es ferner 16 andere Flächen 2ten Grads gibt, welche eine der beiden Flächen des Paars in 6 Punkten und die andere nur in drei Punkten (auf der Curve 6ter Ordnung) schneiden, während dagegen Flächen 2ten Grads, welche die entgegengesetzte Eigenschaft hätten, nicht existiren. Wie man sieht, besitzt also dieses Paar eine gewisse Asymmetrie.*

Wir begnügen uns mit diesen Hinweisen; Näheres findet man bei Pascal, *Rend. Lincei,* 1. Sem., 1893 p. 204 u. 239.

Wenn man zwei Wurzeln der Gleichung kennt, von welcher die Bestimmung der 120 dreifachen Tangentialebenen der Raumcurve 6ter Ordnung abhängt, so zerfallen die übrigen 118 in $54 + 64$ und die Gleichung der 64 hat zur Resolvente die Gleichung der 54, welche sich ihrerseits nach Auflösung einer Gleichung 27ten Grads, welche keine Resolventen niedrigeren Grads hat, in 27 quadratische Factoren zerlegen lässt.

Kennt man drei Wurzeln, so hängt das Problem noch von einer Gleichung 27ten Grads ab, welche keine Resolventen niedrigeren Grads hat. Dieses Theorem ist dem Satz über die 28 Doppeltangenten der ebenen Curve 4ter Ordnung oder der 27 Geraden der Fläche 3ter Ordnung analog. Siehe Pascal, *Rend. Lincei,* 1. Sem., 1893, p. 120.

Mit den Raumcurven 6ter Ordnung befassten sich: Clebsch, *Crelle,* 63; Baule, *Dissert. Göttingen,* 1872; Emil Weyr, *Wiener Berichte,* 99, 2. Abth., 1890, p. 932; 100, 2. Abth., 1891, p. 457; Noether, *Crelle,* 93; London, *Math. Ann.,* 45; Petot, *Compt. Rend.,* 102, etc.

Was die Curven 7^{ter} Ordnung anlangt, so verweisen wir auf Eduard Weyr, *Wien. Ber.*, 69, 2. Abth., 1874, p. 399; von der Curve 9^{ter} Ordnung, welche *der vollständige Schnitt zweier Flächen 3^{ter} Ordnung ist (d. h. die Basiscurve eines Büschels cubischer Flächen)*, geben wir hier die charakteristischen Zahlen an. Sie sind:

$$
\begin{aligned}
r &= 36, \\
m &= 81, \\
h &= 18, \\
g &= 3006, \\
x &= 576, \\
y &= 504, \\
\alpha &= 144, \\
p &= 10.
\end{aligned}
$$

Durch jeden Punkt der Curve gehen 11 dreifache Secanten.

Es gibt 144 Tangenten, die noch sonst schneiden und 2160 Osculationsebenen, die noch anderswo berühren.

Es existiren 3360 dreifache Tangentialebenen.

Die verschiedenen Degenerationen dieser Curve, des Schnittes zweier Flächen 3^{ter} Ordnung, sind sämmtlich bei R. Sturm angegeben, *Flächen 3. Ordn.*, Leipzig 1867.

§ 6. Die rationalen Raumcurven.

Die Curven *vom Geschlecht Null* heissen *rational* oder auch *unicursal*. Man hat ihre allgemeinen Eigenschaften festgestellt. Wir geben im Folgenden einige der elementarsten Sätze, die sich speciell auf ihre charakteristischen Zahlen beziehen. Selbstverständlich wird vorausgesetzt, dass die Curve keine singulären Punkte besitzt.

Die Osculationsdeveloppabele einer rationalen Raumcurve n^{ter} Ordnung ist von der Ordnung $2(n-1)$.

Es gibt $(n-1)^2$ Gerade, die zwei willkürliche Gerade treffen und die Curve in zwei Punkten schneiden.

Eine bewegliche Gerade, welche eine feste Gerade trifft und die Curve zweimal schneidet, beschreibt eine windschiefe Fläche von der Ordnung $(n-1)^2$, für welche die feste Gerade vielfach von der Ordnung $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ und die gegebene Curve vielfach von der Ordnung $n-1$ ist, und welche $2(n-1)(n-2)$ Cuspidalpunkte hat, die auf der rationalen Curve liegen.

Die rationale Curve hat offenbar

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

scheinbare Doppelpunkte.

Durch jeden ihrer Punkte gehen $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *dreifache Secanten.*

Es gibt $\frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{3\cdot 4}$ *vierfache Secanten.*

Die von den dreifachen Secanten gebildete windschiefe Fläche ist von der Ordnung

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}.$$

Die Classe der Curve ist die $3(n-2)^{\text{te}}$.

Durch jeden Punkt der Curve gehen $3(n-3)$ *in anderen Punkten osculirende Ebenen.*

Durch jeden Punkt des Raums gehen

$$2(n-2)(n-3)$$

Doppeltangentialebenen.

Durch jeden Punkt der Curve gehen

$$2(n-3)(n-4)$$

in zwei anderen Punkten berührende Ebenen.

Jede Tangente wird von $2(n-3)$ *anderen Tangenten getroffen.*

Die Curve hat $4(n-3)$ *stationäre Ebenen.*

Es gibt $6(n-3)(n-4)$ *Osculationsebenen, die auch sonst noch berühren.*

Es existiren $2(n-2)(n-3)$ *Tangenten, welche die Curve noch sonstwo schneiden.*

Die Curve hat $\frac{4(n-3)(n-4)(n-5)}{3}$ *Bitangentialebenen.*

Eine wichtige Eigenschaft der rationalen Curven betrifft die auf diesen Curven existirende sogenannte *Fundamentalinvolution*:

Die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punkts der Curve lassen sich als rationale Funktionen eines Parameters λ mittelst der Relationen

$$x_1 \equiv a_\lambda^n,$$
$$x_2 \equiv b_\lambda^n,$$
$$x_3 \equiv c_\lambda^n,$$
$$x_4 \equiv d_\lambda^n$$

ausdrücken, worin unter a_λ^n, b_λ^n, $\cdots$ in symbolischer Bezeichnung binäre Formen n^{ten} Grads verstanden werden. Man construirt nun die $n - 3$ Formen n^{ten} Grads, die zu jeder der vier gegebenen und mithin zu jeder beliebigen Form des durch diese vier Formen individualisirten Systems *apolar* sind. Siehe Kap. 2.

Das durch die $n - 3$ so gebildeten Formen individualisirte lineare System stellt dann eine Involution (siehe Kap. 2) von Gruppen von n Punkten auf der gegebenen Curve dar. Man hat also:

Auf der gegebenen rationalen Curve existirt eine Involution n^{ter} Ordnung und $(n - 4)^{\text{ter}}$ Stufe, deren Gruppen von n Punkten apolar zu allen Gruppen von n Punkten sind, die von einer beliebigen Ebene des Raums auf der Curve ausgeschnitten werden.

Diese Involution hat Stahl *fundamental* genannt.

Für $n = 4$ reducirt sich die Involution offenbar auf eine Gruppe von nur 4 Punkten. *Bei der (rationalen) gewundenen Curve 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species wird diese Gruppe von vier Punkten durch die vier Berührungspunkte der stationären Osculationsebenen gebildet* (siehe § 4). In diesem Fall treten jedoch noch andere Involutionen auf, die im Allgemeinen Study gefunden hat, wie schon in § 4 gesagt wurde.

Zum Studium der *Fundamentalinvolution* auf den rationalen Curven ist besonders Stahl zu empfehlen, *Crelle*, 104; *Math. Ann.*, 40. Andere Arbeiten über die rationalen Curven sind von Emil Weyr, *Giorn. di Batt.*, 9; *Ann. di mat.*, 4; *Crelle*, 74; *Ist. Lomb.*, 1882; *Prag. Berichte*, 1882, etc.; Korndörfer, *Math. Ann.*, 3; Brill, ib., 36; etc. Berzolari, *Ann. di mat.*, 21 dehnt einige der vorstehenden Betrachtungen auf die rationalen Curven in einem Raum von einer beliebigen Anzahl von Dimensionen aus.

Kapitel XI.

Die Flächen 3^{ter} Ordnung.

§ 1. Allgemeines. Die Flächen mit Doppelpunkten. Geometrische Erzeugung.

Die allgemeine Fläche 3^{ter} Ordnung ist von der 12^{ten} Classe. Der aus einem beliebigen Punkt des Raums beschriebene Tangentenkegel der Fläche ist im Allgemeinen von der 6^{ten} Ordnung und besitzt sechs Rückkehrkanten, aber keine eigentliche Doppelkante. Die parabolische Curve ist von der 12^{ten} Ordnung.

Die allgemeine Gleichung der allgemeinen Fläche 3^{ter} Ordnung enthält 19 nicht homogene Coefficienten.

Auf einer allgemeinen Fläche 3^{ter} Ordnung gibt es 27 Gerade.

Wenn eine Fläche 3^{ter} Ordnung eine Doppellinie hat, so kann diese nur eine einzelne Gerade sein; in diesem Fall ist jedoch die cubische Fläche eine Regelfläche.

Bei einer solchen Fläche 3^{ter} Ordnung gibt es auf der Doppelgeraden zwei uniplanare Punkte (siehe Kap. 9, § 4); *die anderen sind biplanar.*

Eine Fläche 3^{ter} Ordnung kann höchstens vier Doppelpunkte haben.

Eigentliche abwickelbare Flächen 3^{ter} Ordnung gibt es nicht, sondern nur uneigentliche, wie die Kegel und Cylinder 3^{ter} Ordnung.

Wir lassen hier eine Classification der verschiedenen Arten von Flächen 3^{ter} Ordnung mit singulären Punkten und von Regelflächen 3^{ter} Ordnung folgen. *Von diesen letzteren gibt es nur zwei Species.*

Diese Classification hat Cayley, *Phil. Trans.*, 1869 vollständig durchgeführt; die Fälle (5), (7), (11), (15), (20) waren schon vorher von Schlaefli, *Phil. Trans.*, 1863 untersucht worden. Die Regelflächen 3^{ter} Ordnung wurden noch früher von

Cremona, *Ist. Lombardo,* 1861; *Crelle,* 60 studirt. Man sehe auch eine Arbeit von Em. Weyr nach, *Geom. der räuml. Erzeugnisse,* Leipzig, 1870.

(In den folgenden Tabellen bezeichnen wir mit den Symbolen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots$ homogene Funktionen 1^{ten}, $2^{\text{ten}} \ldots$ Grads in x_1, x_2, x_3).

Laufende Nummer	Beschaffenheit der Singularität	Classe	Gleichung der Fläche
1	Ohne singuläre Punkte.	12	
2	Ein konischer Punkt.	10	$u^{(2)}x_4 + u^{(3)} = 0.$ Der conische Punkt ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$
3	Ein biplanarer Punkt.	9	$u^{(1)}v^{(1)} + u^{(3)} = 0.$ Der biplanare Punkt ist $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$
4	Zwei conische Punkte.	8	Man nehme in der Gleichung unter (2) an, $u^{(2)}, u^{(3)}$ enthalten x_3 nur im ersten Grad.
5	Ein biplanarer Punkt derart, dass der Schnitt der beiden Tangentenebenen der Fläche angehört. Er ist als die Vereinigung zweier conischer Punkte anzusehen.	8	Wird der Gleichung unter (3) die reducirte Form $x_1 x_2 x_4 + u^{(3)} = 0$ gegeben, so erhält man die Gleichung für (5), wenn man z. B. annimmt, $u^{(3)}$ enthalte $x_3{}^3$ nicht. Die Tangentenebenen sind $x_1 = 0,\ x_2 = 0.$
6	Ein conischer Punkt und ein biplanarer Punkt.	7	Die Gleichung in diesem Fall erhält man aus (4) durch die Annahme, der Coefficient von x_3 zerfalle in zwei Factoren.
7	Ein biplanarer Punkt, wie in Fall (5), aber unter der Voraussetzung, dass die Berührungsebene an die Fläche längs der	7	Eine reducirte Gleichung für diesen Fall lautet $x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3{}^2 + x_2{}^2 x_3 - a x_1{}^3 = 0.$

Laufende Nummer	Beschaffenheit der Singularität	Classe	Gleichung der Fläche
	Schnittgeraden der beiden Tangentenebenen mit einer der letzteren zusammenfalle. Diese Singularität ist als die Vereinigung eines konischen Punkts mit einem biplanaren Punkt anzusehen. Die Berührungsebene längs der Geraden schneidet die Fläche in der zweimal gezählten Geraden selbst und in einer anderen von ihr verschiedenen Geraden.		Der biplanare Punkt ist $$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$ mit den Tangentenebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; die Berührungsebene in einem Punkt der Schnittgeraden dieser Ebenen ist immer $x_1 = 0$ und schneidet die Fläche in der zweimal zu rechnenden Geraden $$x_1 = x_2 = 0$$ und in der nur einmal gezählten $$x_1 = x_3 = 0.$$
8	Drei konische Punkte.	6	In der Gleichung unter (2) nehme man an, $u^{(2)}, u^{(3)}$ enthalten x_2, x_3 nur im ersten Grad.
9	Zwei biplanare Punkte.	6	Man braucht nur anzunehmen, die Gleichung in Fall (3) enthalte x_3 nur im ersten Grad und der Coefficient von x_3 zerfalle in zwei Factoren.
10	Ein konischer Punkt und ein biplanarer Punkt von der Art, wie in Fall (5).	6	Man setze in Fall (5) voraus, $u^{(3)}$ enthalte auch x_3^2 nicht.
11	Ein biplanarer Punkt, wie in Fall (7), aber mit der neuen Eigenheit, dass die Berührungsebene längs der Geraden die Fläche in derselben dreimal gezählten Geraden schneidet. Man sagt in diesem Fall, die Gerade *osculire* die Fläche. Der Punkt ist als die Vereinigung von drei conischen Punkten anzusehen.	6	Die reducirte Gleichung lautet: $$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 - a x_1^3 = 0.$$

Laufende Nummer	Beschaffenheit der Singularität	Classe	Gleichung der Fläche
12	Ein uniplanarer Punkt.	6	$(x_1 + x_2 + x_3)^2 x_4 + + x_1 x_2 x_3 = 0.$
13	Ein gewöhnlicher biplanarer Punkt und zwei conische Punkte.	5	$x_2 x_3 x_4 + x_1^2 (x_1 + x_2 + + x_3) = 0.$
14	Ein biplanarer Punkt, wie in Fall (7), und ein conischer Punkt.	5	$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 = 0.$
15	Ein uniplanarer Punkt, aber derart, dass die Tangentenebene in ihm die Fläche längs drei Geraden schneidet, von denen zwei zusammenfallen.	5	$x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 = 0.$
16	Vier konische Punkte.	4	$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 = 0.$
17	Zwei biplanare Punkte und ein conischer Punkt.	4	$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_4^2 + x_4^3 = 0.$
18	Ein Punkt, wie in Fall (5), und zwei conische Punkte.	4	$x_1 x_2 x_4 + (x_1 + x_2) x_3^2 = 0.$
19	Ein Punkt, wie in Fall (11), und ein conischer Punkt.	4	$x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 = 0.$
20	Ein uniplanarer Punkt, aber derart, dass die Tangentenebene in ihm die Fläche längs drei zusammenfallenden Geraden schneidet.	4	$x_1^2 x_4 + x_1 x_3^2 + x_2^3 = 0.$
21	Drei biplanare Punkte.	3	Man braucht nur anzunehmen, die Gleichung im Fall (9) enthalte auch x_2 nur im ersten Grad und der Coefficient von x_2 zerfalle in zwei Factoren. In dem speciellen Fall, in welchem den drei biplanaren Punkten zu je zweien eine gemeinschaft-

Laufende Nummer	Beschaffenheit der Singularität	Classe	Gleichung der Fläche
			liche Berührungsebene entspricht, lautet die reducirte Gleichung der Fläche: $x_1^3 + x_2 x_3 x_4 = 0.$
22	Eine Doppelgerade, deren Punkte bis auf zwei uniplanare sämmtlich biplanar sind. Die Fläche ist eine Regelfläche. Sie wird von einer Geraden erzeugt, die an zwei anderen (Directricen) derart hingleitet, dass die auf ihnen entstehenden Punktreihen projectiv sind, und die eine der letzteren einfach, die andere doppelt involutorisch ist. Die zweite Directrix ist die Doppelgerade.	3	$x_3 x_1^2 - x_4 x_2^2 = 0.$ Die Doppelgerade ist $x_1 = 0,\ x_2 = 0.$ Die Directricen sind die Geraden $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ und $x_3 = 0,\ x_4 = 0.$
23	Eine Doppelgerade, in deren $\left(\begin{array}{l}\text{biplanaren}\\ \text{oder uniplanaren}\end{array}\right)$ Punkten eine Berührungsebene immer dieselbe bleibt. Diese Fläche lässt sich als Grenzfall der vorigen ansehen, wenn die beiden Directricen sich unbegrenzt einander zu nähern suchen. Ueber ihre Erzeugung siehe Salmon-Fiedler, l. c., p. 370. Man pflegt sie die *Cayley'sche Regelfläche* 3*ter* *Ordnung* zu nennen.	3	$x_2^3 + x_1(x_1 x_3 + x_2 x_4) = 0.$ Die Ebene $x_1 = 0$ berührt die Fläche in jedem Punkt der Doppelgeraden $x_1 = x_2 = 0$ und schneidet die Fläche längs der nämlichen *dreimal* gezählten Geraden. Die zweite Berührungsebene umhüllt ein Hyperboloid $x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0.$

Wir lassen hier ferner eine Tabelle der charakteristischen Zahlen für die allgemeine Fläche 3ter Ordnung und für einige der in der vorstehenden Zusammenstellung enthaltenen Flächen folgen.

Die in der ersten Zeile stehenden Zahlen beziehen sich auf die laufenden Nummern der in der vorigen Tabelle aufgeführten Flächen; über die Bedeutung der in der ersten Columne stehenden Buchstaben verweisen wir auf Kap. 9, § 1.

	Allgemeine Fläche	(2)	(3)	(4)	(6)	(8)	(9)	(12)	(13)	(16)	(17)	(21)	(22)
konische Punkte	0	1	0	2	1	3	0	0	2	4	1	0	—
biplanare Punkte	0	0	1	0	1	0	2	0	1	0	2	3	—
uniplanare Punkte	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	—
$a = a'$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4
δ	0	1	0	2	1	3	0	3	2	4	1	0	0
$\varkappa$	6	6	7	6	7	6	8	6	7	6	8	9	3
n'	12	10	9	8	7	6	6	6	5	4	4	3	3
$\varkappa'$	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	3
b'	27	15	9	7	3	3	0	3	1	3	0	0	1
k'	216	105	36	21	3	3	0	3	0	3	0	0	0
t'	45	15	6	3	0	1	0	1	0	1	0	0	0
ϱ'	27	15	9	7	3	3	0	3	1	3	0	0	1
c'	24	18	16	12	10	6	8	6	4	0	2	0	0
h'	180	96	84	38	24	6	24	7	2	0	0	0	0
r'	30	24	18	17	12	9	8	7	5	0	2	0	0
σ'	12	12	12	10	9	6	8	6	4	0	2	0	0
β'	54	30	18	13	6	3	0	3	1	0	0	0	0

Ueber die Anzahl und Configuration der auf den Flächen 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkten gelegenen Geraden siehe weiter unten § 3.

Die verschiedenen geometrischen Erzeugungsarten der Flächen 3^{ter} Ordnung sind die folgenden:

Man habe zwei Trieder A und B; jede Ebene des ersten schneidet jede Ebene des zweiten; somit erhält man im Ganzen neun Gerade; durch einen Punkt P des Raums wird eine Ebene gelegt, welche die neun Geraden in neun Punkten trifft; durch diese neun Punkte und durch P geht immer eine Curve 3^{ter} Ordnung. *Der Ort dieser Curve, wenn man die Lage der durch P gelegten Ebene auf alle mögliche Art ändert, ist eine allgemeine durch P und die neun Geraden gehende Fläche 3^{ter} Ordnung.* Steiner, *Berl. Ak.*, 1856; *Crelle*, 53.

Gegeben sind zwei projective Büschel, das eine von Flächen 2^{ter} Ordnung, das andere von Ebenen; der Ort der Schnittcurve der sich entsprechenden Elemente ist eine Fläche 3^{ter} Ordnung. (id.)

Ins Besondere:

Der Ort der Kegelschnitte, in welchen jede Fläche 2^{ter} Ordnung eines Büschels von der Polarebene eines Punkts P in Bezug auf sich selbst geschnitten wird, ist eine Fläche 3^{ter} Ordnung. (id.)

Der Ort der Punkte, welche dreien sich entsprechenden Ebenen dreier projectiver Netze von Ebenen gemeinschaftlich sind, ist eine Fläche 3^{ter} Ordnung. Grassmann, *Crelle*, 49; Schröter, *Crelle*, 62.

Der Ort des Pols einer Ebene in Bezug auf alle Flächen 2^{ten} Grads eines Netzes ist eine Fläche 3^{ter} Ordnung. Steiner.

Der Ort des Schnittpunkts dreier Polarebenen aller Punkte einer anderen Ebene in Bezug auf drei Flächen 2^{ten} Grads, die nicht demselben Büschel angehören, ist eine Fläche 3^{ter} Ordnung. (id.)

Man habe sechs Ebenenbüschel $a, b, c; a_1, b_1, c_1$ und die drei Axen der drei ersten, ebenso wie diejenigen der drei letzten, mögen sich nicht schneiden; man stelle eine projective Beziehung zwischen a und a_1, b und b_1, c und c_1 her und betrachte eine Ebene π und in ihr einen Punkt P, durch den drei Ebenen der ersten drei Büschel gehen; diesen 3 Ebenen entsprechen drei Ebenen der zweiten drei Büschel. *Der Ort des Schnittpunkts dieser letzten drei Ebenen, wenn sich P in π bewegt, ist eine Fläche 3^{ter} Ordnung.* F. August, *Dissert.*, Berlin, 1862; Rudolf Sturm, *Fläch. 3. Ordn.*, Leipzig 1867, p. 44.

Eine Fläche 3^{ter} Ordnung mit einem konischen Punkt wird auf die folgende Art erzeugt (Salmon):

Die vier Ebenen eines Tetraeders rotiren um vier Punkte, während die drei Kanten einer Seitenfläche sich in drei festen Ebenen bewegen; *der Ort des gegenüberliegenden Eckpunkts beschreibt eine cubische Fläche, für welche der Schnittpunkt der drei festen Ebenen Doppelpunkt ist.* Dieses Theorem ist ein specieller Fall des Grassmann'schen.

Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 vier Punkte einer Ebene und A_1', A_2', A_3', A_4' ihre Projectionen von einem Punkt P aus auf vier gegebene Ebenen; *der Ort des Punkts P, für welchen die vier Punkte A' in derselben Ebene liegen, ist eine cubische Fläche mit vier Doppelpunkten, welche die Eckpunkte des aus den vier gegebenen Ebenen gebildeten Tetraeders sind.* R. Sturm, l. c., p. 381.

Diese Fläche mit vier konischen Punkten (*4ter Classe*) wurde zuerst von Cayley, 1844, *Journ. de Liouville,* 9 studirt; man nennt sie desshalb wohl auch die *Cayley'sche Fläche.* Sie ist von besonderem Interesse, *weil sie die reciproke Polare der Steiner'schen Fläche ist.* Siehe Kap. 12, § 8. Sie wurde auch von Eckhardt in der weiter unten citirten Arbeit und von Anderen untersucht.

Fällt man von einem Punkt der Cayley'schen Fläche Lothe auf die vier Seitenflächen des von den Doppelpunkten bestimmten Tetraeders, so liegen die Fusspunkte dieser Lothe in einer Ebene.

Diese Eigenschaft gab Veranlassung zu einer Construction, die ein specieller Fall der oben angegebenen ist.

Beltrami kam bei dem Studium einiger stereometrischer Eigenschaften zu den folgenden einfachen Sätzen über die in Rede stehende Fläche (*Giorn. di Batt.,* 1):

Die Mittelpunkte der 28 Strecken, die durch die Centren der 8 in ein Tetraeder eingeschriebenen Kugeln bestimmt werden, liegen auf einer Fläche 3ter Ordnung, welche die sechs Kanten dieses Tetraeders vollständig enthält. Diese Fläche ist die Cayley'sche und *ihre vier konischen Punkte sind die Eckpunkte des Tetraeders.*

Die vier der Fläche 3ter Ordnung umschriebenen Kegel, deren Spitzen in den Eckpunkten des Tetraeders liegen, sind Kegel 2ter Ordnung und schneiden sich zu je zweien in sechs ebenen Kegelschnitten. Die Ebene des Schnitts der beiden Kegel, deren Spitzen in den Endpunkten einer Kante liegen, geht durch die gegenüberliegende Kante und ist der Berührungsebene an die Fläche längs dieser Kante harmonisch conjugirt in Bezug auf die beiden Seitenflächen des Tetraeders, die sich in dieser Kante schneiden. Ferner gehen die 6 Ebenen der 6 Kegelschnitte durch einen und denselben Punkt.

Von den ältesten Studien über die Fläche 3ter Ordnung sind speciell die von Cayley und Salmon, *Cambr. math. Journ.*, 4, 1849; Sylvester, ib., 6, 1851; Steiner, l. c.; Grassmann, l. c. und F. August, *Dissert.*, Berlin 1862 hervorzuheben.

Besonders wichtig waren die späteren Arbeiten von Cremona, *Crelle*, 68 und von R. Sturm, die von der Berliner Akademie 1866 prämiirt wurden. Von R. Sturm sind auch die *synthetischen Untersuchungen über Flächen 3ter Ordnung*, Leipzig 1867; ferner ist ein grosser Theil der deutschen Uebersetzung der *Teoria delle superficie* von Cremona, die Curtze, Berlin 1870 besorgt hat, diesen Flächen gewidmet.

Mit speciellen cubischen Flächen oder solchen mit singulären Punkten beschäftigten sich unter Anderen: Cayley, *Phil. Trans.*, 1869; Schläfli, ib., 1863; Clebsch, *Math. Ann.*, 4; *Gött. Nachr.*, 1872; Eckardt, *Math. Ann.*, 5, 10; Kohn, *Wien. Ber.*, 96, 1887; etc.

Die Regelflächen 3ter Ordnung studirten Cayley, *Phil. Mag.*, 1862, 1864; *Phil. Trans.*, 1864; Cremona, *Ist. Lomb.*, 1860; *Crelle*, 60; Em. Weyr, *Geom. d. räuml. Erzeugn.*, Leipzig 1870; Pittarelli, *Giorn. di Batt.*, 32.

Auch in der *Geom. d. Raumes*, 2 von Salmon-Fiedler und in der *Geom. der Lage* von Reye wird die Theorie der cubischen Flächen ausführlich behandelt.

Eine reiche Sammlung von Gypsmodellen der verschiedenen Formen der Flächen 3ter Ordnung hat der Verlag von L. Brill in Darmstadt (jetzt im Besitze von Schilling in Halle) herausgegeben; siehe seinen *Catalog math. Modelle*, Darmstadt 1892.

§ 2. Das Sylvester'sche Pentaeder. Die Hesse'sche oder Kernfläche der Fläche 3ter Ordnung.

Der Gleichung einer allgemeinen Fläche 3ter Ordnung ohne singuläre Punkte kann man die Form

$$a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + a_3 X_3^3 + a_4 X_4^3 + a_5 X_5^3 = 0$$

geben, worin $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \cdots, X_5 = 0$ *die Gleichungen von fünf Ebenen sind, die ein sogenanntes Sylvester'sches Pentaeder bilden.* Wie man weiss, besteht zwischen den fünf X immer eine homogene lineare identische Relation; man kann nun selbstverständlich immer voraussetzen, die Constanten, welche in die Gleichungen der Ebenen X eintreten, seien derart gewählt, dass die homogene lineare Relation, welche zwischen den linken

Seiten der Gleichungen der fünf Ebenen besteht, sich auf die einfache Form

$$\sum_1^5 X_i = 0$$

reducirt.

Man kann den Satz also auch so aussprechen:

Der Gleichung der cubischen Fläche lässt sich die Gestalt

$$\sum_1^5 a_i X_i^3 = 0 \quad \textit{(Pentaedergleichung)}$$

geben, wobei zwischen den X die identische Relation

$$\sum_1^5 X_i = 0 \quad \textit{besteht.}$$

Dieser sehr wichtige Satz wurde zuerst von Sylvester ohne Beweis aufgestellt, *Cambr. math. Journ.*, 6, 1851, p. 198, später von Clebsch, *Crelle,* 59 streng bewiesen; darauf folgten dann die Arbeiten von Gordan, *Math. Ann.*, 5 und Reye, *Crelle,* 78.

Die Gleichung der Hesse'schen Fläche (Kernfläche) derjenigen cubischen Fläche, deren Gleichung die vorstehende Gestalt hat, lautet:

$$\frac{1}{a_1 X_1} + \frac{1}{a_2 X_2} + \frac{1}{a_3 X_3} + \frac{1}{a_4 X_4} + \frac{1}{a_5 X_5} = 0.$$

Die Hesse'sche und Steiner'sche Fläche einer Fläche 3ter Ordnung sind identisch (siehe Kap. 9, § 5) *und von der 4ten Ordnung.*

Die Punkte der Hesse'schen Fläche entsprechen sich daher zu je zweien derart, dass die polare Fläche 2ten Grads eines Punkts der Hesse'schen Fläche in Bezug auf die cubische Fläche ein Kegel ist, dessen Spitze in einem anderen Punkt der Hesse'schen Fläche liegt.

Diese Zuordnung ist reciprok.

Die Gerade, welche zwei sich entsprechende Punkte der Hesse'schen Fläche verbindet, hat die Eigenschaft, dass die Polarebenen ihrer Punkte durch eine feste Gerade gehen, welche Doppeltangente der Hesse'schen Fläche ist, d. h. sie in zwei Punkten berührt.

Die Hesse'sche Fläche besitzt 10 Doppelpunkte und 10 Gerade; die ersten sind zu je dreien auf 10 Geraden vertheilt und diese gehen zu je dreien durch die zehn Punkte.

Diese 10 Punkte und 10 Geraden sind die Ecken und Kanten des Sylvester'schen Pentaeders in Bezug auf die gegebene Fläche 3ter Ordnung.

Die Polarfläche 2ten Grads (in Bezug auf die Fläche 3ter Ordnung) eines der 10 Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche zerfällt in zwei Ebenen, deren Schnitt auf der Hesse'schen Fläche liegt und eine der erwähnten 10 Geraden ist; die beiden Ebenen sind in Bezug auf die beiden durch diese Geraden gehenden Seitenflächen des Pentaeders harmonisch conjugirt.

Durch dieses Theorem wird eine Zuordnung zwischen den 10 Punkten und 10 Geraden hergestellt.

Der Schnitt (12ter Ordnung) der cubischen Fläche mit ihrer Hesse'schen Fläche ist für beide Flächen eine parabolische Curve. R. Sturm.

Die der Fläche 3ter Ordnung längs der parabolischen Curve umschriebene Developpabele ist auch der Hesse'schen Fläche umschrieben.

Jede Gerade der Fläche 3ter Ordnung berührt die Hesse'sche Fläche doppelt.

Die Bestimmung der 10 Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche hängt von der Auflösung einer Gleichung 10ten Grads ab, die ihrerseits wieder von der Lösung einer Gleichung 5ten Grads abhängig ist. Siehe Clebsch, *Crelle,* 49; Salmon-Fiedler, l. c., §§ 298, 299.

Ueber die Configuration der Ebenenpaare, welche die polaren Flächen 2ten Grads der 10 Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche darstellen, und der Geraden, in welchen diese Paare sich schneiden, etc. gibt es ein Clebsch'sches Theorem (l. c.), das von R. Sturm und Salmon-Fiedler reproducirt und vervollständigt wurde.

Wenn man in der Pentaedergleichung der Fläche 3ter Ordnung annimmt, alle a seien gleich 1, so ergibt sich die Gleichung

$$\sum X_i^3 = 0,$$

während zwischen den X die Relation

$$\sum X_i = 0 \quad \text{besteht.}$$

Die durch die vorstehende Gleichung dargestellte Fläche wurde von Clebsch *Diagonalfläche* genannt. *Math. Ann.*, 4.

Betrachtet man in jeder der fünf Seitenflächen des Pentaeders das durch die übrigen vier Seitenflächen bestimmte Vierseit und von diesem die drei Diagonalen, so liegen die 15 sich so *ergebenden Diagonalen auf der Clebsch'schen Fläche.* Daher kommt der Name *Diagonalfläche.*

Die Fläche hat mithin 15 Gerade, die zu je dreien 10 mal durch einen Punkt gehen und 5 mal in einer Ebene liegen.

Alle Punkte der Diagonalfläche sind hyperbolisch (siehe Kap. 9, § 1) *mit Ausnahme der 10 Eckpunkte des Pentaeders, welche der Fläche angehören und parabolische Punkte für sie sind.* Klein, *Math. Ann.*, 6.

Der reelle Theil der parabolischen Curve reducirt sich auf diese 10 isolirten Punkte allein.

Die übrigen 12 Geraden der Clebsch'schen Fläche (ausser den 15 Diagonalen) bilden eine Doppelsechs. Siehe § 3.

Eine Fläche, die zwischen der allgemeinen Fläche 3^{ter} Ordnung und der Diagonalfläche ihre Stellung hat, ist die Cayley'sche, *Phil. Mag.*, 1, 1864:

$$a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + b(X_3^3 + X_4^3 + X_5^3) = 0.$$

Sie hat drei dreifache Tangentialebenen, die durch eine Gerade gehen und drei Gerade, die durch einen Punkt gehen.

Studien über das Pentaeder hat auch Rodenberg, *Math. Ann.*, 14; *Dissert.*, Göttingen, 1874 gemacht. Sonstige Untersuchungen findet man bei Cremona und Anderen; siehe weiter unten § 3.

Als Erweiterung eines Satzes über die cubischen Plancurven lässt sich das folgende von Clebsch gefundene Theorem ansehen, *Crelle*, 63:

Die Polarebene eines Punktes P einer Fläche 3^{ter} Ordnung in Bezug auf ihre Hesse'sche Fläche schneidet die in P die cubische Fläche berührende Ebene in einer Geraden, welche die Inflexionsgerade des Schnitts dieser Ebene mit der Fläche 3^{ter} Ordnung ist.

Die Enveloppe der Ebenen, welche die cubische Fläche in harmonischen Curven 3^{ter} Ordnung) schneiden, ist eine Fläche 6^{ter} Classe, und die Enveloppe der Ebenen, welche sie in äqui-*

*) Unter *harmonischen Curven 3^{ter} Ordnung* versteht man diejenigen, für welche das anharmonische Verhältniss (d. h., das constante anharmonische Verhältniss der vier Tangenten, die sich von einem beliebigen Punkt der Curve 3^{ter} Ordnung an diese Curve ziehen lassen), vergl. Kap. 7, § 1, gleich -1 ist. Ebenso sind *äquianharmonische Curven 3^{ter} Ordnung* diejenigen, bei welchen dieses Verhältniss den Werth $-\varepsilon$ (der Cubikwurzel aus -1) hat. Siehe auch Kap. 7, § 3.

anharmonischen Curven 3^{ter} Ordnung treffen, eine Fläche 4^{ter} Classe. Diese beiden Flächen sind in die Developpabelen der stationären Ebenen eingeschrieben, d. h. in die der Fläche 3^{ter} Ordnung längs der parabolischen Curve umschriebene Developpabele.

Unter den Ebenen, welche die cubische Fläche in äquianharmonischen Curven 3^{ter} Ordnung schneiden, gibt es 10, die durch einen Doppelpunkt der Hesse'schen Fläche und durch die ihm entsprechende Gerade gehen.

Ueber andere Eigenschaften der Hesse'schen Fläche der Fläche 3^{ter} Ordnung siehe speciell Cremona und R. Sturm, l. c. Die Hesse'sche Fläche der Hesse'schen Fläche einer Fläche 3. O. behandelt G. Bauer, *Abh. der Münch. Akad.*, 1883.

§ 3. Die Geraden der Fläche 3^{ter} Ordnung. Die dreifachen Tangentialebenen. Die Polsechsflache Cremona's.

Wie wir schon gesagt haben, *besitzt eine allgemeine Fläche 3^{ter} Ordnung 27 Gerade.*

Jede Ebene, welche durch eine dieser Geraden geht, ist eine Doppeltangentialebene der Fläche; ihre Berührungspunkte sind die beiden Punkte, in denen die Gerade den Kegelschnitt schneidet, welcher der Restschnitt der Ebene mit der Fläche ist.

In jedem dieser Ebenenbüschel gibt es 5 Ebenen, für welche ein solcher Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt; diese Ebenen sind dann dreifache Tangentialebenen der Fläche; die Anzahl der letzteren beträgt daher $\frac{5 \cdot 27}{3} = 45$.

Durch jede Gerade gehen 5 der 45 dreifachen Tangentialebenen und jede dreimal berührende Ebene geht selbstverständlich durch drei Gerade.

Jede Gerade der Fläche berührt die parabolische Curve der Fläche in zwei Punkten.

Die Punkte, in denen die durch eine feste Gerade der Fläche gehenden Doppeltangentialebenen die Fläche berühren, bilden auf der Geraden eine Involution, deren Doppelpunkte die beiden Punkte sind, in welchen die Gerade die parabolische Curve berührt.

Aus einem der vorstehenden Theoreme folgt auch:

Jede Gerade schneidet 10 andere Gerade der Fläche und die übrigen 16 nicht. Es gibt 135 Schnittpunkte der Geraden der Fläche.

Zwei Gerade a, b, welche sich nicht treffen, werden von denselben fünf Geraden geschnitten; von den übrigen 20 gibt es fünf, *welche nur a, und fünf, welche nur b, und zehn, welche weder a noch b treffen.*

Es existiren 216 windschiefe Geradenpaare (welche sich nicht treffen).

Drei Gerade, welche sich nicht schneiden, werden von drei anderen Geraden getroffen, die einander ebenfalls nicht schneiden und es gibt sechs weitere Gerade, die keine der drei gegebenen Geraden treffen.

Die drei windschiefen Geraden und die anderen drei windschiefen, welche die ersteren schneiden, bilden eine sogenannte *Doppeldrei* (Sturm).

Es gibt 360 Doppeldreie.

Vier Gerade, die sich nicht schneiden, werden von zwei Geraden getroffen und von drei anderen nicht getroffen.

Es gibt zwei Arten von Systemen von fünf Geraden, die sich nicht schneiden (windschiefe Quintupel), die Quintupel erster Art werden dadurch charakterisirt, dass eine sechste Gerade existirt, welche keine der Geraden des Quintupels schneidet; für die der zweiten Art gibt es dagegen eine solche sechste Gerade nicht. Es existiren 432 Quintupel 1ter Art und 216 2ter Art.

Es gibt 72 windschiefe Sextupel d. h. Systeme von sechs Geraden, welche sich zu je zweien nicht schneiden; windschiefe Systeme von mehr als sechs Geraden existiren nicht.

Die 72 windschiefen Sextupel lassen sich in Paare vereinigen, welche die Eigenschaft besitzen, dass, wenn

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ a_5, \ a_6;$$
$$b_1, \ b_2, \ b_3, \ b_4, \ b_5, \ b_6$$

die Geraden der beiden Sextupel bezeichnen, jede Gerade a_i die Gerade b_i nicht trifft, dagegen jede andere Gerade b trifft und umgekehrt. Ein solches Paar hat Schläfli eine *Doppelsechs* genannt. *Es gibt mithin 36 Doppelsechse.*

Zwei Doppelsechse haben 4 oder 6 Gerade gemeinschaftlich.

Zwei dreifache Tangentialebenen, welche keine Geraden der Fläche gemeinsam haben, bestimmen eine dritte Ebene, welche mit ihnen in demselben Verhältniss steht derart, dass die 9 in den drei Ebenen enthaltenen Geraden sich noch auf eine andere einzige Art in drei anderen Ebenen vereinigen lassen; von diesen beiden Tripeln von Ebenen sagt man, sie bilden *ein Paar conjugirter* (Steiner'scher) *Trieder.*

Es gibt 120 Paare conjugirter Trieder.

Die 15 Geraden, welche von den 27 übrig bleiben, wenn man die 12 Geraden einer Doppelsechs wegnimmt, liegen zu je dreien in 15 Ebenen, welche zu je sechs 10 Paare conjugirter Trieder bilden.

Es leuchtet ein, dass zwei conjugirte Trieder, da sie sich in neun Geraden der Fläche schneiden und jedes von ihnen eine degenerirte Fläche 3^{ter} Ordnung darstellt, einen Büschel cubischer Flächen bestimmen, denen die gegebene angehört.

Wenn

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0;$$
$$A' = 0,\ B' = 0,\ C' = 0$$

die Gleichungen der Ebenen zweier conjugirter Trieder sind, so hat die Gleichung der Fläche den Typus

$$ABC + kA'B'C' = 0.$$

Jedem Paar conjugirter Trieder entsprechen zwei andere derart, dass der Complex der drei Paare alle 27 Geraden der Fläche enthält. Es gibt 40 solche Complexe von drei Paaren conjugirter Trieder.

Die geometrische Construction der 27 Geraden der Fläche wird auf die folgende Art (Salmon, Sturm) ausgeführt:

Man nimmt vier Gerade b_3, b_4, b_5, b_6 an, welche sich nicht schneiden und nicht demselben Hyperboloid angehören, zieht die beiden Geraden a_1, a_2, die sich nicht treffen, dagegen die vier ersteren schneiden; b_2 sei eine Gerade, welche nur a_1 und nicht a_2 trifft und mit keiner Gruppe von drei unter den vier b gewählten Geraden auf demselben Hyperboloid liegt; b_1 ferner sei eine ähnliche andere Gerade, die aber nur a_2 und nicht a_1 schneidet. Auf a_1 wählt man nun vier Punkte willkürlich und drei Punkte auf jeder der fünf Geraden b_2, b_3, b_4, b_5, b_6. *Die Fläche 3^{ter} Ordnung, welche durch diese 19 Punkte geht, enthält alle construirten Geraden a, b, sie enthält ferner auch die Gerade a_3, die mit a_1 das Paar von Geraden bildet, welche das Quadrupel b_2, b_4, b_5, b_6 schneiden, und die überdies mit a_2 das Paar von Geraden bildet, welche das Quadrupel b_1, b_4, b_5, b_6 schneiden. Construirt man auf ähnliche Art die Geraden a_4, a_5, a_6, welche bez. die Geraden der Quadrupel*

$$b_2, b_3, b_5, b_6;\ b_2, b_3, b_4, b_6;\ b_2, b_3, b_4, b_5$$

treffen, so ergeben sich im Ganzen 12 auf der Fläche 3^{ter} Ordnung liegende Gerade, welche eine Doppelsechs bilden.

Die übrigen 15 Geraden erhält man als die 15 Schnittlinien der Ebenen

$$(a_i b_j) \quad \textit{und} \quad (a_j b_i),$$

(wobei i und j von einander verschieden sind).

Die Substitutionengruppe der 27 Geraden der Fläche 3^{ter} *Ordnung ist von der Ordnung* 6!72.

Die Bestimmung dieser 27 Geraden hängt von der Auflösung einer Gleichung ab, welche keine Resolventen niedrigeren Grads hat; kennt man jedoch eine der Wurzeln dieser Gleichung, d. h. eine der 27 Geraden, so trennen sich die übrigen Wurzeln in 10 + 16 und die Gleichung der zweiten 16 hat zur Resolvente die Gleichung der ersten 10, welche ihrerseits durch die Auflösung einer allgemeinen Gleichung 5^{ten} *Grads in fünf quadratische Factoren zerfällt.*

Kennt man noch eine Wurzel von den 16, d. h. sind im Ganzen zwei Gerade bekannt, die sich nicht schneiden, so hängt die Kenntniss der übrigen wieder von einer allgemeinen Gleichung 5^{ten} *Grads ab* (Jordan).

Die Gleichung der 27 Geraden wurde studirt von: Clebsch, *Gött. Abh.*, 14, 1868, 1869; Jordan, *Traité des Substit.*, Paris 1870, p. 310, 368; Sylvester, *Proc. London math. Soc.*, 2, p. 155; Klein, *Journ. de Liouville*, 4, 1887, p. 169; Burkhardt, *Gött. Nachr.*, 1892.

Wir wollen nun dazu übergehen, eine gewisse von Cremona, *Math. Ann.*, 13 gefundene Beziehung zwischen den windschiefen Doppelsechsen und dem Sylvester'schen Pentaeder darzulegen. Wir denken uns, der Gleichung der Fläche 3^{ter} Ordnung sei die Form

$$Y_1^3 + Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3 + Y_5^3 + Y_6^3 = 0$$

gegeben, worin die $Y_i = 0$ sechs Ebenen darstellen und es sei

$$\sum Y_i = 0.$$

Man kann zeigen, dass sich die Gleichung der Fläche alsdann in die Form

$$(Y_2 + Y_3)(Y_3 + Y_1)(Y_1 + Y_2) + (Y_5 + Y_6)(Y_6 + Y_4)(Y_4 + Y_5) = 0$$

bringen lässt und selbstverständlich auch in alle anderen dieser Form analogen, die aus ihr durch beliebige Vertauschung der

Indices abgeleitet werden können. Man erhält daher so viele Gleichungen, als es Arten gibt, sechs Elemente in zwei Gruppen von je 3 Elementen zu vertheilen, d. h. also 10.

Die 15 Ebenen $Y_i + Y_j = 0$ sind dreifache Tangentialebenen der Fläche und sind zu je sechsen die Ebenen zweier bez. derselben Fläche conjugirter Trieder.

Die sechs Ebenen $Y_i = 0$ bilden ein sogenanntes *Polsechsflach* oder *polares Hexaeder* (Cremona).

Die 10 Paare der gegenüberliegenden Ecken des Polsechsflachs; d. h. z. B. die Punkte

$$Y_1 = 0,\ Y_2 = 0,\ Y_3 = 0 \quad \textit{und} \quad Y_4 = 0,\ Y_5 = 0,\ Y_6 = 0$$

sind Paare sich auf der Hesse'schen Kernfläche (vergl. § 2) *entsprechender Punkte.* Daher führt das Hexaeder den Namen *polar*; denn die correspondirenden Punkte der Kernfläche sind derart, dass der Polarkegel des einen Punkts in Bezug auf die Fläche 3ter Ordnung seine Spitze in dem anderen Punkt hat.

Die gegenüberliegenden Ecken des Polsechsflachs sind auch die Ecken zweier conjugirter, aus den dreifachen Tangentialebenen der Fläche 3ter Ordnung gebildeter Trieder.

Offenbar schneiden sich die drei dreifachen Tangentialebenen

$$\begin{aligned} Y_h + Y_k &= 0, \\ Y_i + Y_j &= 0, \\ Y_l + Y_m &= 0, \end{aligned}$$

worin h, k, i, j, l, m eine Permutation der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ darstellen, *in derselben Geraden der Fläche.* Daraus folgt:

Die 15 dreifachen Tangentialebenen $Y_i + Y_j = 0$ gehen durch 15 Gerade der Fläche. Mithin:

Die übrigen 12 Geraden der Fläche bilden eine Doppelsechs (siehe oben); daraus ergibt sich, *dass jedem Polsechsflach eine Doppelsechs entspricht und umgekehrt.*

Es gibt 36 Polsechsflache.

Bemerkenswerth ist das folgende Theorem:

Zwei Polsechsflache bestimmen zwei ihnen eingeschriebene developpabele Flächen 3ter Classe; diese letzteren haben fünf Tangentialebenen gemeinschaftlich, welche ein Sylvester'sches Pentaeder bilden.

Weitere Untersuchungen über die Beziehungen zwischen dem Pentaeder und den Hexaedern findet man bei Beltrami, *Rend. Ist. Lomb.*, 1879 und Franz Meyer, *Apolarität*, etc., Tübingen 1883.

Jede Fläche 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt enthält 6 durch diesen Doppelpunkt gehende Gerade und 15 andere Gerade; jede der ersten 6 ist als die Vereinigung von zwei Geraden anzusehen; mithin gibt es auch 15 dreifach berührende, durch den Doppelpunkt gehende Ebenen und 15 andere Ebenen, welche durch die übrigen 15 Geraden gehen.

Die Configuration dieser letzten 15 Ebenen und 15 Geraden ist der Configuration der 15 Geraden (und der von ihnen gebildeten Ebenen) ähnlich, welche übrig bleiben, wenn man von den 27 Geraden die 12 einer Doppelsechs hinwegnimmt.

Mit dieser Configuration in Verbindung mit den Configurationen der Pascal'schen Sechsecke (siehe Kap. 3, § 2) hat sich Cremona, *Mem. Lincei,* 1876, 1877 beschäftigt.

Die Fläche 3ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten besitzt eine Gerade, welche die beiden Doppelpunkte verbindet, 8 Gerade, die durch einen von ihnen gehen, und 7 andere Gerade.

Jede Fläche 3ter Ordnung mit drei Doppelpunkten enthält drei Gerade, welche die drei Doppelpunkte zu je zweien verbinden, 6 durch einen von ihnen gehende Gerade und drei andere Gerade.

Jede cubische Fläche mit 4 Doppelpunkten enthält 6 Gerade, die durch zwei von ihnen gehen und drei andere Gerade, die durch keinen der Doppelpunkte gehen.

Mit den Geraden der Fläche 3ter Ordnung haben sich zuerst Cayley und Salmon, *Cambr. math. Journ.*, 4 und Steiner, *Crelle,* 53 beschäftigt. Auf sie folgten: Schläfli, *Quart. Journ.*, 2; R. Sturm, *Flächen 3ter Ordn.*, Leipzig 1867; *Math. Ann.*, 23 und Affolter, *Grunert's Archiv,* 56, welche speciell die *windschiefen Systeme* von Geraden studirten, dann Schröter, *Crelle,* 62 und Cremona, *Ist. Lomb.*, 1870, 1871; *Crelle,* 68.

Neuere Arbeiten über die Configuration der Geraden und der Ebenen, wie über die Polyeder, die sich aus ihnen bilden lassen, sind von Bertini, *Ann. di mat.*, 12; Pascal, *Ann. di mat.*, 20, 21; *Ist. Lomb.*, 1892, 1893.

Die sogenannte *Schlaefli'sche Bezeichnung* für die 27 Geraden ist die folgende:

Die Symbole

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6;$$
$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$$

werden für die Geraden einer Doppelsechs benutzt, wobei jede Gerade a_i, wie man weiss, keine andere a, dagegen alle b mit Ausnahme von b_i trifft.

Bezeichnet man ferner mit c_{ij} die Schnittgerade der Ebenen

$$a_i b_j, \; a_j b_i,$$

so sind diese c_{ij} die übrigen 15 Geraden. Zwei Gerade c, die einen Index gemeinschaftlich haben, *schneiden sich nicht*; zwei c, die keinen Index gemeinschaftlich haben, *schneiden sich*; jede Gerade a (oder b) schneidet eine c, wenn der Index von a bez. b einer der beiden Indices von c ist.

Eine andere Darstellung der 27 Geraden, die man im Wesentlichen auch aus der vorstehenden ableiten kann, besteht darin, sie einzeln den Geraden entsprechen zu lassen, welche zu je zweien acht Fundamentalpunkte $1, 2, \ldots, 8$ verbinden, wenn man von diesen Verbindungslinien eine, z. B. (12), weglässt. Man betrachtet dann zwei Gerade als sich schneidend oder nicht, je nachdem sie in Verbindung mit (12) ein Theil zweier Fundamentalfiguren (*Quadrupel, quaterne-zero*) sein können oder nicht, die entweder aus vier Geraden wie (12), (34), (56), (78) oder aus vier anderen wie (12), (23), (34), (41) bestehen.

Man beachte, dass die Configuration der Geraden einer Fläche mit Doppelpunkten studirt werden kann, indem man zwei der Punkte dieser Figur sich einander nähern lässt, so dass gewissermassen auch diese Figur Doppelpunkte erhält.

Um ferner die Configuration der reellen einer reellen Fläche angehörigen Geraden zu untersuchen, genügt es, in derselben Figur zwei der Punkte oder vier etc. als conjugirt imaginär vorauszusetzen und daraus die nöthigen Consequenzen zu ziehen. Vergl. § 4.

Das Studium der Configuration der 27 Geraden mittelst dieser Figur ist verwandt mit dem der 28 Doppeltangenten der Plancurve 4ter Ordnung. Siehe darüber auch Geiser, *Math. Ann.*, 1.

§ 4. Classification der reellen allgemeinen Flächen 3ter Ordnung.

Die reellen Flächen 3ter Ordnung ohne Doppelpunkte lassen sich in Bezug auf die Realität oder Nichtrealität der auf ihnen gelegenen Geraden classificiren.

Man erhält fünf Arten solcher Flächen, nämlich:

a) Alle Geraden sind reell; auch die dreifach berührenden Ebenen sind dann sämmtlich reell; das Pentaeder ist reell.

b) 15 Gerade und 15 Ebenen, die zu je dreien durch eine reelle Gerade gehen, sind reell. Diese 15 Geraden sind diejenigen, die übrig bleiben, wenn man von den 27 Geraden die 12 einer Doppelsechs hinwegnimmt.

c) 7 Gerade und 5 Ebenen sind reell und die 5 Ebenen gehen sämmtlich durch dieselbe reelle Gerade. Vier andere Gerade sind imaginär, jede von ihnen geht aber durch einen reellen Punkt. Solche Gerade heissen *punktirt* (nach August, *Dissert.*, Berlin 1862; auch R. Sturm, *Fläch. 3. O.*, p. 242 gebraucht diesen Ausdruck).

d) 3 Gerade und 7 Ebenen sind reell; die drei Geraden liegen in derselben Ebene; durch jede von ihnen gehen ausser dieser Ebene noch andere 2 reelle Ebenen. Zwölf Gerade sind imaginär und punktirt.

e) 3 Gerade und 13 Ebenen sind reell; die drei Geraden liegen in derselben Ebene; durch jede von ihnen gehen ausser dieser Ebene noch 4 andere reelle Ebenen. Die übrigen 24 Geraden sind punktirt.

Diese Classification rührt von Schläfli her, *Quart. Journ.*, 2, p. 55 und 110; *Phil. Trans.*, 153, p. 193, der auch die Flächen mit singulären Punkten studirte. Mit demselben Gegenstand befassten sich auch Cremona; R. Sturm, l. c.; Klein, *Math. Ann.*, 6 und Schläfli, *Ann. di mat.*, 5. Analytisch wurde die Classification auch von August, l. c. durchgeführt.

In Zusammenhang mit den Betrachtungen in diesem Paragraphen steht das Studium der Eigenschaften der Lage und der Form der cubischen Flächen der verschiedenen Arten. Zeuthen, *Math. Ann.*, 8 benutzte den Satz, dass der Umfang einer Fläche 3ter Ordnung, die von einem ihrer Punkte auf eine Ebene projicirt wird, eine Curve 4ter Ordnung ist, um eine Art stereographischer Projection der Fläche auf eine Doppelebene, d. h. auf zwei superponirte längs des Umfangs der Curve 4ter Ordnung vereinigte Ebenen, auszuführen und auf diese Art die Lage der verschiedenen reellen Schalen der cubischen Flächen zu untersuchen. Siehe auch seinen Aufsatz in den *Math. Ann.*, 7, p. 428 u. ff.

§ 5. Ebene Abbildungen der Flächen 3^{ter} Ordnung.

Es lassen sich verschiedene ebene Abbildungen der cubischen Fläche denken.

Man stelle sich eine projective (ein-eindeutige) Zuordnung zwischen drei linearen Systemen 3^{ter} Stufe von Ebenen und dem Punktesystem des gewöhnlichen Raums derart vor, dass jeder Ebene eines Systems eine Ebene in jedem der beiden anderen und auch ein Punkt P des Raums entspricht und umgekehrt jedem Punkt P des Raums drei Ebenen, in jedem der 3 Systeme eine, entsprechen; *wenn P eine Ebene E beschreibt, so beschreiben die entsprechenden Ebenen drei Netze und ihr Schnittpunkt eine allgemeine Fläche 3^{ter} Ordnung* (Grassmann, siehe § 1), *deren Punkte also auf diese Art auf der Ebene E abgebildet werden.*

Alle cubischen Flächen, welche in der vorstehenden Weise allen Ebenen des Raums entsprechen, gehen durch eine und dieselbe Raumcurve 6^{ter} Ordnung; den Punkten dieser Curve entsprechen in der Bildebene nicht Punkte, sondern Gerade.

Die sechs Punkte, in denen die Curve 6^{ter} Ordnung die Bildebene schneidet, entsprechen 6 Geraden $(a_1, \ldots, a_6)$ der Fläche 3^{ter} Ordnung; sie wurden von Cremona, *Fundamentalpunkte* der ebenen Abbildung der Fläche S_3 genannt, und mit den Ziffern $1, 2, \ldots, 6$ bezeichnet.

Die 6 Kegelschnitte, welche durch fünf der Fundamentalpunkte gehen, entsprechen anderen sechs Geraden $(b_1, \ldots, b_6)$ der cubischen Fläche, und die 15 Geraden, welche die 6 Fundamentalpunkte zu je zweien verbinden, entsprechen den übrigen 15 Geraden von S_3, (c_{rs}).

Die Geraden $(b_1, \ldots, b_6)$, welche den 6 Kegelschnitten zugeordnet sind, und die Geraden $(a_1, \ldots, a_6)$, welche den 6 Punkten entsprechen, bilden eine Schläfli'sche Doppelsechs.

Einer ebenen auf S_3 liegenden Curve 3^{ter} Ordnung ist in der Ebene eine durch die sechs Fundamentalpunkte gehende Curve 3^{ter} Ordnung zugeordnet.

Dem Kegelschnitt, welcher in einer durch eine Gerade a gehenden Ebene enthalten ist, entspricht eine durch die 6 Fundamentalpunkte gehende Curve 3^{ter} Ordnung, die einen von diesen Punkten zum Doppelpunkt hat.

Dem Kegelschnitt, welcher in einer durch eine Gerade b gehenden Ebene liegt, ist eine durch einen Fundamentalpunkt gehende Gerade zugeordnet.

Dem Kegelschnitt, der in einer durch eine Gerade c_{rs} *gehenden Ebene gelegen ist, entspricht ein durch vier Fundamentalpunkte mit Ausnahme von r und s gehender Kegelschnitt.*

Der gewundenen Curve von der Ordnung $3n$, *welche der Schnitt von* S_3 *mit einer Fläche* n^{ter} *Ordnung ist, entspricht eine n mal durch jeden Fundamentalpunkt gehende ebene Curve.*

Einer Geraden der Ebene ist auf S_3 *ein Kegelschnitt oder eine Raumcurve* 3^{ter} *Ordnung zugeordnet, je nachdem die Gerade durch einen Fundamentalpunkt geht oder nicht.*

Einem Kegelschnitt der Ebene entspricht auf S_3 *eine Raumcurve vom Geschlecht* 0 *und der Ordnung* 4, 5 *oder* 6, *je nachdem der Kegelschnitt durch* 2, 1 *oder* 0 *Fundamentalpunkte geht.*

Diese Abbildung rührt von Clebsch, *Crelle,* 65 und Cremona, l. c. her. Eine andere ebene Abbildung der cubischen Fläche hat Clebsch, *Math. Ann.,* 1 mitgetheilt; es ist dieselbe, von der am Ende des § 7, Kap. 9 die Rede war. Siehe auch Cayley, *London math. Soc.,* 3.

Kapitel XII.

Die Flächen 4ter Ordnung.

§ 1. Allgemeines. Flächen mit Doppelpunkten und Doppellinien.

Die allgemeine Fläche 4ter Ordnung ist von der 36ten Classe; die Ordnung des ihr umschriebenen Kegels, dessen Spitze in einem beliebigen Punkt des Raums liegt, ist die 12te; es gibt 24 Rückkehrerzeugende dieses Kegels; zwölf von ihnen sind doppelt.

Die Ordnung der parabolischen Curve ist die 32te.

Die allgemeine Gleichung der Fläche 4ter Ordnung hängt von 34 nicht homogenen Coefficienten ab.

Die Fläche 4ter Ordnung kann nicht mehr als 16 Doppelpunkte haben.

Die Fläche kann, ohne eine Regelfläche zu sein, eine Doppelgerade, einen Doppelkegelschnitt, einen Cuspidalkegelschnitt (vergl. Kap. 9, § 4) *und drei Doppelgerade besitzen, die sich in einem Punkt schneiden und nicht in derselben Ebene liegen.*

Eine Fläche 4ter Ordnung, welche zur Doppellinie eine nicht ebene Linie hat (die aber nicht die Gesammtheit von drei nicht in einer Ebene liegenden und sich in einem Punkt treffenden Geraden sein darf), ist immer eine Regelfläche.

Die höchste Singularität, die eine Fläche 4ter Ordnung haben kann, ist eine dreifache Gerade; die Fläche ist dann nothwendigerweise eine Regelfläche.

Wenn die Fläche 16 Doppelpunkte hat, so ist der ihr umschriebene Kegel, dessen Spitze in einem der Doppelpunkte liegt, von der 6ten Ordnung und zerfällt in 6 Ebenen.

Die allgemeinen Flächen 4ter Ordnung sind noch nicht so eingehend untersucht worden, wie die entsprechenden cubischen Flächen. Man hat sich mehr mit den speciellen Flächen 4ter Ordnung, die durch die Eigenschaft charakterisirt sind, dass sie Doppelpunkte oder Doppellinien enthalten, und mit den Regelflächen 4ter Ordnung beschäftigt.

Am bemerkenswerthesten von den bis jetzt studirten Flächen 4ter Ordnung sind die folgenden:

Die Kummer'sche Fläche, welche 16 Doppelpunkte enthält, die eine merkwürdige Configuration bilden; ferner eine andere Gattung von Flächen, die auch zuerst von Kummer untersucht wurden, und die durch die Eigenschaft ausgezeichnet sind, unendlich viele Kegelschnitte zu besitzen; unter ihnen sind hervorzuheben: die Fläche 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt und die Römerfläche Steiner's; schliesslich die Regelflächen, von denen Cremona und Clebsch eine vollständige Classification gegeben haben.

In den folgenden Paragraphen werden wir diese verschiedenen Flächen, jede für sich, behandeln.

Wir geben zunächst hier eine Tabelle der charakteristischen Zahlen der allgemeinen Fläche 4ter Ordnung, der Flächen mit Doppelkegelschnitten, mit Cuspidalkegelschnitten und mit 12 Doppel- oder Knotenpunkten. Vergl. Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. d. Raumes,* 2, §§ 512—516.

	Allgemeine Fläche 4ter Ordnung	Fläche mit 12 Knotenpunkten	Fläche mit Doppelkegelschnitt	Fläche mit Cuspidalkegelschnitt
$a = a'$	12	12	8	6
δ	12	24	4	0
$\varkappa$	24	24	12	8
n'	36	12	12	6
$\varkappa'$	24	24	12	8
b'	480	24	26	0
k'	102400	196	320	0
t'	3200	0	40	0
ϱ'	320	32	36	0
c'	96	24	24	8
h'	4016	200	180	24
r'	128	56	36	8
σ'	32	32	16	8
β'	320	32	52	0

§ 2. Die Flächen 4^{ter} Ordnung mit Doppelpunkten.

Die Existenz eines Doppelpunktes ist für eine Fläche 4^{ter} Ordnung vier einfachen Bedingungen gleichwerthig; es könnte daher, weil eine solche Fläche von 34 Coefficienten abhängt, scheinen, als ob sie höchstens acht *willkürlich festgesetzte* Doppelpunkte enthalten könnte; man erkennt aber, dass dieses nicht möglich ist, und *dass, wenn eine Fläche 4^{ter} Ordnung nicht degenerirt ist und acht Doppelpunkte besitzt, diese in einer speciellen Configuration zu einander stehen müssen und dass nur sieben von ihnen willkürlich sind.* Cayley, *Proc. Lond. math. Soc.*, 3 = *Coll. math. papers*, 7, p. 133; ferner 7, p. 256 und 7, p. 264.

Von den Flächen 4^{ter} Ordnung mit Doppelpunkten ist, wie wir schon gesagt haben, die Kummer'sche Fläche mit 16 solchen Punkten von besonderer Bedeutung; Cayley, l. c., hat auch die Flächen mit einer geringeren Anzahl von Doppelpunkten studirt, während Kummer schon vorher auf die mit 11, 12, 13, 14, 15 Doppelpunkten bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Strahlensysteme oder Congruenzen 2^{ter} Ordnung (vergl. Kap. 14) aufmerksam gemacht hatte, *Berl. Abh.*, 1866. Die Untersuchung der von Kummer behandelten Flächengattungen ist dann von Cayley l. c. wieder aufgenommen worden.

Um die Gleichung einer Fläche 4^{ter} Ordnung mit 4 gegebenen Doppelpunkten zu erhalten, legt man 6 Flächen 2^{ter} Ordnung $X_1 = 0, \ldots, X_6 = 0$ durch diese Doppelpunkte; *eine homogene Function 2^{ten} Grads der X, gleich Null gesetzt, stellt dann eine Fläche 4^{ter} Ordnung der verlangten Art dar. Sie enthält 18 unabhängige Constante.*

Beträgt die Anzahl der gegebenen Punkte 5, so legt man fünf Flächen 2^{ter} Ordnung $X_i = 0$ durch diese Punkte; *eine Form, die in den X vom 2^{ten} Grad ist, gleich Null gesetzt, wird dann die Fläche 4^{ter} Ordnung mit den fünf Doppelpunkten darstellen; sie hat 14 Constanten.*

Wenn sechs Punkte gegeben sind, *so lautet die Gleichung der allgemeinen Fläche 4^{ter} Ordnung, welche diese sechs Punkte zu Doppelpunkten hat:*

$$(X_1, X_2, X_3, X_4)^2 + \lambda J(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0;$$

sie enthält genau 10 Constante; die $X_i = 0$ sind die Gleichungen von vier durch die gegebenen sechs Punkte gehenden Flächen 2^{ter} Ordnung; $(X_1, X_2, X_3, X_4)^2$ stellt eine Form 2^{ten}

Grads in den X dar und J die Jacobische Fläche des Systems der vier Flächen 2^{ter} Ordnung.

Von den Flächen mit sechs Doppelpunkten ist diejenige besonders bemerkenswerth, deren Gleichung

$$J(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$$

lautet, die also die Jacobi'sche Fläche des Systems der vier Flächen 2^{ter} Ordnung ist.

Sie wird die Weddle'sche Fläche genannt, weil sie dieser Autor zuerst untersucht hat, *Cambr. Journ.*, 5, 1850, *und ist der Ort der Spitzen der Kegel 2^{ter} Ordnung, welche durch sechs Punkte des Raums gehen.*

Die Weddle'sche Fläche enthält 25 Gerade, welche die sechs Punkte zu je zweien verbinden, und die 10 Geraden, in welchen die durch drei der Punkte gehende Ebene die Ebene schneidet, welche durch die drei übrigen Punkte gelegt wird.

Der Berührungskegel, dessen Spitze in einem Doppelpunkt liegt, schneidet die Fläche in den fünf Geraden, welche diesen Punkt mit den übrigen fünf verbinden und in der Raumcurve 3^{ter} Ordnung, welche durch die sechs Punkte des Raums individualisirt wird.

Die Weddle'sche Fläche wurde auch von Cayley, *Compt. Rend.*, 52, 1861; Hierholzer, *Math. Ann.*, 2, 4; Hunyady, *Crelle,* 92; Caspary, *Compt. Rend.*, 1891; etc. studirt. *Sie ist eine Fläche, deren Punkte Coordinaten haben, die sich durch hyperelliptische Funktionen zweier Parameter ausdrücken lassen.*

Cayley, *Proc. Lond. math. Soc.*, 4 untersuchte auch andere Flächen, deren geometrische Definition analog ist, die aber nicht mehr von der 4^{ten} Ordnung sind.

Um die allgemeinste Gleichung der Fläche 4^{ter} Ordnung mit 7 Doppelpunkten aufzustellen, legt man drei Flächen 2^{ter} Ordnung $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ durch diese Doppelpunkte, bestimmt dann eine Fläche 3^{ter} Ordnung $Y = 0$, welche durch die sämmtlichen 7 Punkte geht und vier von ihnen zu Doppelpunkten hat und legt schliesslich die Ebene $Z = 0$ durch die drei übrigen. *Die Gleichung*

$$(X_1, X_2, X_3)^2 + \lambda \cdot YZ = 0$$

enthält sechs Constanten und stellt die verlangte Fläche dar.

Um die Gleichung der Fläche 4^{ter} Ordnung mit acht (*nicht willkürlichen*) Doppelpunkten zu erhalten, kann man auf die folgende Art verfahren: man betrachtet drei Flächen 2^{ter} Ordnung

$$X_1 = 0, \ X_2 = 0, \ X_3 = 0,$$

welche sich in acht Punkten schneiden, bildet dann eine quadratische homogene Function der drei X und setzt diese Function gleich Null. *Man erhält so eine Fläche 4^{ter} Ordnung mit acht auf drei Flächen 2^{ter} Ordnung liegenden Doppelpunkten.* Sie ist übrigens nicht der allgemeine Typus einer Fläche 4^{ter} Ordnung mit 8 Doppelpunkten; *es existirt nach Cayley noch ein anderer Typus.*

Studien über die zuletzt genannten Flächen sind von Cayley, *Quart. Journ.*, 10, p. 34; 11, p. 111; *Coll. Math. Pap.*, 7, p. 304; 8, p. 25.

Es lassen sich dann auch Flächen 4^{ter} Ordnung mit 9 und 10 Doppelpunkten auffinden, von denen 7 willkürlich gewählt sind.

Bemerkenswerth aber ist der Satz:

Eine Fläche 4^{ter} Ordnung kann nicht mehr als 10 Doppelpunkte haben, von denen 7 willkürlich gewählt sind.

Eine Fläche 4^{ter} Ordnung mit 10 Doppelpunkten ist das sogenannte *Symmetroid*, dessen Gleichung auf die folgende Art entsteht.

Man habe 10 lineare Funktionen der Variabelen

$$f_{11},\ f_{12},\ \ldots,\ f_{44}$$

mit den Bedingungen $f_{ji} \equiv f_{ij}$, und bilde die *symmetrische* Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{12}, & f_{22}, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{13}, & f_{23}, & f_{33}, & f_{34} \\ f_{14}, & f_{24}, & f_{34}, & f_{44} \end{vmatrix}.$$

Sie liefert, gleich Null gesetzt, die Gleichung des *Symmetroids.*

Die Minoren 3^{ter} Ordnung der Determinante ergeben, gleich Null gesetzt, cubische Flächen, die 10 Punkte gemeinschaftlich haben; diese Punkte sind die Doppelpunkte des Symmetroids.

Der dem Symmetroid umschriebene Kegel, dessen Spitze in einem Doppelpunkt liegt, zerfällt in zwei Kegel 3^{ter} Ordnung, welche sich in 9 Geraden schneiden, die diesen Doppelpunkt mit den übrigen neun verbinden.

Wenn in einer Fläche 4^{ter} Ordnung mit 10 Doppelpunkten einer von diesen die im vorigen Theorem angegebene Eigenschaft besitzt, so haben auch die übrigen diese Eigenschaft.

Ausser dem Symmetroid gibt es noch eine andere Fläche 4^{ter} Ordnung mit 10 Doppel[illegible] welche jedoch nicht die Eigen-

schaft hat, dass der der Fläche umschriebene Kegel 6^{ter} *Ordnung, dessen Spitze in einem der Doppelpunkte liegt, in zwei Kegel* 3^{ter} *Ordnung zerfällt.*

Die Hesse'sche Kernfläche der cubischen Fläche ist ein Symmetroid; in der That sind dann die f die zweiten Derivirten der linken Seite der Gleichung der Fläche 3^{ten} Grads.

Ist $f_{11} = 0$, *so hat das Symmetroid noch einen* 11^{ten} *Doppelpunkt, ist auch* $f_{22} = 0$, *so hat es noch einen* 12^{ten}, *für* $f_{33} = 0$ *einen* 13^{ten} *und schliesslich für* $f_{44} = 0$ *noch einen* 14^{ten} *Doppelpunkt.*

Man hat die Flächen 4^{ter} Ordnung mit 11, 12, 13, 14, 15 Doppelpunkten classificirt, indem man die ihnen umschriebenen Kegel, deren Spitze in einem Doppelpunkt liegt, in Betracht zog; je nachdem diese Kegel 6^{ter} Ordnung auf die eine oder andere Weise in Kegel niedrigerer Ordnung zerfallen, hat man die Flächen 4^{ter} Ordnung in verschiedene Arten getrennt. Solche Studien sind von Kummer, Cayley, l. c. und spätere von Rohn in einer von der Jablonowski'schen Ges. zu Leipzig im Jahre 1886 preisgekrönten Abhandlung; siehe auch *Math. Ann.*, 29, 1887. Cayley und die englischen Autoren haben, wie es ihre Gewohnheit ist, zahlreiche und complicirte Benennungen für einige der oben genannten Flächen, speciell für die mit 8, 9, 10 Doppelpunkten eingeführt; es scheint, dass diese Benennungen eher dazu dienen, die Sache zu verwickeln, als sie einfacher zu machen.

Ein Theil der Flächen mit 11, 12, ..., 15 Doppelpunkten kann auch als Brennfläche einer Congruenz 2^{ter} Ordnung aufgefasst werden. Siehe weiter unten Kap. 14.

§ 3. Die Kummer'sche Fläche.

Wie schon gesagt wurde, wird *die Kummer'sche Fläche* als Fläche 4^{ter} Ordnung mit 16 isolirten Doppelpunkten definirt.

Sie ist 4^{ter} *Classe; ihre allgemeine Gleichung enthält 18 unabhängige Constante.*

Der die Fläche berührende Kegel 6^{ter} *Ordnung, dessen Spitze in einem Doppelpunkt liegt, zerfällt in 6 Ebenen.*

Jede dieser 6 Ebenen berührt die Fläche längs eines Kegelschnitts, auf welchem noch andere 5 Doppelpunkte liegen.

Es gibt 16 solche singuläre Ebenen; man hat also 16 singuläre Punkte und 16 singuläre Ebenen, die sich durch die wichtige Eigenschaft auszeichnen, dass jede Ebene durch 6 auf *einem Kegelschnitt liegende Doppelpunkte geht und dass durch jeden Punkt 6 Ebenen gehen.*

Die Kummer'sche Fläche wird besonders in der *Liniengeometrie* benutzt, sie kann als *Brennfläche einer Congruenz 2ter Ordnung und 2ter Classe* definirt werden, Kummer, *Berl. Abh.*, 1866, oder auch als *Singularitätenfläche des allgemeinen quadratischen Complexes*, oder als *Singularitätenfläche unendlich vieler confocaler quadratischer Complexe*, Klein, *Math. Ann.*, 2. Siehe weiter unten Kap. 14 über die *Geometrie der Geraden.*

Eine wichtige Eigenschaft dieser Fläche besteht darin, dass sie in sechs Polaritäten reciprok zu sich selbst ist.

Der Gleichung der Kummer'schen Fläche haben Kummer selbst, Cayley und Andere verschiedene Formen gegeben.

Wenn $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ *die Gleichungen von 4 singulären Ebenen sind, deren 4 Schnittpunkte zugleich auch Knotenpunkte der Fläche sind, so lässt sich die Gleichung schreiben:*

$$\Phi^2 = 16 k X_1 X_2 X_3 X_4,$$

worin k eine Constante bezeichnet und Φ *eine in den X quadratische Form darstellt, nämlich*

$$\begin{aligned} \Phi = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + 2a(X_2X_3 + X_1X_4) + \\ + 2b(X_3X_1 + X_2X_4) + 2c(X_1X_2 + X_3X_4), \\ k = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1, \quad \text{Kummer.} \end{aligned}$$

Eine irrationale Form der Gleichung dieser Fläche ist die folgende, Cayley, *Crelle,* 73, p. 292; *Coll. Math. Pap.*, 7, p. 126:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha x_1\left(\gamma'\gamma'' x_2 - \beta'\beta'' x_3 - \frac{x_4}{\alpha}\right)} + \\ + \sqrt{\beta x_2\left(\alpha'\alpha'' x_3 - \gamma'\gamma'' x_1 - \frac{x_4}{\beta}\right)} + \\ + \sqrt{\gamma x_3\left(\beta'\beta'' x_1 - \alpha'\alpha'' x_2 - \frac{x_4}{\gamma}\right)} = 0, \end{aligned}$$

mit den Bedingungen:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= 0, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' &= 0. \end{aligned}$$

Andere Formen erhält man, wenn das System α, β, γ cyklisch mit dem System α', β', γ' oder dem System $\alpha'', \beta'', \gamma''$ vertauscht wird.

Auf rationale Form reducirt, lautet die vorstehende Gleichung

$$x_4^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2) +$$
$$+ 2x_4\{\alpha\alpha'\alpha''(x_2^2x_3 - x_3^2x_2) + \beta\beta'\beta''(x_3^2x_1 - x_1^2x_3) +$$
$$+ \gamma\gamma'\gamma''(x_1^2x_2 - x_2^2x_1) + \theta x_1x_2x_3\} +$$
$$+ (\alpha\alpha'\alpha''x_2x_3 + \beta\beta'\beta''x_3x_1 + \gamma\gamma'\gamma''x_1x_2)^2 = 0,$$

worin der Kürze wegen

$$\theta = (\beta - \gamma)\alpha'\alpha'' + (\gamma - \alpha)\beta'\beta'' + (\alpha - \beta)\gamma'\gamma''$$

gesetzt wurde.

Man beachte, dass auch in diesem Ausdruck für θ die erwähnten cyklischen Vertauschungen gemacht werden können, ohne dass dadurch der Werth von θ verändert wird.

Die 16 singulären Ebenen sind durch die Gleichungen gegeben:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,$$

$$\frac{x_1}{\alpha} + \frac{x_2}{\beta} + \frac{x_3}{\gamma} = 0,$$

$$\frac{x_1}{\alpha'} + \frac{x_2}{\beta'} + \frac{x_3}{\gamma'} = 0,$$

$$\frac{x_1}{\alpha''} + \frac{x_2}{\beta''} + \frac{x_3}{\gamma''} = 0,$$

$$\gamma'\gamma''x_2 - \beta'\beta''x_3 - \frac{x_4}{\alpha} = 0,$$

$$\gamma''\gamma x_2 - \beta''\beta x_3 - \frac{x_4}{\alpha'} = 0,$$

$$\gamma\gamma'x_2 - \beta\beta'x_3 - \frac{x_4}{\alpha''} = 0,$$

$$\alpha'\alpha''x_3 - \gamma'\gamma''x_1 - \frac{x_4}{\beta} = 0,$$

$$\alpha''\alpha x_3 - \gamma''\gamma x_1 - \frac{x_4}{\beta'} = 0,$$

$$\alpha\alpha'x_3 - \gamma\gamma'x_1 - \frac{x_4}{\beta''} = 0,$$

$$\beta'\beta''x_1 - \alpha'\alpha''x_2 - \frac{x_4}{\gamma} = 0,$$

$$\beta''\beta x_1 - \alpha''\alpha x_2 - \frac{x_4}{\gamma'} = 0,$$

$$\beta\beta'x_1 - \alpha\alpha'x_2 - \frac{x_4}{\gamma''} = 0.$$

Eine andere Form der Gleichung der Kummer'schen Fläche ist die folgende (Rohn, l. c. und *Math. Ann.*, 18)*):

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + A x_1 x_2 x_3 x_4 - 2 A_{3456}(x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) -$$
$$- 2 A_{5612}(x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) - 2 A_{1234}(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0,$$

worin

$$A = \frac{8}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)(k_5 - k_6)} \{ k_1 k_2 (k_3 + k_4 - k_5 - k_6) +$$
$$+ k_3 k_4 (k_5 + k_6 - k_1 - k_2) + k_5 k_6 (k_1 + k_2 - k_3 - k_4),$$
$$A_{ijkl} = \frac{(k_i - k_k)(k_j - k_l) + (k_i - k_l)(k_j - k_k)}{(k_i - k_j)(k_k - k_l)} \quad \text{ist.}$$

Die Coefficienten dieser Gleichung hängen, wie man sieht, von den sechs Grössen k ab, welche sich als die Wurzeln einer binären Form 6ter Ordnung auffassen lassen. Daraus erhellt die Möglichkeit, eine Beziehung zwischen den Kummer'schen Flächen und den binären Formen 6ter Ordnung herzustellen; es ergibt sich in der That, dass diese Fläche in besonderer Verbindung mit den hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 2 in Bezug auf eine binäre Form 6ter Ordnung steht.

Klein, *Math. Ann.*, 5 war der erste, der erkannte, dass man die Coordinaten eines Punktes der Kummer'schen Fläche durch vier specielle hyperelliptische Functionen von zwei Argumenten ausdrücken könne; auf ihn folgten die diesbezüglichen Arbeiten von Cayley, *Crelle*, 83; Borchardt, ib., id.; Weber, ib., 84; Rohn, *Math. Ann.*, 15, 18; Reichardt, *Nova acta der Leop. Carol. Ac.*, 50, Halle 1887; etc.

Wir lassen hier einige Angaben darüber folgen: Es gibt, wie man weiss, 16 ϑ-Functionen vom Geschlecht 2 (vergl. *Repert.*, 1, Kap. 17, § 3); jeder von ihnen entspricht eine *Charakteristik*; solcher Charakteristiken sind 10 gerade und 6 ungerade vorhanden (ebenda p. 455). Durch die Art der Gruppirung dieser Charakteristiken unterscheiden sich die sogenannten Göpel'schen (*Crelle*, 35) und Rosenhain'schen (*Mém. des sav. étr.*, 11, Paris 1846) Quadrupel. Ein Göpel'sches Quadrupel (es existiren ihrer 60), ist ein System von vier Charakteristiken, die entweder *alle gerade*, oder von denen *zwei gerade und zwei ungerade* sind und deren Summe Null ist. Ein Rosenhain'sches Quadrupel (es gibt ihrer 80) ist dagegen ein System von vier Charakte-

*) Man beachte, dass auf p. 142 der citirten Rohn'schen Arbeit dem Coefficienten A von $x_1 x_2 x_3 x_4$ die Zahl 4 statt 8 zugeordnet ist.

ristiken, deren Summe wieder Null ist, von denen aber entweder *eine ungerade und drei gerade* oder *drei ungerade und eine gerade* sind. Es gilt dann der Satz:

Zwischen den Quadraten der vier den Charakteristiken eines Göpel'schen oder Rosenhain'schen Quadrupels entsprechenden ϑ-Functionen besteht immer eine rationale homogene Relation 4ten Grads; und, nimmt man diese ϑ^2 zu homogenen Coordinaten eines Punkts des Raums, so stellt eine solche Relation eine Kummer'sche Fläche dar. Im Fall des Göpel'schen Quadrupels sind die Ebenen des Fundamentaltetraeders der Coordinaten vier singuläre Ebenen der Fläche, jedoch ist keine Ecke dieses Tetraeders ein Knoten der Fläche; bei dem Rosenhain'schen Quadrupel dagegen sind die vier Ebenen des Tetraeders der Coordinaten wieder vier singuläre Ebenen, die vier Ecken aber vier singuläre Punkte.

Bei dieser Darstellung entsprechen die übrigen ϑ^2 jeder der anderen singulären Ebenen.

Zu einer weiteren Gleichung der Kummer'schen Fläche kann man auch von einem anderen Standpunkt aus gelangen. Werden nämlich zu homogenen Coordinaten eines Punkts des Raums gewisse vier von Klein mit Σ bezeichnete hyperelliptische Functionen gewählt, so erhält man eine Gleichung der Fläche, deren Coefficienten *rationale Invarianten* einer binären Form 6ter Ordnung sind, welche auf die oben angegebene Art der Kummer'schen Fläche entspricht; eine solche Gleichung pflegt man *die rationale Gleichung der Fläche* zu nennen. Näheres darüber findet man bei Pascal, *Ann. di mat.*, 18, 19.

Die Configuration der 16 singulären Punkte und Ebenen der Kummer'schen Fläche ist vielfach untersucht worden. Wir citiren Caporali, *Lincei*, 1878; Schröter, *Crelle*, 100; De Paolis, *Lincei*, 1890.

Die 16 zu je zweien conjugirten Fundamentalpunkte erzeugen ebenso, wie die sich zu je zweien schneidenden Fundamentalebenen 120 Gerade, die Caporali *die Geraden R* nannte.

Die 16 Fundamentalpunkte liegen zu je dreien in 240 nicht fundamentalen Ebenen (den Ebenen Π) und die 16 Fundamentalebenen liefern zu je dreien 240 nicht fundamentale Punkte (die Punkte P).

Die Ebenen Π gehen zu je 6 durch die Geraden R und die Punkte P liegen zu je 6 in den letzteren. Umgekehrt gehen *die Geraden R zu je dreien durch die Punkte P und liegen zu je dreien in den Ebenen Π.*

Die Punkte P sind zu je 45 in den Fundamentalebenen gelegen und die Ebenen Π gehen zu je 45 durch die Fundamentalpunkte.

Es gibt 80 Tetraeder, deren Ecken und Seitenflächen Fundamentalpunkte und -Ebenen sind; sie entsprechen den 80 Rosenhain'schen Quadrupeln von Charakteristiken; siehe oben.

Es gibt 60 Tetraeder, deren Seitenflächen Fundamentalebenen und deren Ecken Punkte P sind; sie entsprechen den 60 Göpel'schen Quadrupeln.

Aus dem letzten Satz folgt dann selbstverständlich die *duale* Eigenschaft.

Die 240 Punkte P und Ebenen Π bilden 15 neue Kummer'sche Configurationen.

Schneidet man die Kummer'sche Fläche mit einer Ebene, so *kann man* eine allgemeine ebene Curve 4ter Ordnung-erhalten; es gelten darüber die Sätze:

Durch jede allgemeine ebene Curve 4ter Ordnung gehen ∞^4 Kummer'sche Flächen.

Die 16 singulären Ebenen werden von der schneidenden Ebene in 16 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung getroffen. Diese 16 Doppeltangenten sind mit denen identisch, die übrig bleiben, wenn von den 28 die zwölf nicht gemeinsamen Doppeltangenten zweier Aronhold'scher Systeme weggenommen werden, welche eine einzige Gerade gemeinsam haben; mit anderen Worten: diese 16 Doppeltangenten bilden unter sich eine ähnliche Configuration, wie die 16 Doppeltangenten einer ebenen Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkt, wenn man die 6 von dem Doppelpunkt ausgehenden Tangenten nicht in Rechnung zieht. Siehe Kap. 8, S. 198.

Die vier Doppeltangenten, die aus dem Schnitt eines Göpel'schen Tetraeders (siehe oben) *hervorgehen, sind vier Doppeltangenten, durch deren 8 Berührungspunkte ein Kegelschnitt geht.*

Auf diese Beziehungen zwischen den Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung und den singulären Punkten und Ebenen der Kummer'schen Fläche gründen sich einige neuere Arbeiten von Ciani, *Ann. di mat.*, (3), 2; *Rend. Ist. Lomb.*, 1898.

Es lässt sich eine Bezeichnungsart für die 16 singulären Ebenen und Punkte der Kummer'schen Fläche ermitteln: gebraucht man für eine der Ebenen das Symbol 0 und für die sechs auf ihr gelegenen Punkte die Symbole 1, 2, 3, 4, 5, 6, *so lassen sich die übrigen 15 Ebenen durch die Doppelsymbole* 12, 13, 14, ..., 56 *und die übrigen 10 Fundamentalpunkte durch die dreizähligen Symbole*

$$\begin{pmatrix}123\\456\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}124\\356\end{pmatrix}, \ldots$$

darstellen.

Durch den Punkt $\begin{pmatrix}123\\456\end{pmatrix}$ *gehen die sechs Ebenen* 12, 23, 31, 45, 56, 64 *durch den Punkt* (1) *dagegen die sechs Ebenen* (0), (12), (13), (14), (15), (16).

Eine andere Bezeichnungsart für die 16 singulären Ebenen geht aus der obenerwähnten Beziehung zwischen ihnen und den Charakteristiken vom Geschlecht 2 hervor.

Legt man nämlich jeder Ebene das Symbol $(abcd)$ bei, worin a, b, c, d keine anderen Werthe als 0 und 1 annehmen können (und der grösseren Einfachheit wegen die Charakteristik mit $(abcd)$ statt mit $\begin{pmatrix}ab\\cd\end{pmatrix}$ bezeichnet wird), so werden die 16 Ebenen durch die Symbole

$$\begin{array}{llll} (0000), & (1000), & (0100), & (1100), \\ (0010), & (1010), & (0110), & (1110), \\ (0001), & (1001), & (0101), & (1101), \\ (0011), & (1011), & (0111), & (1111) \end{array}$$

dargestellt.

Die sechs sich in einem Punkt schneidenden Ebenen bestehen aus den drei Ebenen, welche sich in dieser Tabelle mit einem gegebenen Element in derselben Horizontalreihe befinden, und den drei anderen, die mit dem nämlichen Element in derselben Verticalreihe liegen.

Sechs sich in einem Punkt schneidende Ebenen werden daher mit

$$\begin{array}{l} (a,\, b,\, c,\, d+1), \\ (a,\, b,\, c+1,\, d), \\ (a,\, b,\, c+1,\, d+1), \\ (a+1,\, b,\, c,\, d), \\ (a,\, b+1,\, c,\, d), \\ (a+1,\, b+1,\, c,\, d) \end{array}$$

bezeichnet.

Die Anzahl der Substitutionen der Stubstitutionengruppe. welche die Configuration unverändert lassen, beträgt 6! 16.

Die Gleichung 16^{ten} *Grads, von welcher die Bestimmung der 16 singulären Ebenen oder Punkte der Kummer'schen Fläche abhängt, wird nach Auflösung einer Gleichung* 6^{ten} *Grads eine Abel'sche Gleichung und lässt sich, nachdem dies geschehen, durch Auflösung von vier Gleichungen* 2^{ten} *Grads lösen.* Jordan.

Mit diesen Problemen hat sich Jordan beschäftigt, *Crelle*, 70; siehe auch seinen *Traité des subst.*, Paris 1870.

Die Haupttangentencurven (Asymptotenlinien)) auf der Kummer'schen Fläche sind im Allgemeinen Curven* 16^{ter} *Ordnung und* 16^{ter} *Classe.*

Sie haben 16 Spitzen in den 16 singulären Punkten der Fläche, 16 stationäre Ebenen, welche die singulären Ebenen der Fläche sind, und 96 stationäre Tangenten. Siehe Kap. 9, § 4.

Ihr Rang r ist der 48^{te}, *die Anzahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte beträgt 72, die Ordnung der Doppelcurve der developpabelen Fläche ist die* 952^{te}; *sie sind vom Geschlecht 17.*

Es gibt 6 ausgezeichnete Haupttangentencurven, deren Ordnungs- und Classenzahl sich auf die Hälfte, also auf 8, reduciren; jede von ihnen ist doppelt zu rechnen. Sie haben keine Spitzen und stationären Ebenen und besitzen 40 stationäre Tangenten; ihr Rang ist der 24^{te}, *die Anzahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte 16, die Ordnung der Doppelcurve der Developpabelen die* 200^{te}; *sie sind vom Geschlecht 5.*

Durch die Haupttangentencurven einer Kummer'schen Fläche geht ein Büschel von Flächen 4^{ter} *Ordnung.* Reye.

Die parabolische Curve der Kummer'schen Fläche ist eine Curve 32^{ter} *Ordnung und zerfällt in 16 Kegelschnitte, welche identisch mit den in den 16 singulären Ebenen liegenden Kegelschnitten sind.*

Mit den Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche haben sich speciell Klein und Lie, *Math. Ann.*, 23; Reye, *Crelle*, 98 und Segre an demselben Ort beschäftigt.

---

*) Die Haupttangentencurven sind Linien, bei denen die Osculationsebene in jedem ihrer Punkte mit der Berührungsebene an die Fläche zusammenfällt (siehe weiter unten Kap. 16). Die Tangenten an die Haupttangentencurve sind Gerade, welche die Fläche osculiren.

Ueber die Classification der Kummer'schen Flächen auf Grund der Realität oder Nicht-Realität der singulären Punkte und Ebenen ist eine Arbeit von Rohn, *Math. Ann.*, 18 vorhanden. Weiler, *Math. Ann.*, 6 dagegen classificirt sie nach den besonderen Eigenschaften, die sie annehmen, wenn einige der 16 singulären Punkte sich vereinigen. Beide gehen von der Betrachtung der 6 Werthe $k_1, \ldots, k_6$, den Wurzeln einer Form 6^{ter} Ordnung, aus, die, wie wir oben gesagt haben, in Beziehung zur Gleichung der Kummer'schen Fläche stehen; wenn man annimmt, diese 6 Werthe specialisiren sich in Bezug auf ihre Realität oder Nicht-Realität und in Bezug auf ihre Grösse, so ergeben sich alle Fälle, die möglich sind.

Wir geben hier einige der Rohn'schen Resultate an:

I. Die sechs Grössen k sind reell.

a) Die Kummer'sche Fläche hat 16 reelle singuläre Punkte und 16 reelle singuläre Ebenen.

b) Die Fläche ist reell, aber alle ihre singulären Punkte und Ebenen sind imaginär. Betrachtet man in einer Berührungsebene an die Fläche die Schnittcurve 4^{ter} Ordnung, so sind die sechs von dem Doppelpunkt an diese Curve gezogenen Tangenten sämmtlich reell.

c) Die Fläche ist imaginär und ihre sämmtlichen singulären Punkte und Ebenen sind imaginär.

II. Zwei der Grössen k sind conjugirt imaginär und die übrigen reell.

a) Die Fläche hat 8 reelle singuläre Punkte und ebensoviele reelle singuläre Ebenen.

b) Die Fläche ist reell, aber ihre sämmtlichen singulären Punkte und Ebenen sind imaginär. Sie ist jedoch mit der unter I, b aufgeführten nicht identisch, weil von den sechs in I, b definirten Tangenten vier reell und zwei imaginär sind.

III. Zwei Paare der Grössen k sind conjugirt imaginär, die übrigen beiden k reell.

Die Fläche hat 4 reelle singuläre Punkte und 4 reelle singuläre Ebenen; jede der letzteren geht durch 2 reelle Punkte und speciell gehen zwei Ebenen durch die nämlichen beiden Punkte und die übrigen 2 durch die beiden anderen Punkte.

IV. Die sechs Grössen k sind zu je zweien conjugirt imaginär.

a) Die Fläche ist reell und hat 4 reelle singuläre Punkte und 4 ebensolche Ebenen. Sie ist jedoch anders gestaltet, wie die Fläche in dem Fall III, weil keine reelle Ebene durch einen reellen Punkt geht.

b) Die Fläche ist imaginär, besitzt aber 4 reelle singuläre Punkte und 4 reelle singuläre Ebenen.

Wir verweisen hierbei auf die interessanten von L. Brill in Darmstadt (siehe dessen *Catalog*, etc.) besorgten Gypsmodelle.

§ 4. Das Cayley'sche Tetraedroid und die Wellenfläche.

Ein specieller Fall der Kummer'schen Fläche ist die von Cayley *Tetraedroid* genannte Fläche, von welcher dann ihrerseits wieder die Fresnel'sche *Wellenfläche* als besonderer Fall sich abzweigt.

Das *Tetraedroid* ist eine Kummer'sche Fläche, deren 16 singuläre Ebenen sich derart in 4 Gruppen zu je vieren vertheilen, dass die Ebenen der nämlichen Gruppe durch einen und denselben Punkt gehen; man erhält so die 4 Eckpunkte eines Fundamentaltetraeders, von welchem die Fläche ihren Namen hat.

Die Fläche ist eine homographische Transformation der *Wellenfläche*, von der weiter unten die Rede sein wird; diese letztere ist daher nur ein metrisch specialisirtes Tetraedroid.

Die auf das Fundamentaltetraeder bezogene Gleichung des Tetraedroids lautet:

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_4^2 \\ x_1^2, & 0, & a_{12}^2, & a_{13}^2, & a_{14}^2 \\ x_2^2, & a_{12}^2, & 0, & a_{23}^2, & a_{24}^2 \\ x_3^2, & a_{13}^2, & a_{23}^2, & 0, & a_{34}^2 \\ x_4^2, & a_{14}^2, & a_{24}^2, & a_{34}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen der 16 singulären Ebenen sind dann die folgenden:

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & a_{34}x_2 & -\,a_{24}x_3 & +\,a_{23}x_4 & = 0, \\
a_{23}x_1 & -\,a_{13}x_2 & -\,a_{12}x_3 & & = 0, \\
-\,a_{24}x_1 & -\,a_{14}x_2 & & +\,a_{12}x_4 & = 0, \\
a_{34}x_1 & & +\,a_{14}x_3 & +\,a_{13}x_4 & = 0, \\
-\,a_{34}x_1 & & +\,a_{14}x_3 & +\,a_{13}x_4 & = 0, \\
a_{24}x_1 & +\,a_{14}x_2 & & +\,a_{12}x_4 & = 0, \\
-\,a_{23}x_1 & +\,a_{13}x_2 & -\,a_{12}x_3 & & = 0, \\
 & -\,a_{34}x_2 & -\,a_{24}x_3 & +\,a_{23}x_4 & = 0, \\
a_{24}x_1 & -\,a_{14}x_2 & & +\,a_{12}x_4 & = 0, \\
-\,a_{34}x_1 & & -\,a_{14}x_3 & +\,a_{13}x_4 & = 0, \\
 & a_{34}x_2 & +\,a_{24}x_3 & +\,a_{23}x_4 & = 0, \\
-\,a_{23}x_1 & -\,a_{13}x_2 & +\,a_{12}x_3 & & = 0, \\
-\,a_{23}x_1 & -\,a_{13}x_2 & -\,a_{12}x_3 & & = 0, \\
 & a_{34}x_2 & -\,a_{24}x_3 & -\,a_{23}x_4 & = 0, \\
-\,a_{34}x_1 & & +\,a_{14}x_3 & -\,a_{13}x_4 & = 0, \\
a_{24}x_1 & -\,a_{14}x_2 & & -\,a_{12}x_4 & = 0.
\end{array}
$$

Die weiter oben angegebene Gleichung des Tetraedroids ergibt sich aus Cayley's allgemeiner Gleichung der Kummer'schen Fläche (siehe § 3), *wenn man*

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{a_{24}}{a_{34}}, \quad \frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{a_{34}}{a_{14}}, \quad \frac{\beta''}{\alpha''} = \frac{a_{14}}{a_{24}},$$

$$\alpha\alpha'\alpha'' = -\frac{a_{23}}{a_{14}}, \quad \beta\beta'\beta'' = -\frac{a_{13}}{a_{24}}, \quad \gamma\gamma'\gamma'' = -\frac{a_{12}}{a_{34}}$$

setzt, woraus

$$\alpha'\beta''\gamma = \alpha''\beta\gamma' \quad \textit{folgt.}$$

Von jeder der vier Seitenflächen des Fundamentaltetraeders wird das Tetraedroid in einem Paar von Kegelschnitten geschnitten; bez. eines jeden dieser Kegelschnitte ist das in der entsprechenden Seitenfläche des Tetraeders enthaltene Dreieck sich selbst conjugirt. Siehe Kap. 3, § 2, S. 78.

Man erhält so 4 Paare von Kegelschnitten in den vier Seitenflächen des Tetraeders; *die 16 Schnittpunkte dieser 4 Paare von Kegelschnitten sind die 16 singulären Punkte der Fläche, die sich also zu je vieren auf den Seitenflächen des Fundamentaltetraeders befinden.* Diese letztere Eigenschaft ergibt sich offenbar, wenn man sich daran erinnert, dass die Kummer'sche Fläche reciprok zu sich selbst ist. Siehe § 3.

Die vier singulären Punkte auf jeder Seitenfläche des Tetraeders liegen zu je zweien auf 6 Geraden, die ihrerseits zu je zweien durch die drei Ecken des Dreiecks gehen, welches die Seitenfläche des Tetraeders bildet.

Die 16 singulären Ebenen berühren die Fläche längs Kegelschnitten.

In dem Fall des Tetraedroids lässt sich die Gleichung 6^ten Grads, von welcher, wie in § 3 ausgeführt wurde, nach Jordan die Bestimmung der 16 singulären Punkte der allgemeinen Kummer'schen Fläche abhängt, algebraisch auflösen.

Vergl. bez. des Tetraedroids auch H. E. Timerding, *Ueber die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raums in ein System von Flächen 2^ter Ordnung mit gemeinsamem Poltetraeder übergeführt werden, Ann. di mat.*, (3), 1, 1898.

Die *Wellenfläche* ist ein specielles Tetraedroid und lässt sich auf die folgende Art definiren:

Sie ist der Ort der Endpunkte der von dem Centrum eines Ellipsoids ausgehenden Strahlen, deren Längen den beiden Haupthalbmessern des Schnitts des Ellipsoids mit einer auf diesem Strahl senkrechten Ebene gleich sind; auf jedem Strahl liegen daher vier Punkte der Fläche, zwei auf der einen und zwei auf der anderen Seite. Fresnel.

Die Fläche besteht aus zwei Schalen, von denen die eine innerhalb der anderen liegt, und die sich in Doppelpunkten der Fläche berühren.

Legt man das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c$$

zu Grund, so lautet die Gleichung der Wellenfläche

$$\xi^2\eta^2 - \zeta^2 + a^2b^2c^2 = 0,$$

worin

$$\xi^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\eta^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$
$$\zeta^2 = a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2 \quad \textit{ist.}$$

Fresnel.

Diese Gleichung ergibt sich aus der des Tetraedroids, wenn man zwischen den Coefficienten $a_{12}^2, a_{13}^2, \ldots$ specielle Relationen festsetzt. Siehe Salmon [illegible] *Raum.*, 2, p. 473, 474.

Der Fresnel'schen Gleichung kann man die beiden folgenden Formen geben:

$$\frac{x^2}{\xi^2 - a^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - b^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\eta^2 - b^2c^2} + \frac{y^2}{\eta^2 - b^2a^2} + \frac{z^2}{\eta^2 - a^2c^2} = 0.$$

Das Fundamentaltetraeder der als Tetraedroid betrachteten Wellenfläche hat zu Seitenflächen die drei Hauptebenen des Ellipsoids und die unendlich ferne Ebene.

Der Schnitt der Wellenfläche mit einer der drei Hauptebenen des Ellipsoids besteht aus einer Ellipse und einem Kreis.

Von den 16 singulären Punkten der Fläche liegen 4 imaginäre im Unendlichen, 4 reelle auf einer der Hauptebenen und die übrigen 4 + 4 imaginäre sind auf den beiden anderen Hauptebenen vertheilt.

Die vier singulären Tangentialebenen berühren die Fläche längs Kreisen.

Das Tetraedroid hat zuerst Cayley studirt, *Journ. de Liouville,* 11, 1846; *Coll. Math. Pap.,* 1, S. 302; *Crelle,* 65, 87.

Mit der Untersuchung der Wellenfläche machte den Anfang: Fresnel, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 7, 1827 in einer Abhandlung über die doppelte Lichtbrechung, in welcher er das Problem der Physik über den Durchgang des Lichts durch lichtbrechende Körper studirte. Auf ihn folgten dann kurz nachher: Ampère, *Ann. de Chim. et Phys.,* 39, 1828; Cauchy, *Exerc. de math.,* 5, Paris 1830; *Compt. Rend.,* 11, 12, 18; Plücker, *Crelle,* 19, 1839 und Andere. Ein ausführliches Verzeichniss von Arbeiten über die Wellenfläche findet man in dem oben S. 125 citirten Werk von Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geom.,* Torino 1896, p. 114, 115. (In der deutschen Uebers. von 1888 p. 42 ist nur Mannheim erwähnt).

Eine andere Erzeugungsart der Fläche hat Böklen, *Schlömilch's Zeitschr.,* 24, 25, 27, 1879—82 angegeben und eine weitere mit Hülfe zweier developpabeler Flächen Cayley, *Quart. Journ. of math.,* 3, 1860; *Coll. Math. Pap.,* 4, p. 420, 432; *Ann. di mat.,* 20, 1892.

Man kann sich einen noch specielleren Fall der Kummer'schen Fläche denken, wenn sie nämlich nicht nur in einer, sondern in mehreren Arten sich als ein Tetraedroid ansehen lässt.

Mit solchen speciellen Flächen beschäftigten sich Rohn, *Leipz. Ber.*, 1884; Segre, ib., id. und neuerdings Bertini, *Ist. Lomb.*, 1898.

Gypsmodelle von *Wellenflächen* sind in der von L. Brill besorgten Sammlung enthalten.

§ 5. Flächen 4^{ter} Ordnung, die unendlich viele Kegelschnitte enthalten.

Kummer, *Berl. Monatsber.*, 1863 = *Crelle*, 64 untersuchte die Flächen 4^{ter} Ordnung, die unendlich viele Kegelschnitte enthalten. Wir geben in diesem Paragraphen die Hauptresultate an, zu denen er gekommen ist.

Es gibt keine Flächen 4^{ter} Ordnung, deren Schnitte mit allen Ebenen des Raums oder eines Bündels, jeder für sich, aus zwei Kegelschnitten zusammengesetzt sind.

Es gibt Flächen 4^{ter} Ordnung, deren Schnitte mit gewissen unendlich vielen Ebenen, die keine Berührungsebenen sind, aus zwei Kegelschnitten bestehen; sie sind:

1. *Die Flächen 4^{ter} Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt und zwei Doppelpunkten, deren Verbindungsgerade den Doppelkegelschnitt nicht trifft; jede Ebene des Büschels, dessen Axe diese Verbindungslinie ist, schneidet die Fläche in zwei Kegelschnitten, deren Schnittpunkte natürlich Doppelpunkte der Fläche sind und mithin auf dem Doppelkegelschnitt liegen. Die Gleichung einer derartigen Fläche lautet:*

$$\varphi^2 = 4p^2qr,$$

worin φ eine Form 2^{ten} Grads und p, q, r vom 1^{ten} Grad sind.

2. *Die Fläche 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelgeraden; jede durch diese gehende Ebene schneidet die Fläche ausserdem in einem Kegelschnitt. Die Gleichung dieser Fläche ist*

$$p^2S + 2pqS_1 + q^2S_2 = 0;$$

dabei sind p, q Formen 1^{ten} Grads und S, S_1, S_2 vom 2^{ten} Grad.

3. *Die Fläche 4^{ter} Ordnung mit zwei Selbstberührungspunkten, d. h. Punkten, in denen sich zwei Schalen der Fläche berühren; jede Ebene, welche durch die Gerade gelegt wird, die diese zwei Punkte verbindet, schneidet die Fläche in zwei Kegelschnitten, die sich in diesen Punkten berühren. Ihre Gleichung lautet:*

$$\varphi^2 = (p, q)^4:$$

darin ist φ *eine quadratische Form,* p, q *sind zwei lineare Formen und* $(p, q)^4$ *stellt eine Form* 4^{ten} *Grads in* p, q *dar.*

In allen diesen Fällen bilden die Ebenen, welche die Fläche auf die verlangte Art schneiden, ein Büschel.

Es gibt Flächen 4^{ter} *Ordnung, deren Schnitte mit (allen oder einigen) Berührungsebenen aus zwei Kegelschnitten bestehen. Sie sind:*

1. *Die Fläche, welche drei sich in einem Punkt schneidende Doppelgerade hat (die Römerfläche Steiner's); die von irgend einer Berührungsebene erzeugten Schnitte sind aus zwei Kegelschnitten zusammengesetzt.*

2. *Die Fläche mit einem Doppelkegelschnitt und einem Doppelpunkt; jede durch den Doppelpunkt gehende Berührungsebene trifft die Fläche in zwei Kegelschnitten. Die Gleichung einer solchen Fläche lautet:*

$$\varphi^2 = 4p^2\psi;$$

darin sind φ, ψ *quadratische Formen und* p *eine lineare Form; insbesondere stellt* $\psi = 0$ *einen Kegel* 2^{ter} *Ordnung dar, dessen Spitze auf der Fläche* 2^{ten} *Grads* $\varphi = 0$ *liegt.*

Es gibt Flächen 4^{ter} *Ordnung, die von jeder sie doppelt berührenden Ebene in zwei Kegelschnitten geschnitten werden. Es sind dies:*

1) *Die Flächen mit einem Doppelkegelschnitt und*
2) *die Regelflächen.*

In den folgenden Paragraphen werden wir die Hauptarten der hier aufgezählten Flächen gesondert behandeln, nämlich:

a) die Flächen mit Doppelkegelschnitt;
b) die Flächen mit Doppelgerade;
c) die Steiner'sche Fläche;
d) die Regelflächen.

Die Flächen *mit zwei Selbstberührungspunkten* sind bisher noch nicht eingehend studirt worden.

§ 6. Die Flächen 4^{ter} Ordnung mit Doppel- oder Cuspidalkegelschnitt.

Die charakteristischen Zahlen für diese Fläche findet man weiter oben in § 1 dieses Kapitels.

Jede Ebene des Raums schneidet die Fläche in einer Curve 4^{ter} *Ordnung mit zwei Doppelpunkten, jede Berührungsebene in einer Curve* 4^{ter} *Ordnung mit drei Doppelpunkten, jede* *zweifach berührende Ebene in zwei Kegelschnitten und jede Ebene, die dreifach berührt, in einem Kegelschnitt und zwei Geraden.*

Durch jeden beliebigen Punkt können 10 Ebenen gelegt werden, welche die Fläche in Paaren von Kegelschnitten schneiden.

Auf dem Doppelkegelschnitt gibt es vier uniplanare oder Cuspidalpunkte; die Berührungsebenen in diesen Punkten gehen durch denselben Punkt.

Die allgemeine Gleichung der Fläche lautet:

$$\varphi^2 - 4p^2\psi = 0;$$

darin stellen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *zwei Flächen 2ter Ordnung und* $p = 0$ *eine Ebene dar, deren Schnitt mit* $\varphi = 0$ *der Doppelkegelschnitt der Fläche ist.*

Die parabolische Curve der Fläche (von der 32ten Ordnung) setzt sich aus dem 8-mal gezählten Doppelkegelschnitt, dem 2-mal gerechneten Schnitt von $\varphi = 0$ *mit* $\psi = 0$ *und einer anderen Curve 8ter Ordnung zusammen.*

Die Fläche enthält 16 Gerade (die selbstverständlich den Doppelkegelschnitt treffen); jede von ihnen wird von fünf anderen geschnitten. Die Configuration dieser 16 Geraden ist dieselbe, wie die der 16 Geraden, welche übrig bleiben, wenn man von den 27 Geraden einer Fläche 3ter Ordnung (Kap. 11, § 3) *eine Gerade und die sämmtlichen 10, welche diese Gerade schneiden, weglässt.*

Jede durch eine der 16 Geraden gelegte Ebene schneidet die Fläche ausserdem in einer Curve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt.

Es gibt 40 die Fläche dreimal berührende Ebenen, von denen jede 2 Gerade enthält.

Die Doppeltangentialebenen der Fläche hüllen fünf Kegel 2ter Ordnung ein, welche die fünf Kummer'schen Kegel genannt werden. Diese fünf Kegel bilden daher die doppelt berührende Developpabele der Fläche (von der 10ten Ordnung).

Die 40 dreifach berührenden Ebenen der Fläche haben unter sich dieselbe Configuration, wie die 40 Ebenen, welche von den 45 einer Fläche 3ter Ordnung (Kap. 11, § 3) *übrig bleiben, wenn man die 5 durch eine feste Gerade gehenden Ebenen wegnimmt.*

Ein jeder der Kummer'schen Kegel wird von den 16 Geraden der Fläche berührt; diese vertheilen sich zu je zweien in 8 Berührungsebenen an einen Kummer'schen Kegel. Mithin lassen sich die 16 Geraden in Bezug auf jeden der 5 Kegel auf verschiedene Art in 8 Paare ordnen; diese Anordnung ist die nämliche, wie die *derselben Geraden, wenn man sie als einer cubischen Fläche angehörig betrachtet, in Bezug auf eine jede der 5 weggelassenen Ebenen. Nennt man insbesondere z. B. a, b die beiden Geraden einer weggelassenen Ebene, so vertheilen sich die 16 Geraden derart in 8 Paare, dass die beiden Geraden eines jeden Paares einander und ausserdem entweder die Gerade a oder die Gerade b schneiden.*

Es wird auf diese Art eine Zuordnung zwischen den 5 Kegeln in Bezug auf S_4 und den 5 weggelassenen Ebenen in Bezug auf S_3 hergestellt.

Die Tangente in einem Punkt P des Doppelkegelschnitts von S_4 *und die Geraden, welche P mit den Spitzen der 5 Kegel verbinden, sind Erzeugende eines Kegels 2ter Ordnung.*

Die Kummer'schen Kegel gehen durch die auf der Doppellinie liegenden Cuspidalpunkte; die Ebenen, welche die Kegel in diesen Punkten berühren, schneiden die Fläche in zwei sich berührenden Kegelschnitten.

Aus den 16 Geraden der Fläche lassen sich zwei verschiedene Arten windschiefer Gruppirungen von 4 Geraden bilden, d. h. Gruppirungen von 4 Geraden, welche sich zu je zweien nicht schneiden; eine Gruppe 1ter Art ist so beschaffen, dass jede andere der übrig bleibenden 12 Geraden immer wenigstens eine der vier Geraden der Gruppe schneidet, eine Gruppe 2ter Art dagegen so, dass unter den 12 übrig bleibenden Geraden immer eine und nur eine vorhanden ist, welche keine der 4 Geraden trifft. Diese Gruppen heissen *Quadrupel 1ter bez. 2ter Art. Es gibt 40 von der 1ten und 80 von der 2ten Art.*

Jedem Quadrupel entspricht ein anderes derselben Art, welches so beschaffen ist, dass jede seiner vier Geraden eine und nur eine der Geraden des ersten Quadrupels trifft.

Diese beiden Quadrupel heissen *conjugirt* und bilden eine *Doppelvier* (Clebsch).

Jeder Doppelvier 2ter Art entsprechen 4 andere derart, dass die in der ersteren und einer der letzteren enthaltenen Geraden die sämmtlichen 16 Geraden der Fläche sind.

Aus den 16 Geraden lassen sich 16 windschiefe Quintupel bilden, d. h. Gesammtheiten von 5 Geraden, welche sich zu je zweien nicht schneiden; windschiefe Gesammtheiten mit einer grösseren Anzahl von Geraden gibt es nicht.

Die Substitutionengruppe der 16 Geraden hat die Ordnung $5!\,16$.

Die Wurzeln der Gleichung 16^ten Grads, von welcher die Bestimmung der 16 Geraden der Fläche 4^ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt abhängt, sind rationale Functionen der Wurzeln einer gewissen Gleichung 10^ten Grads, welche ihrerseits nach Auflösung einer Gleichung 5^ten Grads in 5 quadratische Factoren zerfällt.

Man hat dann auch eingehend die *Polyeder* studirt, die sich aus den 40 dreifach berührenden Ebenen bilden lassen. Siehe die Citate weiter unten.

Aus dem Obigen geht hervor, dass die Ebenen der Kegelschnitte der Fläche die Kummer'schen Kegel berühren; natürlich liegen in jeder Ebene zwei Kegelschnitte. *Man hat also 10 Systeme von der Fläche angehörigen Kegelschnitten* und jedem System entspricht ein anderes, das man ihm *conjugirt* nennen kann, weil ein Kegelschnitt des ersten immer in derselben Ebene mit einem bestimmten Kegelschnitt des zweiten liegt.

Durch jeden (nicht auf der Doppelcurve) liegenden Punkt der Fläche geht ein Kegelschnitt eines jeden der 10 Systeme.

Sieht man von den Schnitten ab, die durch Punkte der Doppelcurve geführt werden können, so gelten die Sätze: *Die zu demselben System gehörenden Kegelschnitte schneiden sich nicht; zwei beliebige zu zwei conjugirten Systemen gehörende Kegelschnitte schneiden sich in zwei Punkten; die beiden zu zwei verschiedenen (nicht conjugirten) Systemen gehörenden Kegelschnitte treffen sich in einem Punkt.*

Schneidet man den Kegel, dessen Spitze in einem Punkt P der Doppelcurve liegt, und welcher die Fläche berührt, mit einer beliebigen Ebene, so erhält man ausser den Spuren der beiden Berührungsebenen eine ebene allgemeine Curve 4^ter Ordnung. Zeuthen, 1879; siehe *Ann. di mat.*, 14, p. 34.

Diese Curve 4^ter Ordnung hat zu Doppeltangenten: die Spuren der beiden Berührungsebenen an die Fläche, die Spuren der 10 Ebenen, welche durch P gehen und die Fläche in einem Paar von Kegelschnitten treffen (siehe oben), *und die Spuren der 16 Ebenen, die durch P und die 16 Geraden der Fläche gelegt werden können.*

Die Kegelschnitte der Fläche werden in Kegelschnitte projicirt, welche die Curve 4^ter Ordnung vierfach berühren.

Wenn P einer der 4 auf der Doppelcurve liegenden Cuspidalpunkte ist (siehe oben), *so hat die Projection des Umfangs der Fläche einen Doppelpunkt auf der Spur der in P berührenden Ebene.*

Projicirt man dagegen die Fläche von der Spitze eines der Kummer'schen Kegel aus, so ist die Projection ihres Umfangs die Spur des doppelt gezählten Kegels und eine Curve 4ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, welche sowohl von dieser Spur als von der Projection des Doppelkegelschnitts in 4 Punkten berührt wird. Zeuthen, l. c.

Zeuthen bediente sich der vorstehenden Theoreme, um die Flächen 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt nach der Realität ihrer Geraden und der Kummer'schen Kegel zu classificiren.

Er kam zu den folgenden Hauptresultaten:

Von reellen Flächen 4ter Ordnung mit reellem Doppelkegelschnitt gibt es die nachstehend aufgeführten 6 Typen.

A. Die 16 Geraden sind reell und die 5 Kegel sind reell. Die 10 Kegelschnittsysteme sind reell und jedes hat 4 Paare reeller Geraden.

B. 8 Gerade sind reell und ebenso 3 Kegel; die übrigen 8 Geraden sind imaginär ohne reelle Punkte; 6 Kegelschnittsysteme aber kein Paar conjugirter Geraden sind reell.

C. 4 Gerade und ein Kegel sind reell. Zwei Kegelschnittsysteme sind reell, jedes mit 2 Paaren reeller Geraden und 2 Paaren conjugirter Geraden. Von den 12 imaginären Geraden haben 4 einen reellen Punkt, die anderen keinen.

D. Keine Gerade ist reell; die 5 Kegel sind es dagegen sämmtlich. 6 Kegelschnittsysteme sind reell und enthalten kein Paar reeller oder conjugirter Geraden. Alle 16 Geraden sind imaginär ohne reelle Punkte.

E. Keine Gerade ist reell und die 5 Kegel sind es sämmtlich. Alle 16 Geraden sind imaginär aber mit einem reellen Punkt. Zwei Kegelschnittsysteme sind reell; zu jedem von ihnen gehören 4 Paare conjugirter imaginärer Geraden.

F. Keine Gerade ist reell und nur 3 Kegel sind reell. Von den 16 Geraden haben 8 einen einzigen reellen Punkt und 8 keinen. Zwei Kegelschnittsysteme sind reell und jedes hat 2 Paare conjugirter Geraden.

Die Fläche S_4, von der hier die Rede ist, wurde zuerst von Clebsch mit Hülfe ihrer ebenen Abbildung studirt. Vergl. Kap. 9, § 7.

Bei dieser Abbildung entspricht einer Geraden von S_4 in der Ebene ein durch 5 Fundamentalpunkte gehender Kegelschnitt; den 5 Geraden, welche die Gerade schneiden, entsprechen die 5 Funda-

mentalpunkte, und den übrigen 10 Geraden diejenigen, welche diese 5 Punkte zu je zweien verbinden.

Jedem Paar conjugirter Kegelschnittsysteme von S_4 sind die durch 4 der 5 Fundamentalpunkte gehenden Kegelschnitte und die durch den 5^{ten} Punkt gehenden Geraden zugeordnet.

Die Bilder der ebenen Schnitte von S_4 sind ∞^3 Curven 3^{ter} Ordnung eines linearen Systems von Curven 3^{ter} Ordnung, welche die 5 Fundamentalpunkte enthalten.

Das Bild des Doppelkegelschnitts von S_4 ist eine Curve 3^{ter} Ordnung desselben Systems.

Für das Studium der Fläche wichtig ist auch die Eigenschaft, dass sie mittelst einer birationalen Transformation des Raums (Kap. 9, § 7) mit einer allgemeinen Fläche 3^{ter} Ordnung in Beziehung gebracht werden kann. Untersuchungen dieser Art haben Geiser, *Crelle,* 70 und Cremona, *Rend. Ist. Lomb.*, 1871 angestellt.

Durch die Transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_1 y_3 : y_2 y_4 - y_3^2$$

oder

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 x_2 : x_2^2 : x_2 x_3 : x_1 x_4 + x_3^2$$

wird einer allgemeinen Fläche 3^{ter} Ordnung S_3, welche durch den Kegelschnitt $x_2 = 0$, $x_1 x_4 + x_3^2 = 0$ des Raums (x) geht, aber in $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ von der Ebene $x_1 = 0$ nicht berührt wird, in dem Raum (y) eine Fläche S_4 von der 4^{ten} Ordnung mit Doppelkegelschnitt zugeordnet. Cremona.

Die Gleichungen des Doppelkegelschnitts lauten

$$y_1 = 0, \quad y_2 y_4 - y_3^2 = 0.$$

Den 27 Geraden von S_3 entsprechen 1) *die 16 Geraden von* S_4, 2) *10 Kegelschnitte von S_4, die durch*

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

gehen, und in diesem Punkt von der Ebene $y_2 = 0$ berührt werden, 3) *der Punkt* $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

Mit Hülfe dieser Sätze lässt sich auch die ebene Abbildung von S_4 aus der ebenen Abbildung von S_3 ableiten.

Ein specieller Fall der hier betrachteten Fläche ist derjenige, in welchem der Doppelkegelschnitt in zwei sich schneidende Gerade zerfällt.

Die Gleichung der Fläche lässt sich alsdann auf die Gestalt

$$x_1^2 x_2^2 + 2 m x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4^2 \varphi = 0$$

zurückführen, worin φ *eine quadratische Form ist. Die beiden Doppelgeraden liegen in der Ebene* $x_4 = 0$ *und sind die Schnitte dieser Ebene mit den beiden Ebenen*

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0.$$

In diesem Fall hat die Fläche wieder 16 Gerade, von denen 8 die eine der Doppelgeraden treffen, und 8 die andere; jede der ersten 8 Geraden wird von 4 Geraden des anderen Systems geschnitten.

Auf jeder der beiden Doppelgeraden gibt es zwei uniplanare oder Cuspidalpunkte.

Die Kummer'schen Kegel speciell reduciren sich auf 4; der 5[te] *besteht aus der Gesammtheit der beiden Doppelgeraden, als Enveloppe von Ebenen betrachtet.*

Bemerkenswerth ist ferner der Fall, in welchem der Kegelschnitt nicht *doppelt*, sondern *cuspidal*, d. h. jeder seiner Punkte *uniplanar* ist.

Die charakteristischen Zahlen für diesen Fall sind in der Tabelle § 1 angegeben.

Alsdann gehen die Berührungsebenen an die Fläche in den Punkten des Cuspidalkegelschnitts sämmtlich durch einen und denselben Punkt.

Es existirt dann eine Tangentialebene, welche die Fläche längs eines Kegelschnitts berührt, der den Cuspidalkegelschnitt in zwei Punkten trifft.

Eine beliebige durch einen dieser Punkte gehende Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, welche diesen Punkt zum Selbstberührungspunkt (dem Punkt, in dem sich zwei Aeste berühren, tacnodo, close-point) hat.

Die Fläche besitzt zwei Quadrupel von Geraden; die vier Geraden eines Quadrupels gehen sämmtlich durch einen der beiden Selbstberührungspunkte und liegen in der Ebene der Geraden, welche die beiden Kegelschnitte, den Cuspidalkegelschnitt und den anderen in diesem Punkt berühren. Nennt man die beiden Ebenen der zwei Quadrupel π, π', so gilt der Satz:

Die Fläche hat nur drei Kummer'sche Kegel, deren Spitzen in der Geraden liegen, in welcher sich die beiden Ebenen π, π' *schneiden; diese drei Kegel gehen durch den Cuspidalkegelschnitt.*

Man hat dann auch die Fälle untersucht, in welchen die Fläche ausser dem Doppel- oder dem Cuspidalkegelschnitt noch isolirte Doppelpunkte hat.

Eine Fläche 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt kann nicht mehr als vier solcher isolirter Doppelpunkte haben.

Diese Flächen wurden ebenso wie viele andere specielle Flächen besonders von Korndörfer, *Math. Ann.*, 1, 2 und später von Segre, ib., 24 studirt.

Wenn ein isolirter Doppelpunkt auf den Doppelkegelschnitt zu liegen kommt, so erhält man eine Fläche, welche sich, wie Cremona, *Rend. Ist. Lomb.*, 1871 gezeigt hat, aus einer Fläche 2ter Ordnung mit Hülfe der birationalen Transformation, von der oben die Rede war, ableiten lässt.

Andere analoge Fälle hat Segre, l. c. betrachtet.

Wird angenommen, der Kegelschnitt sei doppelt und nicht degenerirt, so lassen sich in Bezug auf die übrigen Doppelpunkte, welche die Fläche noch haben kann, 18 verschiedene Arten von Flächen unterscheiden.

Mit dem Studium der Flächen 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt hat Kummer 1863, *Crelle,* 64 den Anfang gemacht. Später beschäftigten sich, von einem anderen Standpunkt ausgehend, Moutard, Darboux und Casey eingehend mit einem speciellen und sehr beachtenswerthen Fall solcher Flächen, mit den *Cycliden,* von denen im folgenden Paragraphen die Rede sein wird; bei diesen ist der Doppelkegelschnitt der unendlich ferne imaginäre Kreis. Die speciellen Fälle des *Torus* (einer durch die Umdrehung eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene Axe erzeugten Ringfläche) und der Dupin'schen *Cyclide* waren schon seit langer Zeit bekannt.

Im Jahr 1868 hat Clebsch, *Crelle,* 69 bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die ebene Abbildung der Flächen, die Studien über die Flächen 4ter Ordnung mit allgemeinem Doppelkegelschnitt wieder aufgenommen. Auf ihn folgten Cremona, Korndörfer, l. c., Cayley, *Quart. Journ.,* 10, 11, 1870, 1871.

Wir wollen hier die Arbeiten über die Cycliden nicht citiren, die in dem nächsten Paragraphen besprochen werden sollen, und geben nur noch als besonders wichtig die Zeuthen'sche Festschrift vom Jahr 1879, *Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit,* Kopenhagen an, die in dänischer Sprache verfasst, von Loria, *Ann. di mat.* [illegible] Italienische übersetzt ist; in ihr hat sich der Verfasser ins Besondere die Classification dieser Flächen in der oben angegebenen Art angelegen sein lassen.

Im Jahr 1884 unternahm es Segre, die ganze Theorie derartiger Flächen in einer umfangreichen in Bd. 24 der *Math. Ann.* enthaltenen Arbeit von einem neuen Gesichtspunkt aus zu behandeln, indem er diese Flächen als Projectionen des Schnitts zweier in dem Raum von vier Dimensionen gelegener quadratischer Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen in den dreidimensionalen Raum betrachtete.

Die Segre'sche Arbeit ist reich an Resultaten, von denen ein Theil schon bekannt war, andere neu sind, und enthält am Schluss eine detaillirte Classification aller verschiedenen Arten von Flächen mit Doppel- oder Cuspidalkegelschnitt, die degenerirt sind oder nicht, und entweder ausserdem isolirte Doppelpunkte oder keine solche Punkte haben.

Die Flächen mit Cuspidalkegelschnitt hatte vor ihm schon Cremona, *Acc. Bologna,* 1872 und Tötössy, *Math. Ann.*, 19 untersucht.

Eingehende Studien über die Configuration der 16 Geraden und der 40 dreifach berührenden Ebenen der Fläche findet man in den Arbeiten von Berzolari, *Ann. di mat.*, 13 und Pereno, ib., 21; wir verweisen auf die Einleitung der citirten Segre'schen Arbeit und das wiederholt erwähnte Buch Loria's, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, Torino 1896, in dem ausführliche historische und literarische Angaben enthalten sind.

§ 7. Die Cycliden. Die Dupin'sche Cyclide.

Die *Cycliden* sind Flächen 4^{ter} Ordnung, die zum Doppelkegelschnitt den unendlich fernen imaginären Kreis haben. Der Name Cyclide stammt von Casey und Darboux, während Cayley diese Flächen *bicyclische oder bicirculäre Flächen* nannte.

Die Cyclide ist die Enveloppe einer Kugel, die eine feste Kugel orthogonal schneidet, während ihr Centrum eine feste Fläche 2^{ten} Grads beschreibt. Casey, *Phil. Trans.*, 161, 1871.

Die Gleichung der Cyclide lässt sich auf verschiedene Art schreiben:

1) Es seien $X_1 = 0$. $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ die Gleichungen von vier Kugeln; *sie lautet dann:*

$$\varphi_2(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,$$

[illegible] *allgemeine Form* 2^{ten} *Grads darstellt.*

[illegible] *der Erzeugung der Cyclide feste Kugel ist die* [illegible] *Fläche dieser 4 Kugeln; jede der letzteren stellt eine* [illegible] *auf der festen Kugel senkrecht stehenden* [illegible].

[illegible] *Gleichung der Cyclide kann ferner auf die Form*

$$[\text{illegible}] + S_2 = 0 \quad \text{(in Cartesischen Coordinaten)}$$

[illegible] *darin ist* $S_2 = 0$ *die Gleichung einer Fläche* [illegible].

[illegible] *lässt sich auch durch die Gleichungen von fünf* [illegible]

$$X_1 = 0, \ldots, X_5 = 0,$$

[illegible] *orthogonal schneiden, mittelst einer der Formeln*

$$a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2 + a_4 X_4^2 = 0,$$
$$a_1' X_2^2 + a_2' X_3^2 + a_3' X_4^2 + a_4' X_5^2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1^{IV} X_5^2 + a_2^{IV} X_1^2 + a_3^{IV} X_2^2 + a_4^{IV} X_3^2 = 0$$

[illegible] *welchen die a constante Coefficienten bedeuten;* [illegible] *sind sämmtlich einander äquivalent, weil zwischen* [illegible] *der fünf X eine identische lineare Relation be-*[illegible] *den Bedingungen der Orthogonalität der fünf Kugeln* [illegible] *entspricht.*

[illegible] *Relation lautet*

$$\frac{X_1^2}{r_1^2} + \frac{X_2^2}{r_2^2} + \frac{X_3^2}{r_3^2} + \frac{X_4^2}{r_4^2} + \frac{X_5^2}{r_5^2} = 0,$$

[illegible] $\ldots r_5$ *die Radien der fünf Kugeln bezeichnen.*

[illegible] *den obigen 5 Gleichungen ist* $X_5 = 0$ *in der ersten,* [illegible] *in der zweiten,* $\ldots$, $X_4 = 0$ *in der letzten Gleichung* [illegible] *Erzeugung der Cyclide feste Kugel und die übrigen* [illegible] *stellen verschiedene Lagen der beweglichen Kugel dar.* [illegible] *Fläche wird daher auf 5 verschiedene Arten erzeugt.*

Eine wichtige Eigenschaft der Cycliden besteht darin, *dass* [illegible] *anallagmatische Flächen sind, d. h., dass sie mittelst einer* [illegible]*transformation durch reciproke Radienvectoren (Inversion) in sich* [illegible] *verwandelt werden.*

Die anallagmatischen Flächen 4ter Ordnung sind die Cycliden. Moutard.

Die der Inversion zu Grund liegende Kugel ist die feste Kugel, zu welcher die bewegliche, welche die Cyclide auf die oben angegebene Art erzeugt, orthogonal ist. Das Centrum dieser Kugel ist die Spitze eines der 5 Kummer'schen Kegel der Fläche nach der allgemeinen Theorie in § 6.

Die Cyclide ist eine anallagmatische Fläche in Bezug auf 5 verschiedene Inversionen, selbstverständlich den 5 Kummer'schen Kegeln entsprechend.

Dieser Satz entspricht dem oben angeführten Theorem, nach welchem dieselbe Cyclide sich auf fünf verschiedene Arten erzeugen lässt.

Charakteristisch für die Cycliden ist die Eigenschaft, *dass die doppelt berührenden Ebenen (die Ebenen, welche die Kummer'schen Kegel berühren) die Fläche, statt in einem Paar von Kegelschnitten, wie in dem in § 6 behandelten Fall, in einem Paar von Kreisen schneiden.* Mithin lässt sich auch behaupten:

Durch jeden Punkt des Raums gehen 10 Ebenen, welche die Fläche in einem Paar von Kreisen schneiden. Daher stammt der ihr von Cayley gegebene Name *bicirculäre Fläche.*

Wir wollen annehmen, es liege eine Cyclide vor, die auf die oben angegebene Art von einer beweglichen Kugel erzeugt worden ist, welche eine feste Kugel $X_i = 0$ orthogonal schneidet, während ihr Centrum eine Fläche 2ter Ordnung $S_i = 0$ beschreibt.

Wir ziehen von dem Centrum der Kugel $X_i = 0$ aus den Kegel, dessen Berührungsebenen senkrecht auf den Erzeugenden des Asymptotenkegels der Fläche 2ter Ordnung $S_i = 0$ stehen; *dieser Kegel ist einer der 5 Kummer'schen Kegel.*

Jedem Kummer'schen Kegel entspricht auf diese Art eine Fläche 2ter Ordnung $S_i = 0$.

Die 5 Flächen 2ter Ordnung $S_i = 0$ sind confocal.

Der Schnitt der Fläche 2ter Ordnung $S_i = 0$ mit der entsprechenden Kugel $X_i = 0$ heisst eine *Focalcurve* der Cyclide; *es gibt mithin 5 Focalcurven.*

Wir bemerken dabei, dass die Definition der *Focalcurven* (Kap. 4, § 3), welche Dupin, Chasles und Andere für Flächen 2ter Ordnung gegeben haben, von Darboux, *Compt. Rend.*. 1864 auf eine beliebige Fläche ausgedehnt worden ist.

Man betrachte die der Fläche umschriebene Developpable, deren Tangentialebenen auch den unendlich fernen imaginären Kreis berühren; *die Doppelcurve dieser Developpablen wird die Focalcurve der Fläche genannt. Durch jede Tangente an die Focalcurve lassen sich zwei Ebenen legen, welche zugleich die Fläche und den unendlich fernen Kreis berühren.*

Gehört nun der unendlich ferne Kreis der Fläche an, so lassen sich ausser den gewöhnlichen Focalcurven auch *die sogenannten singulären Focalcurven* betrachten (Laguerre), *welche die Doppellinien der Developpablen sind, die der Fläche längs der Punkte des unendlich fernen imaginären Kreises umschrieben ist.*

Wichtig ist das folgende Theorem über die singulären Focalcurven der Cyclide (Laguerre, De la Gournerie):

Die singulären Focalcurven der Cyclide sind die gewöhnlichen Focalcurven einer jeden der 5 Flächen 2ten Grads, welche auf die oben angegebene Art zur Erzeugung der Cyclide dienen: diese 5 Flächen 2ten Grads als confocale Flächen haben dann dieselben Focallinien.

In einem Kugelbüschel gibt es 12 Kugeln, welche eine gegebene Cyclide berühren; in einem Ebenenbüschel existiren 12 die Cyclide berührende Ebenen und in einem Strahlenbündel 12 auf der Cyclide senkrechte Strahlen.

Die durch die Gleichung

$$\frac{X_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{X_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{X_3^2}{\lambda - a_3} + \frac{X_4^2}{\lambda - a_4} + \frac{X_5^2}{\lambda - a_5} = 0,$$

in welcher λ einen variabelen Parameter bezeichnet, dargestellten Cycliden sind sämmtlich confocal; sie schneiden einander orthogonal und durch einen Punkt des Raums gehen drei Cycliden eines solchen Systems; sie bilden mithin ein sogenanntes dreifaches orthogonales System. Siehe Kap. 16, § 14.

Man kann die drei entsprechenden Werte von λ zu *Coordinaten eines Punkts des Raums* wählen.

Zwei Cycliden des Systems schneiden sich längs ihrer Krümmungslinien; diese sind daher algebraische Curven. Vergl. Kap. 16, § 9.

Die Krümmungslinien der Cycliden bilden ein orthogonales isothermes System. Siehe Kap. 16, § 8.

Setzt man specielle metrische Eigenschaften der Fläche 2ter Ordnung, welche zur Construction der Cyclide dient, voraus, so ergeben sich Cycliden von besonderen Formen.

Ist diese Fläche 2ten Grads eine Kugel, so wird die Cyclide die Rotationsfläche, welche ein Cartesisches Oval (Kap. 17, § 11) *bei der Drehung um seine Focalaxe beschreibt. Alsdann ist der unendlich ferne imaginäre Kreis für die Fläche cuspidal.*

Wenn die Fläche 2ten Grads eine Umdrehungsfläche ist, so berührt die gewöhnliche Focalcurve der Cyclide den unendlich fernen Kreis doppelt. Darboux nannte diese Cycliden *Cartesische.*

Ist schliesslich die quadratische Fläche keine Mittelpunktsfläche, also ein Paraboloid, so liegt eine der singulären Focalcurven im Unendlichen und die Cyclide zerfällt in eine Fläche 3ter Ordnung, die durch den unendlich fernen imaginären Kreis geht und in die Ebene im Unendlichfernen selbst.

Man erhält alsdann die sogenannte *parabolische Cyclide oder Cyclide 3ter Ordnung.*

Sie enthält offenbar eine in der unendlich fernen Ebene gelegene Gerade, durch die fünf die Fläche dreifach berührende Ebenen gehen; die Berührungspunkte dieser Ebenen sind die 5 Spitzen der 5 Kummer'schen Kegel, von welchen sich ein jeder auf ein Paar in der Fläche liegender Geraden reducirt; jede durch eine der so gebildeten 10 Geraden gehende Ebene schneidet die Fläche natürlich in Kreisen.

Aus einer allgemeinen Cyclide ergibt sich eine Cyclide 3ter Ordnung, wenn man die erstere durch reciproke Radienvectoren transformirt (Kap. 17, § 1) *und das Inversionscentrum auf die Fläche selbst legt.*

Nimmt man nun an, die Fläche 2ten Grads S und die Leitkugel X haben eine specielle Lage zueinander, sie berühren sich z. B., so erhält man *Cycliden mit Doppelpunkten.*

Wie die in dem vorigen Paragraphen besprochenen Flächen, so können auch die Cycliden einen bis vier isolirte Doppelpunkte besitzen.

Die Cycliden mit Doppelpunkten lassen sich immer als Inverse (durch eine Inversion transformirte Flächen, Kap. 17, § 1*) von Flächen 2ter Ordnung ansehen.*

Die Inverse der allgemeinen Fläche 2ten Grads ist eine Cyclide mit einem Doppelpunkt, die des allgemeinen Kegels 2ten Grads eine solche mit zwei, die der Rotationsfläche 2ten Grads eine solche mit drei und schliesslich die Inverse des Rotationskegels eine Cyclide mit vier isolirten Doppelpunkten (die Dupin'sche Cyclide).

Die Cyclide mit nur einem Doppelpunkt ergibt sich, wenn die Fläche 2^{ten} Grads S_i bei der oben beschriebenen Erzeugung der Cyclide die Kugel X_i, die Leitkugel, in nur einem Punkt berührt oder diese letztere sich auf einen Punkt reducirt.

Eine solche Cyclide lässt sich auch als die sogenannte *Fusspunktfläche* (Kap. 17, § 2) einer Fläche 2^{ter} Ordnung in Bezug auf einen Punkt O der letzteren definiren, d. h. als *der Ort der Fusspunkte der von O aus auf die Berührungsebenen an die Fläche 2^{ter} Ordnung gefällten Lothe.*

Wenn die Fläche 2^{ten} Grads S die Kugel X *doppelt berührt,* so ergibt sich die *Cyclide mit zwei Doppelpunkten;* sie ist, wie gesagt, die Inverse eines allgemeinen Kegels 2^{ten} Grads.

Den Fall, in welchem diese beiden Doppelpunkte auf den unendlich fernen imaginären Kreis fallen, studirten De la Gournerie, *Journ. de l'Éc. pol.*, 23, 1863; *Journ. de Liouville,* (2), 10, 1865 und Cayley, *Quart. Journ.*, 10, 11, 1870.

Die Fläche, welche von einem Kegelschnitt erzeugt wird, der um eine nicht in seiner Ebene liegende Gerade rotirt, ist im Allgemeinen eine Cyclide mit nur zwei auf dem unendlich fernen imaginären Kreis liegenden Doppelpunkten, welche die beiden Kreispunkte in der auf der Rotationsaxe senkrecht stehenden Ebene sind.

Wir gehen schliesslich zu der Dupin'schen Cyclide (mit vier Doppelpunkten) über.

Bei der Dupin'schen Cyclide sind wenigstens zwei der Doppelpunkte imaginär, die 16 Geraden sind es im Allgemeinen sämmtlich und von den 6 Verbindungsgeraden der Doppelpunkte sind wenigstens 4 imaginär.

Von den fünf Kummer'schen Kegeln ist nur einer nicht degenerirt; seine Berührungsebenen schneiden mithin die Fläche in Kreisen; die übrigen vier degeneriren in vier singuläre Tangentialebenen, welche die Fläche längs einer ganzen Curve berühren, und von denen wenigstens zwei stets imaginär sind.

Die Krümmungslinien (Kap. 16, § 9) *der Dupin'schen Cyclide sind Kreise.*

Die Dupin'sche Cyclide lässt sich als die Enveloppe (Kap. 16, § 6) *einer Kugel definiren, deren Centrum sich in einer Ebene bewegt, und die zwei gegebene Kugeln berührt; oder: als die Enveloppe einer Kugel, deren Centrum sich auf einem Kegelschnitt bewegt, und die eine andere gegebene Kugel berührt, oder auch* *als die Enveloppe einer Kugel, deren Centrum auf einem Kegelschnitt fortrückt, und die eine andere Kugel senkrecht schneidet.*

Die von Dupin gegebene Definition, nach welcher sie die *Enveloppe von Kugeln ist, welche drei gegebene Kugeln berühren,* individualisirt nicht eine einzige Cyclide, sondern deren *vier*.

Es leuchtet ferner ein, dass *der Torus,* d. h. die Fläche, welche von einem Kreis erzeugt wird, der um eine in seiner Ebene liegende Gerade rotirt, *eine specielle Dupin'sche Cyclide ist.*

Wenn die 4 Doppelpunkte imaginär sind, so erhält man die *Ringcyclide,* von welcher der *Torus* ein besonderer Fall ist.

Sind nur zwei der Doppelpunkte reell (andere Fälle sind nicht möglich, siehe oben), so ergeben sich zwei Arten von Cycliden: 1) die *Horncyclide,* welche aus zwei Schalen besteht, von denen die eine ausserhalb der anderen liegt; die Schalen endigen in Spitzen, und sind durch die beiden Doppelpunkte verbunden; und 2) die *Spindelcyclide,* die aus zwei in zwei Punkten vereinigten Schalen besteht, von denen die eine sich innerhalb der anderen befindet.

Wie bei den allgemeinen Cycliden, so kann man sich auch bei den Dupin'schen denken, der Kegelschnitt, der die Centren der beweglichen Kugeln enthält, deren Enveloppe die Cyclide ist, sei eine *Parabel,* also eine ähnliche Voraussetzung machen, wie die, aus welcher bei den allgemeinen Cycliden die parabolischen oder Cycliden 3$^{\text{ten}}$ Grads hervorgingen.

Man erhält so *die parabolischen Dupin'schen Cycliden, welche Flächen nur 3$^{\text{ter}}$ Ordnung sind,* weil die unendlich ferne Ebene wegfällt.

Von solchen Cycliden lassen sich die folgenden Typen construiren: 1) *die parabolische Horncyclide,* bei der zwei Doppelpunkte reell sind, und 2) *die parabolische Ringcyclide,* bei der die 4 Doppelpunkte sämmtlich imaginär sind.

Diese Flächen haben Schalen, welche sich ins Unendliche erstrecken; ihnen gehören eine unendlich ferne Gerade und einige andere reelle Geraden an.

Von diesen sämmtlichen Cycliden hat man Gipsmodelle angefertigt; siehe den *Catalog mathematischer Modelle* von Brill in Darmstadt.

Die Classification der Cycliden führte zuerst Loria, *Acc. Torino,* 1884 vollständig durch, *welcher 18 verschiedene Species von Cycliden je nach den übrigen Singularitäten, welche die Fläche besitzen kann, unterschied;* diese 18 Species entsprechen natürlich den 18 Arten von Flächen 4[ter] Ordnung mit allgemeinem Doppelkegelschnitt, die kurz nachher zugleich mit anderen Flächen Segre studirt hat; siehe oben § 6. Dieser letztere Autor wies dann auch nach, *dass von den 18 Arten von Cycliden nur 10 reellen Cycliden entsprechen (Gleichungen mit reellen Coefficienten haben).* Siehe *Math. Ann.*, 24, p. 439.

Die älteste Cyclide, die untersucht wurde, war die mit 4 Doppelpunkten (Dupin, *Applic. de Géom.*. 1822), von welcher der *Torus* ein specieller Fall ist. Mannheim, *Nouv. Ann.*, 1860 zeigte, dass jede Dupin'sche Cyclide sich durch eine Inversion in einen Torus überführen lässt.

Bald nachher fing man an, die Cycliden in Bezug auf ihre anallagmatischen Eigenschaften (siehe oben) zu studiren. Dahin gehören die Arbeiten von Moutard, *Nouv. Ann. de Math.*, (2), 3, 1864; Darboux, *Ann. de l'Éc. norm.*, 1865 u. ff., 1872; Maxwell, *Quart. Journ.*, 9, 1867, der eine Classification zu geben versuchte, und später eine umfangreiche Abhandlung von Casey, *Phil. Trans.*, 161, 1871.

Ueber die Theorie dieser Flächen hat Darboux eine separate Monographie veröffentlicht: *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques*, Paris 1873, 2. éd. 1896, in welcher der Leser Näheres findet. Schliesslich unternahm Loria im Jahr 1884, *Mem. Acc. Torino,* 36 das Studium der Cycliden von einem anderen Gesichtspunkt aus und bediente sich, gestützt auf die schon vor ihm von Lie, Klein und Reye eingeführten Begriffe, der sogenannten Kugelgeometrie, in welcher die Kugel als Raumelement betrachtet wird, sowie der Kugelcomplexe und -Congruenzen zur Classification der Cycliden in 18 Species. Siehe weiter unten Kap. 14. Vergl. auch Bôcher, *Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie,* Leipzig 1894.

§ 8. Die Flächen 4[ter] Ordnung mit einer Doppelgeraden.

Die Gleichung dieser Fläche kann auf die folgende Art geschrieben werden (Kummer):

$$p^2S + 2pqS_1 + q^2S_2 = 0;$$

darin sind p, q lineare und die S quadratische Funktionen der Coordinaten. Der Schnitt der Ebenen $p = 0$, $q = 0$ ist die Doppelgerade der Fläche.

Dieser Gleichung lässt sich auch die Gestalt geben (Cayley):

$$\varphi_4(x_1, x_2) + \varphi_3(x_1, x_2)x_3 + \psi_3(x_1, x_2)x_4 + \\ + \varphi_2(x_1, x_2)x_3^2 + \psi_2(x_1, x_2)x_3x_4 + \chi_2(x_1, x_2)x_4^2 = 0;$$

dabei sind die $\varphi_4, \varphi_3, \psi_3, \ldots$ *Functionen von* x_1, x_2 *vom* 4^{ten}, 3^{ten}, ... *Grad.*

Der Schnitt der Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ *ist die Doppelgerade der Fläche.*

Die Fläche ist im Allgemeinen von der 20^{ten} *Klasse.*

Die Fläche enthält 16 Gerade ausser der Doppelgeraden; ferner gibt es 64 dreifach berührende Ebenen, von denen jede die Fläche in zwei Kegelschnitten schneidet; einer der vier Schnittpunkte dieser letzteren liegt auf der Doppelgeraden und die übrigen drei sind die drei Berührungspunkte der dreifach berührenden Ebene.

Die 16 Geraden liegen zu je zweien mit der Doppelgeraden in einer und derselben Ebene; sie gruppiren sich also in 8 Paare, von denen jedes die Doppelgerade schneidet.

Man erhält so 64 Kegelschnittpaare und 8 Geradenpaare; jedes Kegelschnittpaar ist in Bezug auf jedes Geradenpaar so gelegen, dass ein Kegelschnitt des Paares nur eine Gerade des Geradenpaares trifft und der andere Kegelschnitt die andere Gerade.

Die hauptsächlichsten Specialfälle, welche bei einer solchen Fläche auftreten können, sind die folgenden:

Eine der Tangentialebenen in den Punkten der Doppellinie kann immer dieselbe sein; *dieser Fall tritt ein, wenn die drei Functionen* $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$ *der obigen Gleichung einen gemeinschaftlichen Factor haben.*

Hier fällt eine der 16 Geraden der Fläche mit der Doppelgeraden zusammen.

Die beiden Tangentialebenen in jedem Punkt der Doppelgeraden können immer dieselben sein; *dies geschieht, wenn die drei eben genannten Functionen sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden.*

Die Punkte der Doppelgeraden können ferner sämmtlich uniplanar sein; *alsdann ist diese Gerade eine Cuspidalgerade der Fläche;* die Tangentialebene in jedem Punkt der Cuspidalgeraden variirt dann von Punkt zu Punkt. *Dieser Fall tritt ein, wenn die drei letzten Terme sich auf die Form*

$$(x_1x_3 + x_2x_4)\,(x_3\varphi_1 + x_4\psi_1)$$

reduciren lassen, worin φ_1, ψ_1 *lineare Functionen in* x_1, x_2 *sind*

Ausserdem kann es vorkommen, dass die Tangentialebenen in den Punkten der Cuspidalgeraden immer dieselben sind: *dies geschieht, wenn die drei letzten Terme auf einen der beiden Typen*

$$x_2^2 x_3 x_4 \quad \text{oder} \quad x_2^2 x_3^2$$

zurückgeführt werden können.

In dem Fall der Cuspidalkante ist die Fläche 12^{ter} Classe.

Eine Fläche 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelgeraden kann ausserhalb derselben bis 8 isolirte Doppelpunkte haben.

Die Gleichung einer Fläche 4^{ter} Ordnung mit Doppelgerade und vier Doppelpunkten kann auf die folgende Art gefunden werden: Es mögen drei Flächen 2^{ten} Grads $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$, die eine Gerade gemeinschaftlich haben, gegeben sein: sie werden ausserdem noch vier Punkte gemeinsam haben: *eine quadratische Form von S, S', S'', gleich Null gesetzt, ist alsdann die Gleichung einer Fläche 4^{ter} Ordnung, für welche diese Gerade und diese Punkte doppelt sind.*

In einem solchen Fall gibt es vier Ebenen, die durch die Doppelgerade und jeden der Doppelpunkte gehen und in jeder der Ebenen liegen zwei Gerade der Fläche, welche sich in dem Doppelpunkt schneiden.

Die Fläche 4^{ter} Ordnung mit Doppelgerade und 8 Doppelpunkten hat zur Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_2, & 1 \\ x_1, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ x_2, & a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ 1, & a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

worin a_{11}, a_{22}, a_{12} quadratische Formen in x_3 und x_4, ferner a_{23}, a_{13} lineare Formen und a_{33} eine Constante sind.

Es gibt 4 Ebenen, welche durch die Doppelgerade gehen und die Fläche längs je einer anderen Geraden berühren; auf jeder dieser Geraden liegen zwei Doppelpunkte.

Die acht Doppelpunkte sind zu je vieren in 8 Ebenen gelegen und durch jeden von ihnen gehen 4 solche Ebenen.

Auf diese Fläche kam Julius Plücker, *Neue Geometrie des Raumes, gegr. auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, mit einem Vorwort von Clebsch, in 2 Abth., 1^{te} Abth., Leipzig 1868, 2^{te} Abth. von Klein herausg., ib. 1869, 1, N. 218, als er die Theorie der Liniencomplexe studierte. Siehe Kap. 14.

Bezüglich der Theorie der Flächen, von welchen in diesem Paragraphen die Rede war, verweisen wir auf Salmon-Fiedler, *Geom. des Raumes,* 2, § 335 u. ff., den wir bei unserer Darstellung besonders benutzt haben; man sehe auch die in § 5 citirten Arbeiten von Kummer und Clebsch, *Math. Ann.*, 1, p. 260 nach. Ein Gipsmodell einer Fläche 4^{ter} Ordnung mit Doppelgerade befindet sich auch unter den von L. Brill in Darmstadt besorgten Modellen.

§ 9. Die Römerfläche Steiner's.

Die Steiner'sche Fläche hat die Grundeigenschaft, dass sie von jeder ihrer Berührungsebenen in einem Paar Kegelschnitte geschnitten wird.

Sie besitzt drei Doppelgerade, die sich in einem Punkt treffen, der für die Fläche natürlich ein dreifacher Punkt ist.

Von den vier Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte, in denen die Fläche von einer ihrer Berührungsebenen geschnitten wird, ist einer der Berührungspunkt und von den drei übrigen liegt jeder auf einer der drei Doppelgeraden.

Die Steiner'sche Fläche ist 3^{ter} Classe und der von einem beliebigen Punkt an sie gezogene Berührungskegel ist 6^{ter} Ordnung.

Diese Fläche gehört zu den von Kummer, *Berl. Monatsber.*, 1862, 1866, 1872 studirten Flächen, *die sich durch die Eigenschaft auszeichnen, dass sie vier singuläre Berührungsebenen haben, welche sie längs eines Kegelschnitts berühren; ihre Gleichung lautet:*

$$S^2 - \lambda X_1 X_2 X_3 X_4 = 0,$$

worin $S = 0$ eine Fläche 2^{ten} Grads ist und

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ X_4 = 0$$

die Gleichungen der vier singulären Berührungsebenen sind.

Gibt man der Form S eine specielle in Bezug auf die X geeignete Gestalt, so erhält man verschiedene Flächen mit verschiedenen Eigenschaften; so lässt sich aus dieser allgemeinen Gleichung die Gleichung der Kummer'schen Fläche mit 16 Knotenpunkten ableiten; vergl. § 3; specialisirt man dagegen auf andere Art, so ergibt sich die Steiner'sche Fläche.

Der Gleichung einer solchen Fläche lässt sich ins Besondere die Form geben:

$$\{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - 2X_1X_2 - 2X_2X_3 - 2X_3X_1 - \\ - 2X_1X_4 - 2X_2X_4 - 2X_3X_4\}^2 - 64X_1X_2X_3X_4 = 0,$$

die man auch

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3} + \sqrt{X_4} = 0$$

schreiben kann (Cayley).

Sie ist die reciproke Polarfläche der Fläche 3ter Ordnung mit 4 Doppelpunkten (die ja 4ter Classe ist, vergl. Kap. 11, § 1) *d. h. der sogenannten Cayley'schen Fläche.*

Wählt man zu Coordinatenebenen die drei Ebenen, von denen jede zwei der Doppelgeraden enthält, und eine andere, so lässt sich die Gleichung der Steiner'schen Fläche auf die Form

$$x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2x_3x_4 = 0$$

reduciren, worin die drei Doppelgeraden die Kanten des Dreiflachs

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0$$

sind. Kummer.

Eine besonders interessante Eigenschaft der Steiner'schen Fläche, welche zu ihrer ebenen Abbildung dient, wurde von Weierstrass gefunden, dem Steiner die Construction seiner Fläche mitgetheilt hatte; sie besteht darin, *dass die homogenen Coordinaten ihrer Punkte sich durch ternäre quadratische Formen ausdrücken lassen.* (Vergl. die Mittheilung von Kummer, *Crelle,* 64, p. 73.)

Cayley und Clebsch zeigten dann (siehe die unten citirte Arbeit), *dass sie überdies die allgemeinste Fläche vom Geschlecht Null ist, deren Coordinaten sich auf diese Art darstellen lassen.*

Geht man von der ersten der oben angegebenen Formen der Gleichung aus, *so lassen sich die Formeln für diese Darstellung immer auf die folgenden reduciren:*

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv (y_1 + y_2 + y_3)^2, \\ x_2 &\equiv (y_1 - y_2 - y_3)^2, \\ x_3 &\equiv (-y_1 + y_2 - y_3)^2, \\ x_4 &\equiv (-y_1 - y_2 + y_3)^2. \end{aligned}$$

Legt man dagegen die zweite Form der Gleichung zu Grund, *so ergiebt sich:*

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 2y_2y_3, \\ x_2 &\equiv 2y_3y_1, \\ x_3 &\equiv 2y_1y_2, \\ x_4 &\equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Formeln lässt sich *die ebene Abbildung* der Fläche studiren, wie es Clebsch und später Andere gethan haben. In Bezug auf diese ebene Abbildung *hat die Fläche die Eigenschaft, dass sie sich eindeutig ohne aussergewöhnliche Punkte abbilden lässt.* Clebsch, *Math. Ann.*, 5.

Der Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf alle Kegelschnitte einer Steiner'schen Fläche ist wiederum eine Steiner'sche Fläche. Lie.

Durch jeden Punkt der Steiner'schen Fläche gehen unendlich viele Kegelschnitte. Ausser den Flächen 2ten Grads und den Regelflächen 3ter Ordnung ist die Steiner'sche Fläche die einzige, welche diese Eigenschaft besitzt. Darboux, *Bull. des scienc. math.*, 2, 1880.

Zwei Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche schneiden sich in nur einem Punkt und durch zwei Punkte geht im Allgemeinen nur ein Kegelschnitt.

In jeder Ebene des Raums gibt es 6 die Fläche osculirende Gerade und 4 sie doppelt berührende Gerade. Durch jeden Punkt des Raums gehen 9 sie osculirende Gerade.

Jede algebraische auf der Fläche liegende Curve ist von gerader Ordnung.

Alle ebenen Schnitte der Fläche sind rationale Curven; die Römerfläche ist die einzige Nicht-Regelfläche von solcher Beschaffenheit. Picard, *Traité d'analyse; Crelle,* 100; siehe auch Guccia, *Rend. Palermo,* 1.

Eine andere wichtige Eigenschaft der Steiner'schen Fläche hat Kronecker formulirt und Castelnuovo bewiesen (*Rend. Lincei,* 1894):

Ausser den Regelflächen ist die Steiner'sche die einzige irreducible Fläche, welche von jeder Ebene eines gewissen doppelt unendlichen Systems in reducibeln Curven geschnitten wird.

Die Paare von Berührungsebenen an die Fläche in den Punkten einer Doppelgeraden bilden eine Involution, der die Ebenen angehören, welche durch die beiden anderen Doppelgeraden gehen.

In jeder Doppelgeraden gibt es zwei Cuspidalpunkte.

Die vier Berührungskegelschnitte der singulären Ebenen schneiden sich zu je zweien in den Cuspidalpunkten; dieselben vier Kegelschnitte liegen auf einer Fläche 2ten Grads, welche die Doppelgeraden in den Cuspidalpunkten schneidet.

Die Haupttangentencurven der Steiner'schen Fläche sind Raumcurven 4^{ter} Ordnung 2^{ter} Species. Clebsch, Cremona.

Die 4 singulären Ebenen der Fläche sind die vier stationären Ebenen für alle Haupttangentencurven.

Alle Haupttangentencurven 4^{ter} Ordnung haben 3 Sehnen gemeinschaftlich, welche sich in dem dreifachen Punkt der Fläche schneiden; durch jede dieser Sehnen lassen sich an jede Curve 4^{ter} Ordnung zwei osculirende Ebenen legen.

Die Haupttangentencurven werden auf der Fläche von unendlich vielen Curven 4^{ter} Ordnung geschnitten, die 8 Punkte gemeinsam haben.

Jeder der vier Kegelschnitte, längs welchen die Fläche von den 4 singulären Ebenen berührt wird, berührt 3 Kanten des Tetraeders der singulären Ebenen; zwei von ihnen schneiden sich auf einer Kante. Beltrami.

Es existiren ∞^8 Flächen 2^{ten} Grads, welche die Fläche in vier Kegelschnitten schneiden.

Diese sogenannte *Römerfläche Steiner's* wurde etwa im Jahr 1838 von Steiner während seines Aufenthalts in Rom entdeckt; er hinterliess jedoch nichts Schriftliches über sie und es war Kummer, der 1863 bei Gelegenheit seiner Arbeit über die Flächen 4^{ter} Ordnung, die unendlich viele Kegelschnitte enthalten, sie zuerst behandelte und sie in Folge von Mittheilungen von Weierstrass (vergl. dazu die Note von Weierstrass in den *Berl. Monatsber.* 1863 oder *Crelle,* 64, p. 77) Steiner zuschrieb.

Spätere Untersuchungen sind von Schröter, *Berl. Monatsber.,* 1863; *Crelle,* 64; Cremona, *Crelle,* 63; *Rend. Ist. Lomb.,* 1867; Lampe, *Dissert.,* Berlin, 1864; Cayley, *Crelle,* 64; *Proc. London math. soc.*, 3, 5, 1873; Clebsch, *Crelle,* 67; Reye, Th., *Geometrie der Lage,* Hannover, 1877, 1880, 2, p. 246 und Anderen.

Sturm, *Math. Ann.,* 3 betrachtete sie bei seinen Forschungen als specielle Fläche 3^{ter} Classe und erzeugte sie daher mit Hülfe eines Büschels von Flächen 2^{ten} Grads und einer zu diesem Büschel projectiven geraden Punktreihe.

In Folge ihrer wichtigen Eigenschaft, die Reciproke der Fläche 3^{ter} Ordnung mit 4 conischen Punkten zu sein (vergl. Kap. 11, § 1), wurde sie oft mit dieser zusammen studirt und die Eigenschaften der einen aus denen der anderen abgeleitet.

Einige Sätze über diese Fläche 3^{ter} Ordnung und ihre Reciproke fand Beltrami, dessen bez. Arbeiten bis 1863 zurückreichen, *Giorn. di Batt.*, 1; *Acc. Bologna,* 10, 1879.

Neuer ist die kleine separat erschienene Schrift von Gerbaldi, *La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche,* Torino 1881, der sich die Aufgabe stellte, alle Eigenschaften der Fläche aus ihrer allgemeinsten ebenen Abbildung mit Hülfe der ternären quadratischen Formen zu entwickeln.

Man beachte jedoch, dass auch der allgemeinste Fall (siehe Kap. 4, p. 41 u. ff. der Gerbaldi'schen Arbeit) sich immer auf die specielle von Clebsch angegebene Abbildung zurückführen lässt. Schliesslich machen wir noch auf eine neue Arbeit von Vahlen, *Acta math.*, 19 aufmerksam.

Cayley, *Proc. London math. Soc.,* 3 untersuchte die Fälle, in denen zwei oder die sämmtlichen drei Doppellinien zusammenfallen und fand, dass die Fläche alsdann die Reciproke der speciellen Flächen 3^{ter} Ordnung

$$x_1 x_3 x_4 + (x_1 + x_3) x_2^2 = 0$$

oder

$$x_1 x_3 x_4 + x_2^2 x_3 + x_1^3 = 0$$

wird.

Eine eingehende Betrachtung der Steiner'schen Fläche findet man in der S. 310 citirten Schrift Timerding's, *Ann. di mat.,* (3), 1, 1898. Vergl. auch Lacour, *Sur la surface de Steiner et Réduction à la forme canonique des formules qui donnent en fonction rationelle de deux paramètres les coordonnées d'un point de la surface de Steiner, Nouv. Annales de math.*, (3), 1, 1898.

In dem wiederholt citirten Catalog von L. Brill sind auch Modelle Steiner'scher Flächen aufgeführt.

§ 10. Die Regelflächen 4^{ter} Ordnung.

Die Developpable 4^{ter} Ordnung hat zur *Rückkehrkante* eine Raumcurve 3^{ter} Ordnung; in Folge des engen Zusammenhangs, welcher zwischen den Raumcurven und ihren osculirenden Developpablen besteht (vergl. Kap. 9), reducirt sich mithin die Theorie der Developpablen 4^{ter} Ordnung auf die der Raumcurven 3^{ter} Ordnung, von welcher in Kap. 10, § 2 die Rede war.

Wir können hier nur einige wenige Bemerkungen hinzufügen.

Die Developpablen 4^{ter} Ordnung sind vom Geschlecht Null, d. h. das Geschlecht eines jeden beliebigen ebenen Schnitts derselben ist Null.

Bezeichnet man mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ die Gleichungen von vier Ebenen, *so lässt sich die Gleichung der Ebene, welche die Developpable einhüllt.*

$$X_1 t^3 + 3 X_2 t^2 + 3 X_3 t + X_4 = 0$$

schreiben und die Developpable selbst hat zur allgemeinen Gleichung

$$(X_1 X_4 - X_2 X_3)^2 - 4(X_2^2 - X_1 X_3)(X_3^2 - X_2 X_4) = 0.$$

Die Ebenen, welche zwei in verschiedenen Ebenen liegende Kegelschnitte berühren, die eine Tangente gemeinschaftlich haben, hüllen eine Developpable 4^{ter} Ordnung ein.

Wenn zwei Flächen 2^{ten} Grads eine Gerade gemeinsam haben, so ist die abwickelbare ihnen umschriebene Fläche von der 4^{ten} Ordnung.

Die Coordinaten eines Punkts der Rückkehrkante werden durch die Formeln ausgedrückt:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 1 : -t : t^2 : -t^3.$$

Wir gehen nun zu den windschiefen Regelflächen 4^{ter} Ordnung über.

Die windschiefe Regelfläche 4^{ter} Ordnung ist auch 4^{ter} Classe: sie ist entweder vom Geschlecht Null oder vom Geschlecht 1: in dem ersten Fall besitzt sie eine Doppelcurve doppelter Krümmung von der 3^{ten} Ordnung, die entweder degenerirt ist oder nicht (speciell eine dreifache Gerade sein kann), und ihre doppelt berührende Developpable ist von der 3^{ten} Classe; in dem zweiten Fall hat sie eine degenerirte Doppelcurve 2^{ter} Ordnung, und ihre doppelt berührende Developpable ist von der 2^{ten} Classe.

Cremona und Cayley haben eine Classification dieser Flächen in 12 Arten vorgenommen, *von denen 10 vom Geschlecht Null und 2 vom Geschlecht 1 sind.* Zu diesen 12 Species fügte Rohn, *Math. Ann.*, 24, p. 147 später eine neue mit einer *dreifachen* Geraden hinzu. Wir schliessen auch diese neue ein und unterscheiden daher die folgenden 13 Species:

a) *Flächen mit dreifacher Geraden.*

Auf der dreifachen Geraden gibt es 4 Punkte, in welchen zwei der Tangentialebenen zusammenfallen.

Die Gleichung der Fläche lässt sich mit Ausnahme der Fälle IV und V (siehe unten) *auf die Form*

$$k x_1^2 x_2^2 = x_1^2 x_3 (a x_1 + b x_2) + x_2^2 x_4 (c x_1 + d x_2)$$

reduciren, worin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ *die dreifache Gerade ist, die Punkte* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ *und* $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ *zwei der Punkte sind, in denen zwei der Berührungsebenen zusammenfallen, und* $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ *die doppelten Berührungsebenen in diesen Punkten darstellen.*

Durch jeden der 4 Punkte, welche die eben angegebene Eigenschaft besitzen, geht eine Gerade (singuläre Erzeugende) und die Berührungsebene an die Fläche bleibt für alle Punkte dieser Geraden immer dieselbe.

Die Fläche ist stets vom Geschlecht Null.

Es lassen sich die folgenden 4 Unterfälle unterscheiden:

I. *(Die 8te Species Cremona's und die 9te Cayley's).*

Alle Geraden der Fläche schneiden die dreifache Gerade R.

Die drei durch einen Punkt von R gehenden Erzeugenden liegen nicht in derselben Ebene; sie bestimmen drei Ebenen, deren Enveloppe eine besondere Developpable 3ter Classe und 4ter Ordnung ist und zwar diejenige, welche die Fläche zweifach berührt.

Diese Fläche ist der Ort einer Geraden, welche sich so bewegt, dass sie eine feste Gerade schneidet und eine gegebene Developpable 4ter Ordnung in zwei Punkten berührt.

Die Gleichung der Fläche ist mit der oben angegebenen identisch; jedoch ist k seinem Wesen nach von Null verschieden.

II. *(Die 9te Species Cremona's, die 3te Cayley's).*

Es ist eine Gerade R' der Fläche vorhanden, welche die dreifache Gerade R nicht schneidet.

Jede durch R' gelegte Ebene enthält drei Erzeugende, die sich in einem Punkt von R schneiden und in jedem Punkt von R treffen sich Erzeugende, die in derselben Ebene mit R' liegen; von jedem Punkt von R' geht eine einzige Erzeugende aus.

Die Fläche lässt sich als Ort der Geraden auffassen, welche die entsprechenden Punkte einer zwischen den Punkten einer Geraden R und den Punkten einer ebenen Curve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt O bestehenden projectiven Correspondenz $(1, 1)$ *verbinden; diese muss jedoch so festgesetzt werden, dass dem Schnittpunkt A von R mit der Ebene der Curve 3ter Ordnung der Schnittpunkt der Geraden AO mit dieser Curve entspricht.*

Die Gleichung der Fläche ist mit der oben angegebenen identisch, wenn in dieser $k = 0$ gesetzt wird.

Die Gerade R' ist die Enveloppe der dreifach berührenden Ebenen der Fläche; sie tritt, wenn sie dreimal gerechnet wird, an die Stelle der doppelt berührenden Developpablen.

III. *(Die 3^te^ Species Cremona's, die 12^te^ Cayley's).*

Wenn durch jeden Punkt von R drei Erzeugende gehen, von denen eine mit R zusammenfällt, so besteht die zweifach berührende Developpable aus R und einem Kegel 2^ten^ Grads.

Die Fläche ist der Ort der Geraden, welche die entsprechenden Punkte einer Geraden R und eines Kegelschnitts C verbinden, die in solcher Beziehung $(1, 2)$ zueinander stehen, dass jedem Punkt von R zwei Punkte von C entsprechen, jedem Punkt von C aber nur einer von R, wobei jedoch die Gerade und der Kegelschnitt einen Punkt gemeinschaftlich haben müssen, der in dieser Correspondenz kein Doppelpunkt ist.

Die Gleichung einer solchen Fläche ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung, wenn $ad = bc$ gesetzt wird, so dass also die beiden Terme auf der rechten Seite einen Factor $ax_1 + bx_2$ gemeinschaftlich haben.

IV. *(Die 10^te^ Species Cremona's, die 6^te^ Cayley's).*

Wenn durch jeden Punkt von R drei Erzeugende gehen, von denen zwei mit R zusammenfallen, so besteht die doppelt berührende Developpable aus dieser dreimal gerechneten Geraden R selbst.

Auf R gibt es zwei Punkte von der Beschaffenheit, dass alle drei durch sie gehenden Erzeugenden mit R zusammenfallen.

Die Fläche kann auf dieselbe Art wie in dem Fall II erzeugt werden, wenn man die Punkte A und O zusammenfallen lässt.

Die Gleichung der Fläche kann auf die Form

$$x_1^2 x_2^2 = (a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2)(x_1 x_3 + x_2 x_4)$$

zurückgeführt werden.

V. *(Die von Rohn gefundene Species).*

In dem Fall IV gibt es in jedem Punkt der dreifachen Geraden R zwei feste und eine variabele Berührungsebene; nimmt man an, die beiden festen Ebenen fallen zusammen, so erhält man den von Rohn, Math. Ann., 24, p. 147 entdeckten Fall. Zwei Schalen der Fläche verzweigen sich längs der dreifachen Geraden und haben diese zur Rückkehrkante. Auf der dreifachen Geraden existirt ein einziger singulärer Punkt von der Be-

schaffenheit, dass auch die dritte Erzeugende, die durch ihn geht, mit R zusammenfällt. Nimmt man diesen Punkt zum Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, *so reducirt sich die Gleichung der Fläche auf die Form:*

$$x_1^3 x_4 + a x_1^2 x_3 x_4 + b x_1^4 + c x_1^3 x_2 + d x_1^2 x_2^2 + e x_1 x_2^3 + f x_2^4 = 0.$$

---

b) ***Flächen, die zur Doppelcurve eine nicht degenerirte cubische Raumcurve haben.*** *Wenn eine Fläche 4ter Ordnung als Doppelcurve eine Raumcurve enthält, so ist sie im Allgemeinen eine Regelfläche; davon macht nur der Fall eine Ausnahme, in welchem die Doppellinie aus drei durch denselben Punkt gehenden Geraden besteht (die Steiner'sche Fläche,* siehe § 9).

Wenn die Doppelcurve eine *nicht* degenerirte cubische Raumcurve ist, so sind nur die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden:

VI. (*Die 1te Species Cremona's, die 10te Cayley's).*

Die Fläche wird durch die Geraden erzeugt, welche die entsprechenden Punkte zweier beliebig im Raum in verschiedenen Ebenen gelegener Kegelschnitte verbinden, die so beschaffen sind, dass zwischen den Punkten des einen und denen des anderen eine ein-eindeutige Zuordnung (1, 1) *besteht.*

Die Enveloppe der doppelt berührenden Ebenen ist eine allgemeine Developpable 3ter Classe und 4ter Ordnung.

Es gibt vier singuläre Erzeugende, in deren Punkten die Berührungsebene constant ist.

Die doppelte cubische Raumcurve hat vier Cuspidalpunkte; durch jeden der letzteren geht eine der singulären Erzeugenden.

Die Fläche ist vom Geschlecht Null.

Die Gleichung der Fläche lässt sich auf die Form

$$a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + a_{33} X_3^2 + 2 a_{23} X_2 X_3 + 2 a_{31} X_3 X_1 + 2 a_{12} X_1 X_2 = 0$$

reduciren, worin

$$X_1 = x_2 x_4 - x_3^2,$$
$$X_2 = x_2 x_3 - x_1 x_4,$$
$$X_3 = x_1 x_3 - x_2^2$$

ist.

Die Fläche kann auch als Ort der Geraden definirt werden, welche eine cubische Raumcurve in zwei Punkten schneiden und einem allgemeinen linearen Complex angehören; siehe Kap. 14; oder:

als Ort derjenigen Geraden, welche in zwei Punkten eine cubische Raumcurve und in einem Punkt einen eigentlichen Kegelschnitt treffen, der mit der Curve 3ter Ordnung zwei Punkte gemeinschaftlich hat; oder auch:

als Ort der Geraden eines linearen Complexes, in welchen sich zwei eine Raumcurve 3ter Ordnung osculirende Ebenen schneiden.

VII. *(Die 7te Species Cremona's, die 8te Cayley's).*

Nimmt man an, der lineare Complex, von dem in den vorstehenden Theoremen die Rede war, sei die Gesammtheit der Geraden, welche eine feste Gerade schneiden, so ergibt sich die Species VII, die wir hier betrachten wollen.

Die Fläche wird von den Geraden erzeugt, welche eine Raumcurve 3ter Ordnung in zwei Punkten schneiden und eine gegebene Gerade R treffen.

Die dreimal gezählte Gerade stellt die doppelt berührende Developpable dar.

Die Fläche ist wieder vom Geschlecht Null.

Die Fläche lässt sich als Ort der Verbindungsgeraden der sich entsprechenden Punkte einer Geraden R und einer ebenen Curve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt definiren, wenn zwischen den Punkten der Geraden und der Curve 3ter Ordnung eine eineindeutige Correspondenz (1, 1) festgesetzt wird.

Die Gleichung der Fläche hat dieselbe Form, wie im vorhergehenden Fall, wenn man annimmt, zwischen den Coefficienten bestehe die Beziehung:

$$a_{22}^2 + 2\,a_{22}\,a_{13} - 4\,a_{23}\,a_{12} + a_{11}\,a_{33} = 0.$$

---

c) *Flächen, welche zur Doppellinie einen Kegelschnitt und eine diesen schneidende Gerade haben. Diese Flächen sind vom Geschlecht Null.*

Es werden zwei Fälle unterschieden:

VIII. *(2te Species Cremona's, 7te Cayley's).*

Die Fläche ist der Ort der Geraden, welche die entsprechenden Punkte eines Kegelschnitts C und einer Geraden R verbinden, die in der Correspondenz (2, 1) stehen und keinen Punkt gemeinschaftlich haben.

Die Gerade R ist die Doppelgerade.

Die doppelt berührende Developpable besteht aus einem Kegel 2ten Grads und der Geraden R.

Die Gleichung der Fläche lässt sich immer auf

$$(x_1 x_3 - x_2^2)^2 + m x_2 x_4 (x_1 x_3 - x_2^2) + x_4^2 (a x_1 x_2 + b x_2^2) = 0$$

reduciren, worin b von Null verschieden ist. Der Doppelkegelschnitt liegt in der Ebene $x_4 = 0$ und die Doppelgerade ist

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Die Fläche kann auch als Ort der Geraden definirt werden, welche die entsprechenden Punkte eines Kegelschnitts H und einer Geraden R verbinden, die in der Correspondenz $(2, 2)$ *stehen und sich schneiden; doch muss ihr Schnittpunkt nur sich selbst entsprechen. Der Kegelschnitt H und die Gerade R sind alsdann Doppelcurven.*

IX. *(4^te^ Species Cremona's und 11^te^ Cayley's).*

Nimmt man bei den Erzeugungsweisen im vorigen Fall an, der Kegelschnitt C und die Gerade R schneiden sich und ihr Schnittpunkt, als Punkt von C, falle mit einem der beiden ihm in R entsprechenden Punkte zusammen, so erhält man die Fläche IX.

Die doppelt berührende Developpable ist die dreifach gezählte Gerade R.

Der Kegelschnitt C wird in diesem Fall der Doppelkegelschnitt der Fläche (bei der Fläche VIII wird er es nicht).

Die Gleichung der Fläche ergibt sich aus der des vorigen Falles, wenn $b = 0$ gesetzt wird.

Auf dem Kegelschnitt gibt es einen und auf der Geraden zwei Cuspidalpunkte.

---

d) *Flächen, welche drei Gerade zu Doppellinien haben.* Die folgenden zwei Fälle, *die beide dem Geschlecht Null angehören,* sind zu unterscheiden.

X. *(Die 5^te^ Species Cremona's, die 2^te^ Cayley's).*

Eine der drei Geraden schneidet die beiden anderen, die sich ihrerseits nicht treffen. Dieser Fall kann aus den Fällen (c) dadurch abgeleitet werden, dass man den Doppelkegelschnitt in zwei verschiedene Gerade zerfallen lässt.

Die Fläche ist der Ort der Verbindungsgeraden der sich entsprechenden Punkte zweier in der Correspondenz $(2, 2)$ stehender windschiefer Geraden R, R', wenn die Bedingung hinzugefügt wird, dass jeder der Punkte, in welchen R, R' von einer dritten Geraden R'' getroffen werden, zwei zusammenfallenden Punkten in der anderen Geraden entsprechen soll.

Auf jeder der Geraden R, R' liegen zwei Cuspidalpunkte.

Die osculirende developpable Fläche besteht aus drei Geraden R, R', R''.

Durch jeden Punkt von R gehen zwei Erzeugende, in deren Ebene R' liegt und ebenso gehen von jedem Punkt von R' zwei Erzeugende aus, in deren Ebene R liegt.

Nur die durch R'' gehenden Ebenen schneiden die Fläche in eigentlichen Kegelschnitten und nur die Punkte von R'' sind Spitzen von umschriebenen Kegeln 2^{ter} Ordnung.

Dieselbe Fläche kann man als Ort der Geraden erhalten, welche zwei windschiefe Gerade R, R' und einen Kegelschnitt C treffen, der mit den Geraden keinen Punkt gemeinschaftlich hat; oder:

als Ort der Geraden, welche zwei Gerade R, R' und eine Raumcurve 3^{ter} Ordnung treffen, die von jeder der Geraden in einem Punkt geschnitten wird, oder auch:

als Ort der Geraden, welche die entsprechenden Punkte zweier in der Correspondenz $(1, 1)$ stehender Kegelschnitte verbinden, vorausgesetzt, dass den Punkten, in welchen einer von ihnen die Schnittlinie der beiden Ebenen der Kegelschnitte trifft, die Punkte entsprechen, in denen der andere Kegelschnitt dieselbe Gerade schneidet; diese Gerade erscheint so als Doppelgerade; oder auch:

als Ort der Geraden, welche die entsprechenden Punkte einer Geraden R und eines Kegelschnitts C verbinden, die keine Punkte gemeinschaftlich haben und in der Correspondenz $(1, 2)$ stehen, wenn nur dem Punkt r von R, in welchem R die Ebene von C schneidet, in C zwei in einer Geraden mit r liegende Punkte r', r'' entsprechen. Diese Gerade ist alsdann die Doppelgerade R'' der vorigen Construction; die Gerade R' trifft die Ebene des Kegelschnitts in einem Punkt O, durch den alle Sehnen des Kegelschnitts gehen, welche die beiden demselben Punkt von R entsprechenden Punkte verbinden.

Der Gleichung der Fläche kann man die Form geben:

$$x_1^2 x_3^2 + m x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4^2(a x_1 x_2 + b x_2^2) = 0.$$

Die drei Doppelgeraden sind:

$$(x_1 = 0,\ x_4 = 0),$$
$$(x_3 = 0,\ x_4 = 0),$$
$$(x_1 = 0,\ x_2 = 0).$$

XI. *(Die 6te Species Cremona's, die 5te Cayley's).*

Nehmen wir speciell an, die Gerade R'' falle mit R zusammen, so ergibt sich eine andere Species von Regelflächen; sie lässt sich als diejenige definiren, die aus der letzten Construction des vorigen Falles hervorgeht, wenn vorausgesetzt wird, der Punkt r falle mit O zusammen, d. h. also mit dem Punkt, der allen Sehnen gemeinschaftlich ist, welche die Paare demselben Punkt von R entsprechender Punkte verbinden.

Die Fläche lässt sich also auch auf die folgende Art definiren:

Man stellt eine Correspondenz $(1, 1)$ zwischen den Punkten einer Geraden R und den durch R gehenden Ebenen her: diese Ebenen schneiden einen Kegelschnitt C in je zwei Punkten, die, mit dem entsprechenden Punkt von R verbunden, die Erzeugenden der Fläche liefern.

Die doppelt berührende Developpable wird durch die zweimal gezählte Gerade R und eine andere Gerade R' dargestellt, welche R in dem Punkt trifft, in dem R die Ebene von C schneidet.

Auch die Doppelcurve wird durch diese nämlichen Geraden dargestellt.

Die Gleichung der Fläche lässt sich auf die Form

$$(x_2 - \alpha x_1)^2 u_2 + (x_2 x_4 - x_1 x_3)(x_2 - \alpha x_1) u_1 + (x_2 x_4 - x_1 x_3)^2 = 0$$

reduciren, worin u_2, u_1 Formen 2^{ten}, 1^{ten} Grads in x_1, x_2 sind.

Die Doppelgerade R' ist:

$$x_2 - \alpha x_1 = 0, \ \alpha x_4 - x_3 = 0,$$

und die doppelt zu zählende Doppelgerade R:

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0.$$

Der Schnitt der Fläche ist im Allgemeinen eine Curve 4^{ter} Ordnung mit einem Selbstberührungspunkt in dem Punkt, in welchem die Gerade R die Schnittebene trifft.

— — —

e) *Regelflächen, die zwei Gerade zu Doppellinien haben. Sie sind vom Geschlecht Eins;* man unterscheidet zwei Fälle:

XII. *(11te Species Cremona's, 1te Cayley's).*

Die beiden Geraden treffen sich nicht. *Die Fläche lässt sich als Ort der Geraden definiren, welche eine ebene Curve 4^{ter}*

Ordnung mit zwei Doppelpunkten und zwei Gerade R, R' treffen, von denen jede durch einen der Doppelpunkte geht.

Die Fläche kann auch als Ort der Geraden aufgefasst werden, welche die entsprechenden Punkte zweier in der Correspondenz $(2, 2)$ *stehender Geraden R, R' verbinden.*

Von jedem Punkt von R gehen zwei Erzeugende aus, die in einer durch R' gehenden Ebene liegen, und umgekehrt.

Die doppelt berührende Developpable besteht aus den Geraden R, R'.

Dieselbe Fläche lässt sich auch als Ort der Geraden definiren, die zwei Gerade R, R' und eine allgemeine ebene Curve 3ter Ordnung treffen, die von jeder der beiden Geraden R, R' in einem Punkt geschnitten wird.

Die allgemeine Gleichung der Fläche kann auf die Form

$$x_1^2(ax_3^2 + 2bx_3x_4 + cx_4^2) + 2x_1x_2(a'x_3^2 + 2b'x_3x_4 + c'x_4^2) + \\ + x_2^2(a''x_3^2 + 2b''x_3x_4 + c''x_4^2) = 0$$

reducirt werden.

Die beiden Doppelgeraden sind

$$(x_1 = 0,\ x_2 = 0),$$
$$(x_3 = 0,\ x_4 = 0).$$

Auf jeder Doppelgeraden gibt es 4 Cuspidalpunkte.

XIII. *(Die 12te Species Cremona's, die 4te Cayley's).*

Wir wollen uns denken, die beiden Doppelgeraden fallen zusammen. Die Fläche XIII lässt sich dann aus der vorigen durch die Annahme ableiten, die ebene Curve 4ter Ordnung erhalte einen *Selbstberührungspunkt*, indem sich die beiden Doppelpunkte in einen einzigen vereinigen.

Die Fläche ist der Ort der Geraden, welche die entsprechenden Punkte einer Geraden und einer allgemeinen ebenen Curve 3ter Ordnung verbinden, welche einen Punkt O mit der Geraden gemeinschaftlich hat und in der Correspondenz $(2, 1)$ *zu ihr steht. Diese Correspondenz muss speciell so angeordnet sein, dass die Punktreihe auf der Geraden projectiv zu dem Strahlenbüschel mit dem Scheitel in O ist und dem Punkt O der Geraden die Tangente an die Curve 3ter Ordnung in O entspricht; die beiden Punkte der Curve 3ter Ordnung, welche alsdann einem Punkt der Geraden entsprechen, sind jene beiden anderen Punkte, in welchen der entsprechende Strahl die Curve 3ter Ordnung schneidet.*

Diese Fläche hat zur Doppelcurve eine zweimal zu zählende Gerade und zur doppelt berührenden developpablen Fläche dieselbe zweimal zu zählende Gerade.

Die Gleichung der Fläche lässt sich schreiben:

$$u_4 + (x_2 x_4 - x_1 x_3) u_2 + (x_2 x_4 - x_1 x_3)^2 = 0,$$

worin u_4, u_2 *Formen vom Grad 4, 2 in* x_1, x_2 *sind und die (doppelt zu zählende) Doppelgerade*

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0$$

ist.

Die windschiefen Regelflächen 4^ter^ Ordnung untersuchte Chasles, *Compt. Rend.*, 1861 und dann Cayley, der in einer ersten Abhandlung, *Phil. Trans.*, 1864 nur 8 Species unterschied; dann gab Cremona, *Mem. di Bologna,* 8, 1868 auf rein geometrische Art die Classification in 12 Species an, und im folgenden Jahr nahm Cayley, *Phil. Trans.*, 1869 das Thema wieder auf und fand von Neuem die 12 Species Cremona's. Später zeigte Rohn, *Math. Ann.*, 24, p. 147 bei Gelegenheit seiner Untersuchungen der Flächen 4^ter^ Ordnung mit dreifacher Geraden und damit auch der Regelflächen mit dreifacher Geraden, dass Cremona und Cayley eine Species, die von uns mit V bezeichnete, übersehen hatten.

Das Studium der Regelflächen vom Gesichtspunkt der Realität oder Nichtrealität gewisser Elemente aus unternahm Rohn, *Math. Ann.*, 24, 28, der auch andere ähnliche Probleme behandelte, wie z. B. das in Bezug auf die Kummer'sche Fläche. Siehe weiter oben Kap. 12, § 3. Ueber die windschiefen Flächen 4^ter^ Ordnung mit drei Doppelgeraden gibt es noch eine neuere Arbeit von Segen, *Crelle,* 112.

In dem wiederholt citirten Buch von Salmon-Fiedler sind die Hauptresultate Cayley's angegeben.

Die Brill'sche Sammlung von Modellen enthält eine ganze Reihe von Regelflächen 4^ter^ Ordnung.

Andere Flächen 4^ter^ Ordnung, die speciell untersucht wurden, sind ausser den von uns im Vorstehenden behandelten die folgenden:

Flächen 4^ter^ Ordnung mit dreifachen Punkten oder Geraden, Lampe, *Diss.*, Berlin 1864; Rohn, *Math. Ann.*, 24.

Flächen 4ter Ordnung mit einer endlichen Anzahl von Geraden, Sturm, *Math. Ann*, 4; Schur, *Math. Ann.*, 20.

Vier rationale Flächen 4ter Ordnung, Cremona, *Collect. math. in memoriam D. Chelini, Mediolani,* 1881; Noether, *Math. Ann.*, 33; Montesano, *Rend. Acc. Napoli,* 1900; etc.

In Bezug auf die letzteren weist Noether nach, *dass sie die einzigen rationalen Flächen 4ter Ordnung ohne mehrfache Curven sind.*

Kapitel XIII.

Flächen von höherer als der 4^{ten} Ordnung. Regelflächen.

§ 1. Flächen 5^{ter} Ordnung, die nicht Regelflächen sind.

Von den bis jetzt untersuchten Flächen 5^{ter} Ordnung ist eine der bemerkenswerthesten. *die mit einer Doppelcurve 5^{ter} Ordnung.* Wir geben ihre Haupteigenschaften hier an:

Die Doppelcurve 5^{ter} Ordnung der Fläche besitzt einen dreifachen Punkt, der auch für die Fläche dreifach ist.

Die Fläche hat 10 Gerade; diese sind Sehnen der Doppelcurve.

Die Configuration dieser 10 Geraden ist dieselbe, wie die der 10 Geraden, welche von den 16 Geraden einer Fläche 4^{ter} Ordnung mit Doppelkegelschnitt übrig bleiben, wenn man eine von ihnen und die fünf, welche diese eine schneiden, weglässt; oder, was dasselbe ist, die Configuration ist dieselbe, wie die der 10 Geraden, welche von den 27 Geraden einer Fläche 3^{ter} Ordnung übrig bleiben, wenn man zwei, die ein windschiefes Paar bilden, und die 15 weglässt, die entweder die eine oder die andere dieser beiden Geraden treffen. Daraus folgt:

Jede der 10 Geraden schneidet drei andere von ihnen; die 10 Geraden sind zu je zweien in 15 Ebenen vertheilt und treffen sich in 15 Punkten; durch jede Gerade gehen drei der 15 Ebenen; in jeder der 15 Ebenen gibt es 5 Schnittpunkte von Geraden und durch jeden der Schnittpunkte gehen 5 Ebenen.

Es existiren 5 windschiefe Quadrupel von Geraden (Systeme von 4 Geraden, die sich zu je zweien nicht treffen).

Die Fläche lässt sich auf die Ebene abbilden.

Auf der Doppelcurve liegen 8 Cuspidalpunkte.

Es leuchtet ein, dass es auf der Fläche 10 Systeme von ebenen Curven 4^{ter} Ordnung gibt, nämlich die Schnitte der Fläche mit den Ebenen, die durch eine der 10 Geraden gehen.

Jede Curve 4^{ter} Ordnung eines Systems schneidet die Doppelcurve in zwei festen Punkten; diese beiden Punkte sind identisch mit den Punkten, in denen die Doppelcurve von der Geraden getroffen wird, welche zu diesem System von Curven 4^{ter} Ordnung gehört; die Curve 4^{ter} Ordnung schneidet dann die Doppelcurve noch in drei weiteren Punkten, die für die Curve 4^{ter} Ordnung natürlich Doppelpunkte sind.

In jedem System gibt es zwei Curven 4^{ter} Ordnung, welche die Gerade berühren, zu welcher dieses System gehört; die Ebenen dieser beiden Curven 4^{ter} Ordnung sind stationäre Berührungsebenen; die Berührungspunkte sind parabolische Punkte.

Zwei Curven 4^{ter} Ordnung, die zwei verschiedenen Systemen angehören, haben entweder 4 oder 3 Punkte gemeinschaftlich, je nachdem die Geraden, die den beiden Systemen entsprechen, sich schneiden oder nicht.

Zu den 5 windschiefen Quadrupeln von Geraden stehen 5 Systeme von Kegelschnitten auf der Fläche in einer solchen Beziehung, dass jeder Kegelschnitt eines Systems die 4 Geraden eines Quadrupels schneidet und die übrigen 6 nicht.

Jeder Kegelschnitt trifft die Doppelcurve in 4 Punkten; zwei Kegelschnitte desselben Systems schneiden sich nicht; zwei Kegelschnitte verschiedener Systeme schneiden sich im Allgemeinen in einem Punkt.

Die Fläche besitzt im Ganzen 35 dreifach berührende Ebenen, von denen 20 die Fläche in zwei Kegelschnitten und einer Geraden treffen und 15 in zwei Geraden und einer Curve 3^{ter} Ordnung; durch jede Gerade der Fläche gehen zwei Ebenen der ersten und drei der zweiten Art.

Die hauptsächlichsten charakteristischen Zahlen für die Fläche sind (siehe Kap. 9, § 1):

$a = 10$, die Ordnung des umschriebenen Kegels, dessen etc.
$\delta = 12$, die Anzahl der Doppelerzeugenden dieses Kegels.
$\varkappa = 18$, die Zahl der Rückkehrerzeugenden desselben Kegels.
$n' = 12$, die Klasse der Fläche.
$b' = 25$, die Klasse der doppeltberührenden developpablen Fläche.
$c' = 24$, die Classe der Developpablen der stationären Ebenen.
$\sigma' = 20$, die Ordnung der parabolischen Curve.

Durch jeden Punkt der Fläche gehen 4 Doppeltangenten und 12 osculirende Gerade.

In jeder beliebigen Ebene gibt es 15 die Fläche osculirende und 20 sie doppelt berührende Gerade. Von den in einem Punkt *der Fläche an diese gezogenen Tangenten berühren 4 auch noch sonst.*

Um die Fläche projectiv zu construiren, verfährt man, wie folgt:

Man verbindet die entsprechenden Punkte zweier homographischer ebener Systeme und sucht die Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden mit den Ebenen eines zu diesen ebenen Systemen correlativen Bündels auf; man erhält dann die in Rede stehende Fläche; der dreifache Punkt ist das Centrum des Bündels. Del Re.

Die hier besprochene Fläche wurde von Clebsch, *Math. Ann.*, 3 und Cremona, ib., 4 eigentlich nur erwähnt. Eingehender beschäftigte sich mit ihr R. Sturm, *Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung*, ib., 4 und Caporali, der ihr seine wichtige Doctordissertation, *Ann. di mat.*, 7 widmete.

Eine Abart dieser Fläche ist der Ort der Berührungspunkte der von einem festen Punkt aus an die Flächen 2ten Grads einer Schar gelegten Tangentialebenen; dieser Ort wurde von Darboux, *Bull. des scienc. math.*, 1871 studirt; die Fläche hat die Eigenthümlichkeit, dass sechs ihrer Geraden durch den dreifachen Punkt gehen. Andere Arbeiten über dieselbe Fläche sind von Del Re, dem die oben angegebene projective Erzeugung zu verdanken ist, *Acc. Napoli*, 1886; *Rend. Lincei*, 1890; *Acc. Torino*, 1893.

Eine andere Fläche 5ter Ordnung ist die *mit einer Doppelcurve 3ter Ordnung;* sie wurde, wie die vorige, ins Besondere mit Hülfe ihrer ebenen Abbildung studirt.

Sie enthält 11 einander nicht schneidende Gerade, die Sehnen der Doppelcurve 3ter Ordnung sind; sie enthält ferner 55 Kegelschnitte, von denen jeder zwei der Geraden in einem Punkt schneidet. Zwei der Kegelschnitte schneiden sich entweder nicht oder sie schneiden sich, je nachdem die Geradenpaare, denen sie auf die vorstehende Art zugeordnet sind, Gerade gemeinschaftlich haben oder nicht.

Die Fläche hat 220 dreifach berührende Ebenen, die zu je 20 durch jede der Geraden der Fläche gehen, und 55 andere dreifach berührende Ebenen, in denen die 55 Kegelschnitte liegen, und schliesslich noch weitere dreifach berührende Ebenen, welche die Fläche in nicht *degenerirten Curven 5ter Ordnung schneiden.*

Legt man durch eine Gerade der Fläche das Ebenenbüschel, so schneidet eine jede dieser Ebenen die Fläche noch einmal in einer ebenen Curve 4ter Ordnung; diese Curven treffen die Gerade in zwei festen und zwei beweglichen Punkten, von denen die letzteren eine Involution bilden; es gibt daher zwei besondere Ebenen, deren Curve 4ter Ordnung die Gerade berührt. Die beiden festen Schnittpunkte der Curven vierter Ordnung mit der Geraden sind mit den Punkten identisch, in denen die Gerade die Doppelcurve 3ter Ordnung schneidet.

Auf der Doppelcurve 3ter Ordnung liegen 10 Cuspidalpunkte der Fläche.

Diese Fläche untersuchten Clebsch, *Math. Ann.*, 1, der ihre ebene Abbildung seinen Forschungen zu Grund legte, und R. Sturm, ib., 4. Andere Arbeiten über denselben Gegenstand sind von Del Re, *Lincei,* 1892, 1893; *Acc. Modena,* 9, 1893.

Die Fläche 5ter Ordnung mit einer Doppelcurve 4ter Ordnung 1ter Species wurde von Clebsch, *Gött. Abh.*, 15; *Math. Ann.*, 3; Noether, ib., 3; R. Sturm, ib., 4 studirt; eine Fläche 5ter Ordnung mit einer dreifachen Geraden behandelte Cremona in seiner Abhandlung über die *Trasf. biraz. dello spazio, Rendic. Istit. Lomb.*, 1871 und später Del Re, *Lincei,* 1891; vergl. auch R. Sturm, *Math. Ann.*, 4, p. 281; eine Fläche 5ter Ordnung, die zwei doppelte windschiefe Gerade besitzt, untersuchte Clebsch, *Math. Ann.,* 1 wieder mit Hülfe ihrer ebenen Abbildung.

Mit rationalen Flächen 5ter Ordnung befassten sich auch Hill, *Math. Review,* 1; *Americ. Journ.*, 19 und Montesano, *Rend. Acc. Napoli,* 1900, 1901.

§ 2. Developpable Flächen 5ter Ordnung.

Jede Developpable 5ter Ordnung ist von der 4ten Classe, hat eine Inflexionserzeugende und eine Doppelcurve 2ter Ordnung.

Jeder ihrer ebenen Schnitte ist vom Geschlecht Null; mithin ist auch die Fläche vom Geschlecht Null.

Sie hat zur Rückkehrkante eine Raumcurve 4ter Ordnung 1ter Species mit einem Cuspidalpunkt, der dreifacher Punkt der Fläche ist.

Sie ist die zweien Flächen 2ter Ordnung, welche eine stationäre Berührung in einem Punkt miteinander haben, umschriebene Developpable.

Die Developpable 5ter Ordnung ist die Enveloppe der zweien Kegelschnitten gemeinschaftlichen Berührungsebenen, falls sich diese zwei Kegelschnitte in einem Punkt treffen, und der eine in dem gemeinsamen Punkt den Schnitt der Ebenen der beiden Kegelschnitte berührt. Cremona.

Jede Erzeugende der Fläche trifft eine andere Erzeugende, die Cremona der ersteren *conjugirt* nannte; der Ort der Schnittpunkte zweier conjugirter Erzeugender ist natürlich der Doppelkegelschnitt K. Ebenso wollen wir *die Punkte conjugirt* nennen, in denen zwei conjugirte Erzeugende die Cuspidalcurve C berühren, und *die Ebenen conjugirt*, welche die Developpable in zwei conjugirten Erzeugenden berühren.

Alle Geraden, welche zwei conjugirte Punkte der Raumcurve 4ter Ordnung verbinden, gehen durch denselben Punkt; dieser ist der Punkt C, in welchem die Inflexionserzeugende der Developpablen die Ebene schneidet, welche die Curve 4ter Ordnung in dem stationären Punkt A osculirt. Diese sämmtlichen Geraden bilden die Erzeugenden eines Kegels 2ten Grads S.

Die Ebene, welche zwei conjugirte Erzeugende enthält, berührt stets denselben Kegel 2ten Grads S. Die Schnittlinie zweier conjugirter Ebenen berührt immer den Doppelkegelschnitt K und liegt daher in einer festen Ebene.

Die Inflexionserzeugende wird von den Paaren conjugirter Ebenen in Paaren von Punkten einer Involution geschnitten, deren Doppelpunkte der Punkt B, in welchem die Curve 4ter Ordnung von der Inflexionserzeugenden berührt wird, und der Punkt C sind, in dem diese Erzeugende die Ebene schneidet, welche die Curve 4ter Ordnung in A osculirt.

Die conjugirten Punkte auf der Curve 4ter Ordnung sind harmonisch conjugirt in Bezug auf die Spitze des Kegels 2ten Grads S, von dem oben die Rede war, und die Ebene des Doppelkegelschnitts K. Eine ähnliche Eigenschaft besteht für *die conjugirten Ebenen.*

Unter *anharmonischem Verhältniss von 4 Punkten der Raumcurve 4ter Ordnung* versteht man das anharmonische Verhältniss der 4 Ebenen, die durch die 4 Punkte und die Gerade gehen, welche den stationären Punkt A der Curve 4ter Ordnung mit dem Punkt D verbindet, wenn man unter D den Schnittpunkt der durch A gehenden Erzeugenden der Developpablen mit der Ebene versteht, welche die Developpable längs der Inflexionserzeugenden berührt.

Analog versteht man unter *anharmonischem Verhältniss von 4 Berührungsebenen der Developpablen* dasjenige der 4 Punkte, in denen diese Ebenen die Gerade schneiden, welche den Punkt B, in dem die Curve 4^{ter} Ordnung von der Inflexionserzeugenden berührt wird, mit dem Punkt C verbindet, in welchem diese Erzeugende die in A die Curve 4^{ter} Ordnung osculirende Ebene trifft.

Man erhält dann:

Der Doppelkegelschnitt K ist die Enveloppe einer Ebene, welche die Raumcurve in 4 Punkten trifft, die eine äquianharmonische Gruppe bilden.

Der Kegel 2^{ter} Ordnung S ist der Ort der Punkte, von welchen sich an die Developpable 4 Tangentialebenenen ziehen lassen, die eine äquianharmonische Gruppe bilden.

Der Ort der Punkte, von welchen sich 4 harmonische Berührungsebenen an die Developpable ziehen lassen, ist eine Fläche 3^{ter} Ordnung und 4^{ter} Classe.

Die Enveloppe der Ebenen, welche die Raumcurve 4^{ter} Ordnung in 4 harmonischen Punkten schneiden, ist eine Fläche 4^{ter} Ordnung und 3^{ter} Classe.

Bezeichnet man mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$ vier Ebenen, so kann die Gleichung der Developpablen 5^{ter} Ordnung

$$\begin{aligned} &X_1^3 X_4^2 - 18 X_1^2 X_3^2 X_4 + 54 X_1 X_2^2 X_3 X_4 + \\ &+ 81 X_1 X_3^4 - 27 X_2^4 X_4 - 54 X_2^2 X_3^3 = 0 \qquad \text{(Schwarz)} \end{aligned}$$

geschrieben werden; darin ist $X_4 = 0$ eine stationäre Ebene, der Punkt

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0$$

der dreifache Punkt der Fläche, d. h. der Cuspidalpunkt der Rückkehrcurve; die Inflexionserzeugende ist die Gerade:

$$X_3 = X_4 = 0,$$

und der Doppelkegelschnitt:

$$X_2 = 0,\ X_1 X_4 - 9 X_3^2 = 0.$$

Die Berührungsebene der Fläche wird durch die Gleichung

$$X_1 t^4 + 4 X_2 t^3 + 6 X_3 t^2 + X_4 = 0$$

dargestellt, in welcher t einen beliebigen Parameter bedeutet, die zwei Erzeugende enthaltende Ebene durch:

$$X_1 t^4 - 6 X_3 t^2 - 3 X_4 = 0,$$

und der von diesen Ebenen eingehüllte Kegel S durch die Gleichung:

$$X_1 X_4 - 3 X_3^2 = 0.$$

Die Ebene

$$X_1 t^3 + 3 X_2 t + 3 X_3 = 0$$

geht durch die Erzeugenden der Developpablen und umhüllt den Kegel 2ten Grads

$$3 X_2^2 - 4 X_1 X_3 = 0,$$

auf welchem auch die Curve 4ter Ordnung liegt, die sich als Schnitt dieses und des vorigen Kegels ergibt: diese Kegel haben die Berührungsebene $X_1 = 0$ *gemeinschaftlich und die Spitze des zweiten Kegels liegt auf dem ersten, d. h. die Verbindungsgerade der Spitzen ist eine Erzeugende des ersten Kegels.*

Die Coordinaten X_1, X_2, X_3, X_4 *eines Punkts der Rückkehrkante erhält man aus*

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 3 : -2t : t^2 : -t^4.$$

Mit den developpablen Flächen 5ter Ordnung beschäftigten sich Cayley, *Cambr. Journ.*, 5, 1850 = *Coll. math. papers,* 1, p. 500; *Quart. Journ.*, 1864 = *Coll. math. papers,* 5, p. 267; Chasles, *Compt. Rend.*, 1862, p. 317, 418, 715; Cremona, ib., p. 604; H. A. Schwarz, *Crelle,* 64. Ueber eine analytische Behandlung der von Cremona stammenden Theoreme siehe D'Ovidio und Salvatore Dino, *Giorn. di Batt.*, 3.

§ 3. Windschiefe Regelflächen 5ter Ordnung.

Die windschiefen Regelflächen 5ter Ordnung sind entweder vom Geschlecht Null, oder vom Geschlecht 1, oder vom Geschlecht 2. Die Flächen:

vom Geschlecht Null enthalten sämmtlich eine entweder degenerirte oder nicht degenerirte Doppelcurve 6ter Ordnung (wenn man auch eine vierfache Gerade als 6 zusammenfallende Doppelgerade und mithin als eine specielle Degeneration einer Doppelcurve 6ter Ordnung auffasst);

vom Geschlecht 1 eine Doppelcurve 5ter Ordnung, die entweder degenerirt ist oder nicht;

vom Geschlecht 2 eine degenerirte Doppelcurve 4ter Ordnung.

Die Flächen vom Geschlecht Null und vom Geschlecht 1 haben ein unendliches System ebener Curven 3ter Ordnung: davon sind diejenigen Flächen nullten Geschlechts ausgenommen, die eine *gerade Directrix besitzen, durch deren Punkte immer eine einzige zweite Erzeugende geht.*

H. A. Schwarz, *Crelle,* 67 *hat sie in 10 Arten vom Geschlecht Null, 4 vom Geschlecht 1 und eine vom Geschlecht 2 classificirt.*

Die windschiefen Regelflächen *vom Geschlecht Null* lassen sich auf eine der beiden folgenden Arten erzeugen:

I. *Man lässt die Punkte einer Geraden und einer ebenen Curve 4^ter Ordnung vom Geschlecht Null einander ein-eindeutig entsprechen; der Ort der die entsprechenden Punkte verbindenden Geraden ist im Allgemeinen eine windschiefe Regelfläche vom Geschlecht Null und von der 5^ten Ordnung.*

II. *Man ordnet die Punkte zweier ebenen Curven 3^ter Ordnung vom Geschlecht Null, die einen sich selbst entsprechenden Punkt gemeinschaftlich haben, einander ein-eindeutig zu; der Ort der Geraden, welche die sich entsprechenden Punkte verbinden, ist eine windschiefe Regelfläche nullten Geschlechts und 5^ter Ordnung.*

Diese letztere Erzeugungsweise kann man auch durch eine andere ersetzen:

II. bis) *Man ordnet die Punkte eines Kegelschnitts und die einer Curve 3^ter Ordnung vom Geschlecht Null einander ein-eindeutig zu; der Ort der die entsprechenden Punkte verbindenden Geraden ist eine rationale windschiefe Regelfläche 5^ter Ordnung.*

Bei dieser letzteren Construction kann der Kegelschnitt in eine Doppelgerade zerfallen; man verfährt dann so, dass man eine Correspondenz (2, 1) zwischen den Punkten der Geraden und der Curve 3^ter Ordnung herstellt.

Die Gleichung einer auf die erste Art erzeugten Fläche lässt sich durch Elimination von t aus zwei Gleichungen vom Typus

$$X_1 t^4 + X_2 t^3 + X_3 t^2 + X_4 t + X_5 = 0,$$
$$X_6 t + X_7 = 0$$

bilden, worin die $X = 0$ Ebenen des Raums darstellen.

Die Gleichung einer auf die zweite Art erzeugten Fläche erhält man im Allgemeinen durch Elimination von t aus den beiden Gleichungen:

$$X_1 t^3 + X_2 t^2 + X_3 t + X_4 = 0,$$
$$X_5 t^2 + X_6 t + X_7 = 0.$$

(An Stelle der zweiten dieser Gleichungen kann man natürlich eine lineare Combination der beiden und mithin eine in t cubische Gleichung substituiren).

Bei der ersten Construction ergibt sich eine rationale windschiefe Regelfläche mit einer vierfachen Geraden (der Geraden $X_6 = X_7 = 0$). Der Typus I von H. A. Schwarz.

Durch die zweite Construction erhält man im Allgemeinen windschiefe Regelflächen, welche zur Doppellinie eine Curve 6ter Ordnung mit einem dreifachen Punkt haben. Typus II.

Diese Curve 6ter Ordnung kann degeneriren; es ergeben sich dann die folgenden anderen Fälle: *Die Doppelcurve besteht aus:*

III. *einer dreifachen Geraden und einer cubischen Raumcurve, die mit der dreifachen Geraden zwei Punkte gemeinschaftlich hat;*

alle Erzeugenden treffen die dreifache Gerade (Leitgerade, gerade Directrix);

IV. *einer dreifachen Leitgeraden, einem Kegelschnitt und einer Geraden;*

V. *einer dreifachen und einer doppelten Leitgeraden und zwei doppelten Geraden;*

VI. *einer Leitgeraden, einer Raumcurve 5ter Ordnung mit einem dreifachen Punkt und mit drei scheinbaren Doppelpunkten; die Curve hat zwei Punkte mit der Geraden gemeinschaftlich;*

VII. *einer Leitgeraden, einer Raumcurve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkt und einer anderen Geraden; die Curve 4ter Ordnung schneidet die gerade Directrix in einem Punkt;*

VIII. *einem Kegelschnitt und einer Raumcurve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkt; der Kegelschnitt geht durch den Doppelpunkt und durch 2 andere Punkte der Raumcurve 4ter Ordnung;*

IX. *drei Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Punkt, die sich zu je zweien in einem weiteren Punkt schneiden;*

X. *einer geraden Directrix und einer Raumcurve 5ter Ordnung mit einem Doppelpunkt.*

Die windschiefen Regelflächen 5ter Ordnung *vom Geschlecht* 1 dagegen lassen sich auf die nachstehende Art erzeugen:

Man denkt sich in einer Ebene eine allgemeine Curve 3ter Ordnung und nimmt auf ihr einen Punkt an, von welchem aus die übrigen Punkte der Curve projicirt werden; diese werden so in Paare vereinigt; denkt man sich ferner, die Curve verdoppele sich in zwei Curven, deren Ebenen getrennt sind, und ein Punkt *der einen entspreche demjenigen der beiden Punkte der Paare der anderen Ebene, mit dem er vor der Spaltung nicht zusammenfiel, so ist der Ort der Geraden, welche die entsprechenden Punkte verbinden, eine windschiefe Regelfläche vom Geschlecht 1.* H. A. Schwarz.

Es sind die folgenden Arten zu unterscheiden:

XI. *Die Fläche mit einer Doppelcurve 5. Ordnung; durch jeden Punkt der letzteren gehen zwei Erzeugende, von denen jede die Doppelcurve in noch zwei Punkten schneidet.*

Durch jeden Punkt des Raums gehen 5 Ebenen, von denen jede mit der Fläche zwei Gerade gemeinschaftlich hat.

Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei ebene auf der Fläche liegende Curven 3^ter Ordnung.

XII. *Die Fläche mit einer dreifachen Leitgeraden und einem doppelten Kegelschnitt.*

XIII. *Die Fläche mit einer dreifachen Leitgeraden, einer doppelten Leitgeraden und einer doppelten Geraden.*

XIV. *Die Fläche mit einer doppelten Leitgeraden und einer doppelten Raumcurve 4^ter Ordnung.*

Die windschiefen Regelflächen 5^ter Ordnung *vom Geschlecht* 2 schliesslich kann man sich auf die folgende Art entstanden denken.

Man betrachtet eine ebene Curve 4^ter Ordnung mit einem Doppelpunkt und das von dem letzteren ausgehende Strahlenbüschel und denkt sich eine gerade, nicht in derselben Ebene liegende Punktreihe (a) projectiv derart auf das Büschel bezogen, dass ein bestimmter Punkt der Geraden mit einem der beiden Schnittpunkte zusammenfällt, in welchen der dem Punkt entsprechende Strahl die Curve 4^ter Ordnung trifft; der Ort der Geraden, welche jeden Punkt P der Geraden mit den beiden variabelen Punkten verbinden, in welchen der dem Punkt P entsprechende Strahl die Curve 4^ter Ordnung schneidet, ist eine Regelfläche 5^ter Ordnung vom Geschlecht 2.

Die Gerade (a) ist dreifache Leitgerade der Fläche, auf welcher noch eine andere doppelte Leitgerade existirt.

Näheres findet man in der citirten Arbeit von H. A. Schwarz, der wir die vorstehenden Resultate entnommen haben.

§ 4. Flächen 6^{ter} Ordnung oder Classe.

Eine Fläche 6^{ter} *Classe* wurde von Seligmann Kantor, *Wien. Ber.* 1879, (79), 2, p. 768 untersucht; sie entsteht folgendermassen:

Man betrachtet drei Punkte A_1, A_2, A_3 im Raum und eine Fläche 2^{ten} Grads F_2. Von einem variabelen Punkt P der letzteren werden die Punkte A auf die Fläche 2^{ten} Grads projicirt; die Ebenen der Projectionen der drei Punkte umhüllen die Fläche 6^{ter} Classe.

Die Fläche lässt sich auf eine Ebene abbilden; sie hat eine vierfach berührende Ebene (die Ebene der drei Punkte A), welche die Fläche in jedem der Berührungspunkte osculirt.

Zwei Berührungsebenen an die Fläche, welche sich in einer Geraden a der vierfach berührenden Ebene E schneiden, werden durch E und die Ebene harmonisch getrennt, welche durch den Pol von E in Bezug auf die Fläche 2^{ten} Grads und durch a geht.

Der Fläche ist ein Kegel 3^{ter} Classe doppelt umschrieben, dessen Spitze in dem eben genannten Pol liegt.

In der vierfach berührenden Ebene giebt es drei Gerade (die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$) von der Beschaffenheit, dass durch jede von ihnen unendlich viele die Fläche doppelt berührende Ebenen gehen.

Die zu dieser Fläche dualistische Fläche ist natürlich von der 6^{ten} Ordnung, hat einen vierfachen Punkt, drei durch diesen gehende Doppelgerade und eine ebene Doppelcurve 3^{ter} Ordnung.

Derselbe Autor (Kantor) hat an dem angegebenen Ort auch eine andere Fläche untersucht:

Man betrachtet 4 Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 und eine Fläche 2^{ten} Grads F_2, projicirt von einem Punkt von F_2 die 4 Punkte auf F_2 und erhält so 4 andere Punkte

$$A_1', \; A_2', \; A_3', \; A_4';$$

die beiden Tetraeder (A) und (A') sind homolog; *ihre Homologieebene hüllt eine Fläche 6^{ter} Classe ein.*

Eine weitere Fläche 6^{ter} Ordnung wurde von Emil Weyr, *Ueber Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve, Wien. Ber.*, 1882 (85, 2. Abth.) p. 513 studirt; man erhält sie auf die folgende Art:

Auf einer Raumcurve 3^{ter} Ordnung betrachtet man eine Involution von 4 Punkten; *die Kanten des Tetraeders der 4 Punkte einer jeden Gruppe erzeugen eine Regelfläche 6^{ter} Ordnung, welche die Curve 3^{ter} Ordnung zur dreifachen Curve hat. Die Seitenflächen des Tetraeders osculiren eine Curve 3^{ter} Classe.*

Der der Fläche umschriebene Kegel, dessen Spitze in einem beliebigen Punkt des Raums liegt, ist 6^{ter} Classe und hat die 3 durch diesen Punkt gehenden Osculationsebenen der eben genannten Curve 3^{ter} Classe zu dreifachen Berührungsebenen.

Noch eine andere Fläche 6^{ter} Ordnung betrachtete Noether, *Math. Ann.* 3, p. 203 u. ff. *Sie besitzt als Doppelcurve eine Raumcurve 3^{ter} Ordnung und eine Gerade, welche diese Curve nicht schneidet.*

Ihre Gleichung lässt sich schreiben:

$$\sum A_{ik} y_i y_k = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

darin ist

$$y_1 = L_2 M_3 - L_3 M_2,$$
$$y_2 = L_3 M_1 - L_1 M_3,$$
$$y_3 = L_1 M_2 - L_2 M_1;$$

die L, M sind in den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 homogene lineare Functionen und die A ergeben sich aus den Formeln

$$A_{ik} = \alpha_{ik} x_3^2 + 2\beta_{ik} x_3 x_4 + \gamma_{ik} x_4^2.$$

Jede Ebene des Büschels

$$x_4 - \lambda x_3 = 0$$

schneidet die Fläche ausser in der doppelt gezählten Axe des Büschels in einer variabelen rationalen Curve 4^{ter} Ordnung (mit drei Doppelpunkten).

Die Gleichung der Fläche enthält 18 Constante, weil die Existenz der Doppelcurve 3^{ter} Ordnung und der Doppelgeraden, wie Noether beweist, 66 Constante absorbirt.

Ausser der Doppelgeraden besitzt die Fläche 10 Gerade.

Die Fläche enthält 12 Kegelschnitte und 32 Raumcurven 3^{ter} Ordnung.

Diese Curven liegen zu je zweien zugleich mit der Doppelcurve 3^{ter} Ordnung auf demselben Hyperboloid und gehen durch dieselben beiden Punkte der Doppelgeraden.

Jede von ihnen hat 5 Punkte mit der Doppelcurve 3^{ter} Ordnung gemeinschaftlich und keine schneidet eine der 10 Geraden.

Jede der 32 Curven 3^{ter} Ordnung ist 6 Kegelschnitten zugeordnet, welche sie in je einem Punkte schneidet.

Vertheilt man die 12 Kegelschnitte derart in 6 Paare, dass in dasselbe Paar diejenigen kommen, die durch die nämlichen Punkte der Doppelgeraden gehen, und wählt aus 5 Paaren 5 Kegelschnitte beliebig aus, so existirt immer eine der 32 Raumcurven 3^{ter} Ordnung, welche die 5 gewählten Kegelschnitte in je einem Punkt schneidet; der sechste von derselben Curve geschnittene Kegelschnitt bleibt auf diese Art eindeutig bestimmt.

Die Fläche ist vom Geschlecht Null und deshalb auf die Ebene abbildbar. Diese ebene Abbildung sowie viele andere Eigenschaften wurden von Noether l. c. studirt.

Andere Flächen 6^{ter} Ordnung sind die sogenannten *Berührührungsflächen* der Kummer'schen Fläche, deren Studium aus der Untersuchung der hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 2 hervorging. *Sie berühren die Kummer'sche Fläche längs einer Curve 12^{ter} Ordnung.*

In Bezug auf ihre Gleichung, die man *rational* nennt, *weil ihre Coefficienten rationale Invarianten der binären Form 6^{ter} Ordnung sind*, siehe Pascal, *Ann. di mat.*, (2), 19.

Noch andere Flächen 6^{ter} Ordnung wurden von Pieri, *Acc. Torino*, 1889; Humbert, *Compt. Rend.*, 1895; Del Pezzo, *Acc. Napoli*, 1897; etc. betrachtet.

Wir wollen schliesslich noch Einiges über *die developpablen Flächen 6^{ter} Ordnung* sagen.

Die Rückkehrcurve einer solchen Fläche kann nicht von höherer als der 6^{ten} und geringerer als der 4^{ten} Ordnung sein.

Die Fläche ist immer vom Geschlecht Null, d. h. das Geschlecht eines jeden ihrer ebenen Schnitte ist Null.

Es gibt 3 Arten von Developpablen 6^{ter} Ordnung, nämlich:

1. *Die Fläche, deren Rückkehrkante eine Raumcurve 4^{ter} Ordnung entweder 1^{ter} oder 2^{ter} Species ist. In dem ersteren Fall hat diese Raumcurve einen wirklichen und zwei scheinbare Doppelpunkte; d. h. sie ist der Schnitt zweier Flächen 2^{ter} Ordnung, welche sich in einem Punkt berühren; in dem 2^{ten} Fall hat sie 3 scheinbare Doppelpunkte.*

Ihre charakteristischen Zahlen sind (über die Bedeutung der Symbole vergl. Kap. 9, § 4):

$$m=6,\quad \alpha=4,\quad \beta=0,\quad x=6,\quad y=4,\quad g=6,\quad \lambda=4,$$
$$\tau=0,\quad k=6,\quad R=6.$$

Ihr ebener Schnitt ist eine Curve 6^ter Ordnung und Classe mit 4 Spitzen, 6 Doppelpunkten, 4 Inflexionstangenten und 6 Doppeltangenten.

Andere Eigenschaften findet man in Kap. 10, § 4, S. 263.

2. *Die Fläche, deren Rückkehrkante eine Raumcurve 5^ter Ordnung mit 2 Spitzen und 4 scheinbaren Doppelpunkten ist.*

Ihre charakteristischen Zahlen sind:

$$m=5,\quad \alpha=2,\quad \beta=2,\quad x=5,\quad y=5,\quad g=4,\quad \lambda=2,$$
$$\tau=0,\quad k=4,\quad R=6.$$

Der ebene Schnitt der Fläche ist 6^ter Ordnung und 5^ter Classe mit 5 Doppelpunkten, 5 Spitzen, 2 Wendungen und 4 Doppeltangenten.

3. *Die Fläche, deren Rückkehrkante eine Raumcurve 6^ter Ordnung mit 4 Spitzen und 6 scheinbaren Doppelpunkten ist.*

Ihre charakteristischen Zahlen sind:

$$m=4,\quad \alpha=0,\quad \beta=4,\quad x=4,\quad y=6,\quad g=3,\quad \lambda=0,$$
$$\tau=0,\quad k=3,\quad R=6.$$

Die 4 Ebenen, welche längs der 4 Cuspidalerzeugenden berühren, gehen durch den nämlichen Punkt.

Ihr ebener Schnitt ist 6^ter Ordnung und 4^ter Classe mit 6 Spitzen, 4 Doppelpunkten. 3 Doppeltangenten und keiner Wendung.

Die allgemeine Gleichung der Developpablen 6^ter Ordnung kann auf die folgende Art aufgestellt werden:

Es seien $X_1=0,\ldots, X_5=0$ die Gleichungen von 5 Ebenen; die Formen X sind dann natürlich durch eine lineare Beziehung verbunden, die wir

$$a_1 X_1 + 4 a_2 X_2 + 6 a_3 X_3 + 4 a_4 X_4 + a_5 X_5 = 0$$

schreiben wollen.

Die Gleichung der Developpablen 6^ter Ordnung lautet dann (Cayley):

$$(X_1 X_5 + 4 X_2 X_4 + 3 X_3^2)^3 -$$
$$- 27 (X_1 X_3 X_5 - X_1 X_4^2 - X_2^2 X_3 + 2 X_2 X_3 X_4 - X_3^3)^2 = 0.$$

Die Rückkehrkante ist der (partielle oder totale) Schnitt der beiden Flächen

$$X_1 X_5 - 4 X_2 X_4 + 3 X_3^2 = 0,$$
$$X_1 X_3 X_5 - X_1 X_4^2 - X_2^2 X_5 + 2 X_2 X_3 X_4 - X_3^3 = 0.$$

Die Doppel- oder Knotencurve wird durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{X_1 X_3 - X_2^2}{X_1} = \frac{X_1 X_4 - X_2 X_3}{2 X_2} = \frac{X_1 X_5 + 2 X_2 X_4 - 3 X_3^2}{6 X_3} =$$
$$= \frac{X_2 X_5 - X_3 X_4}{X_4} = \frac{X_3 X_5 - X_4^2}{2 X_5},$$

und die Schnittpunkte der Knotencurve und der Rückkehrkante durch:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{X_3} = \frac{X_3}{X_4} = \frac{X_4}{X_5}.$$

Die verschiedenen Arten von Developpablen 6ter Ordnung unterscheiden sich nach der Beschaffenheit der Coefficienten $a_1, \ldots, a_5$, d. h. nach der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung 4ten Grads, die diese Zahlen zu Coefficienten hat. Cayley.

Sind nämlich diese Wurzeln ungleich, so erhält man die Developpable mit einer Rückkehrkante 6ter Ordnung.

Sind zwei Wurzeln gleich, so ist die Rückkehrkante 5ter Ordnung.

Sind dagegen zwei Paare von Wurzeln gleich, so hat die Developpable eine Rückkehrkante 4ter Ordnung 2ter Species.

Wenn die 4 Wurzeln eine harmonische Gruppe bilden, so ergibt sich die Developpable mit der Rückkehrkante 4ter Ordnung 1ter Species.

Wenn schliesslich 3 oder 4 Wurzeln gleich sind, so degenerirt die Developpable in andere Developpable 5ter bez. 4ter Ordnung.

Mit diesen Developpablen 6ter Ordnung beschäftigten sich Cayley, *Cambr. Math. Journ.*, 5, 1850; *Quart. Journ.* 7, 1865; 9, 1867; *Ann. di mat.*, 2, 1868, p. 99 u. 219, etc.; Salmon, *Cambr. Math. Journ.*, 1850; Chasles, *Compt. Rend.*, 54, 1862; H. A. Schwarz, *Crelle*, 64.

Die windschiefen Regelflächen 6ter Ordnung untersuchte Bergstedt, *Om regelytor af 6 graden,* Dissert., Lund 1886; Fink, *Ueber windschiefe Flächen im Allgemeinen und insbesondere über solche des 6ten Grads.* Tübinger Dissert., auch in dem Correspondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs, 1887; Wiman, *Classification af regelytorna af 6 graden*, Lund 1892. Vergl. auch Wiman, *Acta math.*, 19.

§ 5. Die Developpablen 7^{ter} Ordnung.

Die Rückkehrcurve einer Developpablen 7^{ter} Ordnung kann entweder von der 5^{ten}, 6^{ten} oder 7^{ten} Ordnung sein.

Wir führen hier zuerst ein Theorem an, welches für alle Developpablen ungerader Ordnung gilt:

Bei jeder abwickelbaren Fläche ungerader Ordnung ist die Anzahl der Inflexionsberührungsebenen ungerade und ebenso ist die Anzahl der Spitzen der Rückkehrcurve ungerade. H. A. Schwarz.

Alle Developpablen bis zur 7^{ten} Ordnung inclusive sind vom Geschlecht Null, weil ihre ebenen Schnitte dieses Geschlecht haben; daraus folgt, dass für sie die Summe der Zahlen, welche die Ordnung der Rückkehrkante und die Ordnung der Knotencurve angeben, constant ist.

Diese sämmtlichen Flächen bis zur 7^{ten} Ordnung inclusive lassen sich als Enveloppen von Ebenen auffassen, in deren Gleichungen ein Parameter t rational eingeht, d. h. von Ebenen, die durch Gleichungen von der Form

$$X_1 t^n + X_2 t^{n-1} + \cdots = 0$$

dargestellt werden; darin ist n eine ganze positive Zahl und die X sind in den Coordinaten lineare Ausdrücke.

Cayley nannte diese Developpablen *planar*; ihnen ist die Arbeit von H. A. Schwarz, *Crelle*, 64 gewidmet.

Die charakteristischen Zahlen für die drei Species von Developpablen 7^{ter} Ordnung sind die folgenden (Schwarz l. c.):

1. *die Rückkehrcurve ist 5^{ter} Ordnung:*

$$m = 7,\ g = 10,\ h = 5,\ \alpha = 5,\ \beta = 1,\ x = 10,\ y = 8,\ \lambda = 7,\ \tau = 2,\ k = 22,\ R = 13;$$

2. *die Rückkehrcurve ist 6^{ter} Ordnung:*

$$m = 6,\ g = 7,\ h = 7,\ \alpha = 3,\ \beta = 3,\ x = 9,\ y = 9,\ \lambda = 6,\ \tau = 1,\ k = 18,\ R = 12;$$

3. *die Rückkehrcurve ist 7^{ter} Ordnung:*

$$m = 5,\ g = 5,\ h = 10,\ \alpha = 1,\ \beta = 5,\ x = 8,\ y = 10,\ \lambda = 5,\ \tau = 0,\ k = 15,\ R = 11.$$

§ 6. Regelflächen von beliebiger Ordnung.

Wir haben auf S. 207 und ff. einige allgemeine Eigenschaften der algebraischen Regelflächen angegeben und dann auf S. 223, 230 noch andere sie betreffende Sätze hinzugefügt; diese beziehen sich auf die Ordnung, die Classe, das Geschlecht, die Knotencurve der Regelflächen, auf die Curven, die sich auf ihnen beschreiben lassen, etc. Wir wollen jetzt, ohne uns zu wiederholen, noch einige andere interessante Sätze anführen.

Wir bemerken vor Allem die projective Eigenschaft:

Jede Ebene, welche eine Erzeugende der windschiefen Regelfläche enthält, berührt die Fläche in einem und nur in einem Punkt; das Büschel von Berührungsebenen ist projectiv zu der Punktreihe der Berührungspunkte längs der Erzeugenden. Chasles.

Wir bemerken ferner die folgenden metrischen Eigenschaften:

Schneidet man eine Regelfläche mit Ebenen, die einer festen Ebene parallel sind, so bilden die in den Punkten derselben Erzeugenden an die Schnittcurven gelegten Tangenten ein hyperbolisches Paraboloid.

Auch die Normalen der Fläche in den Punkten einer Erzeugenden bilden ein hyperbolisches Paraboloid (das Normalenparaboloid).

Centralpunkt einer Erzeugenden heisst der Fusspunkt des Lothes, welches dieser Erzeugenden und der ihr unendlich nahen gemeinschaftlich ist; der Ort aller Centralpunkte bildet die sogenannte *Strictionslinie.* Chasles.

Der Centralpunkt einer Erzeugenden ist der Scheitel des Normalenparaboloids.

Centralebene in Bezug auf eine Erzeugende nennt man die Ebene, die durch die Erzeugende und das dieser und der ihr unendlich nahen Erzeugenden gemeinschaftliche Loth geht, und *Schiefe* einer Berührungsebene wird dann wohl der Winkel zwischen ihr und der Centralebene in Bezug auf die durch den Berührungspunkt gehende Erzeugende genannt.

Die Tangente der Schiefe einer Berührungsebene ist dem Abstand des Berührungspunkts von dem Centralpunkt proportional.

Die Centralebene berührt in dem Centralpunkt; die Centralebene und die Berührungsebene in dem unendlich fernen Punkt der Erzeugenden stehen senkrecht aufeinander.

Parameter einer Erzeugenden heisst der Abstand ihres Centralpunkts von dem Punkt, in welchem die Schiefe der Berührungsebene $\frac{\pi}{4}$ beträgt.

Wenn eine Ebene durch eine Erzeugende einer windschiefen Fläche geht, so ist das Product der Abstände des Centralpunkts von den beiden Punkten, in welchen die Ebene berührt bez. normal ist, constant *und dem Quadrat des Parameters gleich.* Chasles.

Wenn zwei windschiefe Flächen sich in allen Punkten einer Erzeugenden unter constantem Winkel schneiden, so hat diese Gerade denselben Parameter und denselben Centralpunkt, mag man sie nun als zur einen oder zur anderen Fläche gehörig betrachten und umgekehrt.

Auf den windschiefen Regelflächen sind gewisse singuläre Punkte und Gerade bemerkenswerth; nehmen wir an, eine gewisse Erzeugende schneide die ihr unendlich nahe; alsdann wird der Schnittpunkt der beiden unendlich nahen Erzeugenden *Cuspidalpunkt (Spitze, sommet)* genannt, während die Erzeugende, auf welcher dieser Punkt liegt, *singulär (arête, Kante, Torsallinie)* und die (Berührungs)-Ebene, welche durch die singuläre Erzeugende und die ihr unendlich nahe geht, *singuläre Berührungsebene* heisst.

Offenbar gehört der Cuspidalpunkt der Doppel- oder Knotenlinie an.

Wenn n die Ordnung und a der Rang*) der windschiefen *Fläche ist, so wird die Anzahl der singulären Erzeugenden*

$$T = 2a - 2n.$$

Sturm, *Math. Ann.* 6; Schubert, ib., 17.

Da eine Gerade des Raums durch 4 Bedingungen bestimmt wird, so erhält man im Allgemeinen eine Regelfläche, wenn der Geraden vorgeschrieben wird, dass sie entweder drei gegebene Curven treffen soll, oder eine Curve zweimal und eine andere einmal oder schliesslich eine Curve dreimal.

Es bietet sich nun das Problem dar, die Charakteristiken der Regelflächen zu bestimmen, welche diese Curven auf die angegebene Art zu *Leitlinien* haben. Damit beschäftigten sich Cayley, *Cambr. Journ.*, 7, 1852 = *Coll. math. papers*, 2, p. 33;

*) Man pflegt *Rang* einer Fläche die Ordnung a des ihr umschriebenen Kegels oder die Classe a' ihres ebenen Schnitts zu nennen (siehe Kap. 9, § 1, S. 208, 209).

Phil. Trans., 153, 1863 = *Coll. math. papers*, 5, p. 168; Salmon, *Cambr. Journ.*, 8, 1853; *Trans. Irish Acad.*, 23 und später Rupp, *Math. Ann.*, 18.

Doch, ehe wir die Resultate mittheilen, zu denen sie gekommen sind, müssen wir noch Einiges über die Singularitäten hinzufügen, welche die Regelflächen auch sonst noch besitzen können.

Eine Erzeugende einer Regelfläche kann *doppelt* sein, d. h. derart, dass für jeden ihrer Punkte zwei verschiedene Berührungsebenen an die Fläche existiren; fallen diese beiden Ebenen für jeden ihrer Punkte zusammen, so ist sie eine ***stationäre Erzeugende.***

Jede Erzeugende, die durch die stationären Punkte einer Leitcurve geht, ist eine stationäre Erzeugende und im Allgemeinen kann eine stationäre Erzeugende nicht anders entstehen.

Die Doppellinie der Regelfläche lässt sich in verschiedene Theile zerlegen, von denen einige auch *Leitlinien* der Regelfläche sind und andere nicht. Wir bezeichnen nun mit

- D_N die Summe der Zahlen, welche die Ordnungen der Doppel-(Knoten-)Curven angeben, die zugleich Leitlinien sind;
- R_N die Summe der Zahlen, welche die Ordnungen der Doppelcurven angeben, mit Ausnahme der Doppelcurven, die zugleich Leitlinien sind, und mit Ausnahme der doppelten Erzeugenden;
- G_N die Anzahl der doppelten Erzeugenden mit Ausnahme der stationären;
- T_N die Summe der drei vorstehenden Zahlen, d. h. die Anzahl der Doppelpunkte (mit Ausnahme der Spitzen) eines ebenen Schnitts der Regelfläche;
- G_S die Anzahl der stationären Erzeugenden;
- T die Anzahl der singulären Erzeugenden (siehe oben);
- a den Rang der Regelfläche (siehe oben).

Man erhält dann die folgenden Resultate:

1^ter^ *Fall. Drei einfache Leitcurven* φ, ψ, χ
von den Ordnungen m_1, m_2, m_3,
den Classen r_1, r_2, r_3,
den Geschlechtern p_1, p_2, p_3,
mit h_1, h_2, h_3 *scheinbaren Doppelpunkten und*
β_1, β_2, β_3 *Cuspidalpunkten.*

Es ist:

$$n = 2m_1m_2m_3 \text{ (die Ordnung der Regelfläche)},$$

$$D_N = \tfrac{1}{2}m_1m_2m_3(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1),$$

$$G_N = \tfrac{1}{2}m_1 m_2 m_3(m_1 + m_2 + m_3 - 3) + \\ + m_1 m_2 h_3 + m_2 m_3 h_1 + m_3 m_1 h_2,$$

$$R_N = \tfrac{1}{2}m_1 m_2 m_3 [4 m_1 m_2 m_3 - (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) - \\ - 2(m_1 + m_2 + m_3) + 5],$$

$$2T_N = 2 m_1 m_2 m_3 (2 m_1 m_2 m_3 - 2) - \\ - (m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2) - \\ - 3(m_1 m_2 \beta_3 + m_2 m_3 \beta_1 + m_3 m_1 \beta_2),$$

$$G_S = \beta_1 m_2 m_3 + \beta_2 m_3 m_1 + \beta_3 m_1 m_2,$$

$$a = 2 m_1 m_2 m_3 + m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2,$$

$$T = 2(m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2).$$

2ter Fall. Eine doppelte Leitcurve φ und eine einfache ψ:

$$n = m_2 \{h_1 + \tfrac{1}{2}m_1(m_1 - 1)\},$$

$$D_N = \tfrac{1}{2}m_2 \{h_1^2 - h_1 + m_1 m_2 (m_1 - 1)^2 - m_1(m_1 - 1)\},$$

$$G_N = h_1 h_2 + \tfrac{1}{4}m_1 m_2 (m_1 - 1)(m_2 - 1) + \\ + 3 m_2 (m_1 - 2)\{h_1 - \tfrac{1}{6}m_1(m_1 - 1)\},$$

$$R_N = m_2 \{\tfrac{1}{2}h_1 (m_1 - 2)(m_1 - 3) + \\ + \tfrac{1}{8}m_1(m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3)\} + \\ + m_2(m_2 - 1)\{\tfrac{1}{2}h_1^2 + \tfrac{1}{2}h_1(m_1^2 - m_1 - 1) + \\ + \tfrac{1}{8}m_1(m_1 - 1)(m_1^2 - 5m_1 + 2)\},$$

$$2T_N = m_2^2 \{h_1 + \tfrac{1}{2}m_1(m_1 - 1)\}^2 - m_2 h_1 - \tfrac{3}{2}m_1 m_2 (m_1 - 1) - \\ - r_1 m_2 (m_1 - 3) - h_1 r_2 - 3\beta_2\beta_1 - 3\beta_1 m_2 (m_1 - 3),$$

$$G_S = \beta_2 h_1 + \beta_1 m_2 (m_1 - 2),$$

$$a = r_1 m_2 (m_1 - 3) + m_1 m_2 (m_1 - 1) + h_1 r_2 - 3\beta_1 m_2,$$

$$T = r_1 m_2 (2m_1 - 5) + 2 h_1 r_2 - 3\beta_1 m_2.$$

3ter Fall. Die Curve φ ist eine dreifache Leitlinie; die Regelfläche besteht in diesem Fall aus den die Curve dreimal schneidenden Geraden; vergl. auch Kap. 9, § 4, S. 230.

$$n = (m - 2)\{h - \tfrac{1}{6}m(m - 1)\},$$

$$D_N = \tfrac{1}{2}m(h - m + 2)(h - m + 1),$$

$$G_N = \tfrac{1}{4}\{- m^4 + 18m^3 - 71m^2 + 78m - \\ - 48mh + 132h + 12h^2\},$$

$$R_N = \tfrac{1}{2}h^2 m(m - 1) - \tfrac{1}{6}h(m^4 - 5m^3 + 5m^2 - 49m + 120) + \\ + \tfrac{1}{72}(m^6 - 6m^5 + 31m^4 - 270m^3 + 868m^2 - 840m),$$

$$2T_N = m^2h^2 - 4mh^2 + 6h^2 -$$
$$- \tfrac{1}{3}(m^4 - 5m^3 + 11m^2 + 14m - 78)h +$$
$$+ \tfrac{1}{36}(m^6 - 6m^5 + 13m^4 + 90m^3 - 518m^2 + 636m),$$
$$G_S = \beta(h - 2m + 6),$$
$$a = -2h^2 + h(m^2 + 5m - 24) -$$
$$- \tfrac{1}{6}(16m^3 - 84m^2 + 104m) - 3\beta(h - 2m + 6),$$
$$T = -4h^2 + 2h(m^2 + 4m - 22) - 5m^3 + 27m^2 -$$
$$- 34m - 6\beta(h - 2m + 6).$$

Man erhält eine Regelfläche auch, wenn die sich entsprechenden Punkte zweier Curven (*Leitlinien*) verbunden werden, die in der Correspondenz (α_1, α_2) stehen; *sind* m_1, m_2 *die Ordnungen der beiden Curven, so ist die Ordnung der Regelfläche* $m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1$.

Von dem Standpunkt der Liniengeometrie aus (vergl. Kap. 14) werden die Regelflächen als Schnitte dreier Liniencomplexe definirt; sie können entweder der vollständige Schnitt oder ein Theil des Schnitts sein.

In den folgenden Formeln nehmen wir den ersten Fall an.

Wenn die drei Complexe von den Ordnungen m_1, m_2, m_3 *sind, so ist die Ordnung der Regelfläche* $n = 2m_1m_2m_3$ *und ihr Rang*

$$a = 2m_1m_2m_3(m_1 + m_2 + m_3 - 2) - 2G_N,$$

worin G_N, *wie oben, die Anzahl der Doppelerzeugenden der Fläche angibt (und angenommen wird, dass die Fläche keine stationäre Erzeugende habe).*

Die Ordnung der Doppelcurve ist

$$D = m_1m_2m_3\{2m_1m_2m_3 - (m_1 + m_2 + m_3) + 1\}$$

und das Geschlecht der Fläche

$$p = m_1m_2m_3(m_1 + m_2 + m_3 - 4) - 1 - G_N.$$

Diese Formeln können jedoch Modificationen unterliegen, je nach den verschiedenen Eigenthümlichkeiten der Complexe.

Wenn einer der gegebenen Complexe linear ist $(m_3 = 1)$, *so sind die algebraischen Asymptotencurven (die Haupttangenten-*

curven) der Fläche, d. h. diejenigen, deren Tangenten die Fläche osculiren (eine dreipunktige Berührung mit der Fläche haben: vergl. S. 204), von der Classe (dem Rang)

$$12 m_1 m_2 (m_1 + m_2 - 2)$$

und der Ordnung

$$2 m_1 m_2 (m_1 + m_2 - 1).$$

Diese Zahlen ändern sich jedoch, wenn die gegebenen Complexe specielle Beziehungen zu einander haben; wenn z. B. auch $m_2 = 1$ ist, so gelten diese Zahlen nicht mehr, falls die beiden linearen Complexe eine *specielle Congruenz* gemeinschaftlich haben. Siehe Voss, *Math. Ann.*, 8, p. 82, 83.

Es gibt auf der Fläche eine einfache Unendlichkeit von Punkten, in denen eine Tangente die Fläche *vierpunktig berührt.*

Die Curve dieser Punkte vierpunktiger Berührung ist von der Ordnung

$$2 m_1 m_2 m_3 \{6(m_1 + m_2 + m_3) - 19\}$$

und enthält

$$8 m_1 m_2 m_3 \{3(m_1 + m_2 + m_3) - 10\}$$

Punkte, in welchen sie Erzeugende der gegebenen Regelfläche berührt; diese Erzeugenden sind stationäre Tangenten an eine algebraische Haupttangentencurve.

Ueber die Tangenten, die mit der Regelfläche eine Berührung 4ter Ordnung haben, siehe Voss, l. c., p. 99.

Die Regelfläche n^{ter} Ordnung ohne vielfache Erzeugende und und vom Geschlecht Null hat den Rang $2(n-1)$ und enthält eine Doppelcurve von der Ordnung $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Es gibt $2(n-2)(n-3)$ Erzeugende, welche die Doppelcurve berühren, $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ dreifache Punkte und ebensoviele dreifach berührende Ebenen.

Es existiren $2(n-2)$ singuläre Erzeugende (Kanten, Torsallinien) in dem oben definirten Sinn.

Die durch die Tangenten vierpunktiger Berührung erzeugte Regelfläche ist von der Ordnung $8(n-3)$ und ebensogross ist die Anzahl der Punkte, in welchen die Curve dieser Berührungspunkte eine Erzeugende berührt. Das Geschlecht dieser Regelfläche ist $4n-13$.

Es gibt auf einer solchen Regelfläche n^{ter} Ordnung $10(n-4)$ *Punkte, in welchen eine Tangente eine Berührung 4^{ter} Ordnung mit der Fläche hat.*

Die Asymptotenlinien einer Regelfläche von der $(n_1+n_2)^{ten}$ Ordnung und vom Geschlecht Null, die zu Leitlinien eine n_1 und eine n_2-fache Gerade hat, sind algebraische Curven und von der Ordnung $2(n_1+n_2-1)$. Cremona, *Ann. di mat.*, (2), 1.

Wenn die beiden Leitgeraden sich unbegrenzt bis zum Zusammenfallen einander nähern, so werden die Asymptotenlinien vom Geschlecht Null und der Ordnung $2n_1+n_2-2$, falls $n_1 \geq n_2$ ist. Cremona, l. c.

Die hauptsächlichsten und grundlegenden metrischen Eigenschaften der Regelflächen fanden und studirten besonders Monge, *Add. à la géom. déscript.*; Hachette, *Crelle,* 8; Chasles, *Journ. de Liouville,* 2; etc.; siehe auch die *darstellende Geometrie* von De La Gournerie.

Cayley, Salmon, Rupp beschäftigten sich in ihren oben citirten Arbeiten mit den Problemen in Bezug auf die charakteristischen Zahlen der Regelflächen mit bestimmten Leitlinien.

Die Asymptotenlinien der Regelflächen studirten Clebsch, *Crelle,* 68; Cremona, l. c.; Voss l. c.; Pittarelli, *Rend. Lincei,* 1891—1894 und Andere.

Speciellen Regelflächen ist das Buch De La Gournerie's, *Rech. sur les surf. réglées tétraèdrales symétriques,* Paris 1867 gewidmet.

Lüroth, *Crelle,* 67 und Voss, *Math. Ann.*, 8 untersuchten die Regelflächen, die man als *vollständige* Schnitte dreier Liniencomplexe betrachten kann.

Die rationalen Regelflächen (vom Geschlecht Null) machten Cremona, l. c.; Armenante, *Ann. di mat.,* (2), 4; Clebsch, *Math. Ann.,* 5; Noether, *Math. Ann.,* 3, p. 194 zum Gegenstand ihrer Forschungen; der letztere studirte die rationale Regelfläche n^{ter} Ordnung mit einer $(n-1)$-fachen Geraden.

Neuere Untersuchungen über die Regelflächen vom Standpunkt der Geometrie auf den Flächen und unter Rücksichtnahme auf die mehrdimensionalen Räume sind von Segre, *Atti Acc. Torino,* t. 19, 21, 22, 1883—1887; *Rend. Lincei,* 1887; *Math. Ann.,* 34.

§ 7. Rationale Flächen. Flächen mit rationalen oder elliptischen oder hyperelliptischen Schnitten.

Man nennt *rational* (oder *unicursal, homaloid*) Flächen, die man in ein-eindeutige Correspondenz mit einer Ebene bringen kann. Den Betrachtungen in Kap. 9, § 7 über die ebene Abbildung dieser Flächen fügen wir noch die folgenden Bemerkungen hinzu:

Die Bedingungen, damit eine Fläche n^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve von der Ordnung d und dem Geschlecht π, welche t dreifache, auch für die Fläche dreifache Punkte besitzt, rational sei, sind die folgenden:

1. *Das numerische Geschlecht* (vergl. Kap. 9, § 4, S. 223) *muss Null sein:*

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)d + 2t + \pi - 1 = 0.$$

2. *Es dürfen keine Flächen von der Ordnung* $2(n-4)$ *existiren, welche doppelt durch die Doppelcurve gehen (mit Ausnahme der Flächen, welche die gegebene Fläche enthalten).*

Jede Fläche, welche so beschaffen ist, dass die Coordinaten eines beliebigen ihrer Punkte sich als rationale Functionen zweier Parameter ausdrücken lassen, ist rational. Dieses Theorem, welches einem Satz von Lüroth (*Math. Ann. 9*) über die Curven entspricht (siehe Kap. 5, § 1, p. 131), wurde von Castelnuovo, *Math. Ann.*, 44, 48, p. 313 bewiesen.

Jede Fläche 3^{ter} Ordnung ist rational mit Ausnahme des allgemeinen Kegels 3^{ter} Ordnung.

Alle Flächen 4^{ter} Ordnung, die vielfache Linien haben, sind rational, wenn man die Regelflächen ausnimmt, die von höherem Geschlecht als dem nullten sind. Unter den Flächen 4^{ter} Ordnung ohne vielfache Linien gibt es nur 4 rationale Arten: eine von ihnen studirte Cremona, *Collect. math. in mem. D. Chelini*, Mediolani 1881 und die übrigen mit Einschluss dieser letzteren Noether, *Math. Ann.*, 33.

Jede Fläche, welche ein einfach unendliches System rationaler Curven derart enthält, dass durch jeden Punkt der Fläche eine einzige Curve des Systems geht, lässt sich in eine Regelfläche birational transformiren (abbilden); wenn dieses System rational ist, so ist es auch die Fläche. Das Problem wurde von Noether, *Math. Ann.*, 3 behandelt, der es in dem letzteren

Fall vollständig auflöste; über den allgemeinen Fall siehe Enriques, *Rend. Lincei,* 1898 und *Math. Ann.*, 52.

Alle Flächen, die ein doppelt unendliches System elliptischer Curven enthalten, sind rational oder können in eine Regelfläche vom Geschlecht 1 birational transformirt (abgebildet) werden. Castelnuovo, *Rend. Lincei,* 1894.

Ueber den Fall, in dem die Curven des linearen Systems hyperelliptisch sind, siehe Castelnuovo, ib.

Eine Fläche, deren sämmtliche ebene Schnitte rationale Curven sind, ist rational und insbesondere entweder eine Regelfläche oder die Steiner'sche Fläche 4^{ter} Ordnung. Theorem von Picard, *Crelle,* 100; vergl. Kap. 12, § 9.

Jede Fläche, deren sämmtliche ebene Schnitte elliptische Curven sind, ist entweder rational oder eine Regelfläche; in dem ersten Fall kann ihre Ordnung nicht höher als die neunte sein. Castelnuovo, *Rend. Lincei,* 1894.

Eine Fläche, deren sämmtliche ebene Schnitte hyperelliptische Curven sind, ist entweder rational (und enthält ein Büschel von Kegelschnitten) oder eine Regelfläche. Enriques, *Rend. Lincei,* 1893.

Eine Zusammenstellung dieser und anderer Resultate findet man bei Castelnuovo-Enriques, *Math. Ann.*, 48, p. 307 u. ff.

Verwandt mit diesen Untersuchungen sind die Studien über die Flächen, welche sich birational in sich selbst transformiren lassen. Castelnuovo und Enriques dehnten einen Satz von Schwarz über Curven auf die Flächen aus und bewiesen ihn (*Compt. Rend.*, 1895; siehe auch Painlevé, ib.):

Jede Fläche, welche eine continuirliche transitive Gruppe birationaler Transformationen (d. h., eine solche, bei welcher jeder Punkt der Fläche in jeden beliebigen anderen übergehen kann) in sich selbst zulässt, ist eine rationale Fläche, wenn die Gruppe von zwei Parametern abhängt und die Transformationen unter sich nicht vertauschbar sind; hängt aber die Gruppe von mehr als 2 Parametern ab, so ist die Fläche entweder rational oder in eine elliptische Regelfläche (vom Geschlecht 1) transformirbar.

Dieses Problem behandelte zuerst Picard, *Journ. de math.*, (4), 5, der den Fall der vertauschbaren Gruppe ∞^2 eingehend besprach; diese Gruppe führte dann zu der Classe der hyperelliptischen Flächen, die Humbert, *Journ. de math.*, (4), 9 gründlich studirte. Siehe auch die citirte Arbeit von Castelnuovo-Enriques, *Math. Ann.*, 48 und Painlevé, *Leçons sur la théor. anal. des équat. diff. professées à Stockholm*, Hermann, Paris 1897, in welcher der Verfasser die Theorie der Flächen mit Transformationen in sich selbst erschöpfend behandelt.

Es gibt auch algebraische Oberflächen, welche unendlich viele discontinuirliche, aber keine continuirlichen Transformationen in sich zulassen. Diese Eigenschaft wurde von Humbert bei gewissen mit der Kummer'schen Fläche verwandten Flächen entdeckt. Vergl. Painlevé, *Compt. Rend.*, 126, 1898.

Kapitel XIV.

Die Liniengeometrie und die Kugelgeometrie im Raum.

§ 1. Allgemeines. Liniencoordinaten im Raum.

Eine Gerade im Raum wird durch vier elementare Bedingungen bestimmt, so dass also der Strahlenraum (in welchem die Gerade das Element ist) als ein *(nicht linearer, sondern quadratischer)* Raum von vier Dimensionen zu betrachten ist.

Wenn x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines Punkts des Raums und y_1, y_2, y_3, y_4 die eines anderen Punkts sind, so bilden wir die Determinanten 2ter Ordnung der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{vmatrix}$$

und setzen

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i.$$

Die Verhältnisse zweier beliebiger der 6 Grössen p_{ij} ändern sich nicht, wenn man anstatt eines der Punkte (x), (y) oder beider einen beliebigen anderen Punkt der Geraden substituirt, welche sie verbindet; die Grössen p_{ij} kann man daher zu homogenen Coordinaten einer Geraden des Raums wählen.

Zwischen ihnen besteht die einzige identische Relation:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Nach der Definition dieser Coordinaten wird die Gerade als Ort von Punkten betrachtet; man pflegt sie *Strahlencoordinaten* zu nennen. Plücker.

Betrachtet man dagegen die Gerade als Enveloppe von Ebenen, so erhält man analoge Coordinaten, die *Axencoordinaten* genannt werden:

Wenn (u), (v) die homogenen Coordinaten zweier durch die Gerade gehender Ebenen sind, so ergeben sich die Binome:

$$\pi_{ij} = u_i v_j - u_j v_i.$$

Die Verhältnisse zweier der sechs π_{ij} *sind unabhängig von der Wahl der speciellen durch die Gerade gehenden Ebenen* (u), (v); *diese* π_{ij} *können daher zu homogenen Axencoordinaten einer Geraden im Raum gewählt werden; zwischen ihnen besteht die identische Beziehung*

$$\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23} = 0.$$

Die Bedingung, damit zwei Gerade mit den Coordinaten (p) *und* (p') *sich schneiden (in derselben Ebene liegen), ist durch*

$$p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} + p'_{12}p_{34} + p'_{13}p_{42} + p'_{14}p_{23} = 0$$

gegeben.

Die 6 Geraden des Raums, für welche je 5 der 6 Coordinaten verschwinden, sind die Kanten des Fundamentaltetraeders.

Sind x, y, z die *orthogonalen* Cartesischen Coordinaten eines Punkts des Raums und $x', y' z'$ die Coordinaten eines zweiten Punkts, so werden die Coordinaten p

$$p_{14} = x - x', \quad p_{24} = y - y', \quad p_{34} = z - z',$$

$$p_{23} = yz' - zy', \quad p_{31} = zx' - xz', \quad p_{12} = xy' - yx',$$

die wir bez. mit

$$\begin{matrix} l, & m, & n, \\ L, & M, & N \end{matrix}$$

bezeichnen wollen.

Wir geben jetzt einige Fundamentalformeln an, die sich auf metrische Eigenschaften beziehen:

Der Winkel, den zwei Gerade (l, m, n, L, M, N). (l', m', n', L', M', N') *miteinander bilden, ist durch die Formeln*

$$\cos(rr') = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}},$$

$$\sin^2(rr') = \frac{\left\|\begin{matrix} l', & m', & n' \\ l, & m, & n \end{matrix}\right\|^2}{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}$$

gegeben; dabei steht

$$\left\|\begin{matrix} l', & m', & n' \\ l, & m, & n \end{matrix}\right\|^2 \quad \textit{für}$$

$$\begin{vmatrix} l', & m' \\ l, & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m', & n' \\ m, & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n', & l' \\ n, & l \end{vmatrix}^2.$$

Der Abstand zweier Geraden ist

$$\text{Abst.}\,(rr') = \frac{lL' + mM' + nN' + Ll' + Mm' + Nn'}{\sqrt{\left\|\begin{matrix} l, & m, & n \\ l', & m', & n' \end{matrix}\right\|^2}}.$$

Unter dem *Moment zweier Geraden* versteht man das Product aus dem Sinus ihres Winkels mit ihrem kleinsten Abstand (Cayley); aus den vorstehenden Formeln ergibt sich daher sofort, dass *das Moment zweier Geraden* in orthogonalen Coordinaten

$$\text{Mom.}\,(rr') = \frac{lL' + mM' + nN' + Ll' + Mm' + Nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}}$$

ist.

Die 6 allgemeinen homogenen Coordinaten einer Geraden sind den 6 Momenten der Geraden in Bezug auf jede der 6 Kanten des Fundamentaltetraeders der Coordinaten proportional, d. h. in Bezug auf die sechs Geraden des Raums, für welche 5 der 6 Coordinaten der Geraden Null werden.

Eine grosse Anzahl solcher Formeln wurde von Cayley, *Cambr. Trans.*, 11, Thl. 2 = *Coll. math. papers*, 7, p. 66 aufgestellt; über ähnliche Formeln, aber mit den Coordinaten p_{ij} siehe d'Ovidio, *Giorn. di Batt.*, 8, 11.

Ein anderes Liniencoordinatensystem untersuchte Zeuthen, *Math. Ann.*, 1; dabei werden zu homogenen Liniencoordinaten die Volumina von sechs Tetraedern genommen, von denen jedes zu gegenüberliegenden Kanten eine auf der Geraden gewählte Strecke (die Einheit) und eine der 6 Kanten des Fundamentaltetraeders hat.

Diese Coordinaten genügen einer homogenen Relation 2^{ten} *Grads mit drei Termen, die der Beziehung ähnlich ist, welche die* p_{ij} *erfüllen.* Siehe auch Drach, *Math. Ann.*, 2; d'Ovidio, *Giorn. di Batt.*, 10.

Von den 6 Coordinaten p_{ij} *kann man mittelst einer linearen Transformation zu einem Coordinatensystem* x_i $(i = 1, \ldots, 6)$ *übergehen, wenn man es so einrichtet, dass die quadratische Relation, welcher die p genügen, sich in die specielle quadratische Beziehung*

$$\sum x_i^2 = 0$$

verwandelt.

Diese 6 Coordinaten x_i heissen *die Klein'schen Coordinaten, Math. Ann.*, 2; vergl. auch seine *Inaug.-Diss.*, Bonn 1868, wieder abgedruckt in den *Math. Ann.*, 23.

Eine elegante geometrische Interpretation dieser Transformation ist die folgende: Die sechs p_{ij} werden als homogene Coordinaten eines Punkts im Raum von 5 Dimensionen aufgefasst; alsdann stellt die Relation 2^{ten} Grads, welcher die p genügen, in diesem Raum eine *nicht degenerirte Fläche* 2^{ter} *Ordnung* dar (weil ihre Discriminante von Null verschieden ist); jeder Punkt dieser Fläche entspricht so einer Geraden des Raums und umgekehrt und die Geometrie auf dieser Fläche 2^{ter} Ordnung entspricht der Liniengeometrie des gewöhnlichen Raums.

Wir wollen eine lineare Transformation der Coordinaten in dem Raum von 5 Dimensionen derart vornehmen, dass die Gleichung dieser Fläche 2^{ter} Ordnung die Form

$$\sum x_i^2 = 0$$

annimmt, d. h. die Form, welche nur die Terme mit den Quadraten der Coordinaten enthält (es lässt sich dieses auf unendlich viele Arten ausführen, vergl. Bd. 1, Kap. 12, § 15); die neuen Coordinaten sind dann die oben erwähnten Klein'schen. Wie man nun weiss, sind die linearen Räume $x_i = 0$, wenn der Gleichung der Fläche 2^{ter} Ordnung die obige Form gegeben wird, zu je zweien in Bezug auf die Fläche 2^{ter} Ordnung conjugirt, d. h. der Pol eines der Räume in Bezug auf die Fläche 2^{ter} Ordnung liegt in dem anderen Raum (diese Eigenschaft ist nur die Erweiterung des für die Kegelschnitte auf S. 79 und für die Flächen 2^{ter} Ordnung auf S. 106 angegebenen Satzes). Wir kommen mithin zu dem Resultat: *Die Fundamentalräume in dem neuen Coordinatensystem sind zu je zweien in Bezug auf die Fundamentalfläche* 2^{ter} *Ordnung conjugirt.*

Eine Relation zwischen den Liniencoordinaten stellt eine dreifache Unendlichkeit von Geraden im Raum dar, d. h. das, was man einen *Liniencomplex* zu nennen pflegt; zwei Relationen zwischen den Liniencoordinaten stellen eine doppelte Unendlichkeit von Geraden dar, d. h. eine *Liniencongruenz* und schliesslich drei Relationen zwischen den Liniencoordinaten eine *Regelfläche.*

Vier Beziehungen der genannten Art stellen dann im Allgemeinen *eine endliche Anzahl von Geraden des Raums* dar.

Definirt man einen *Complex* als eine Mannigfaltigkeit ∞^3 von Geraden und einen *algebraischen Complex* als eine Mannigfaltigkeit ∞^3 von Geraden, deren Coordinaten algebraische

Functionen dreier unabhängiger Parameter sind, so ergibt sich das Theorem:

Jeder algebraische Complex kann immer vollständig durch eine einzige algebraische Relation zwischen den sechs Liniencoordinaten dargestellt werden; legt man dagegen die Punkte einer Fläche 2ter Ordnung des Raums von 5 Dimensionen zu Grund, so erhält der Satz die andere Fassung:

Jeder algebraische in der Fundamentalfläche 2ter Ordnung enthaltene Raum von 3 Dimensionen ist immer der vollständige Schnitt dieser Fläche mit einem anderen algebraischen Raum von 4 Dimensionen.

Wenn die algebraische Beziehung, die einen algebraischen Complex darstellt, den Grad n hat, *so sagt man, der Complex sei* n^{ten} *Grads.*

Der Grad des Complexes ist der Ordnung des Kegels gleich, der von allen zum Complex gehörenden Geraden gebildet wird, die durch einen beliebigen Punkt des Raums gehen (des Complexkegels).

In jeder Ebene gibt es ∞^1 Gerade des Complexes, die eine Curve *(die Complexcurve)* umhüllen; *die Classe dieser Curve ist auch der Grad des Complexes.*

Bei den Complexen fliessen die Begriffe von *Ordnung* und *Classe* zusammen, man hat nur die eine charakteristische Zahl, den *Grad,* der die Anzahl der Geraden des Complexes angibt, die durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen.

Eine *Congruenz* heisst *algebraisch*, wenn sie der theilweise oder vollständige Schnitt zweier algebraischer Complexe ist.

Unter *Ordnung einer algebraischen Congruenz* versteht man die Anzahl ihrer Geraden, die durch einen Punkt des Raums gehen und unter *Classe einer algebraischen Congruenz* die Anzahl ihrer Geraden, die in einer Ebene liegen.

Zwei Complexe von den Graden n und n' haben eine Congruenz von der Ordnung nn' und auch der Classe nn' gemeinschaftlich.

Drei Complexe von den Graden n, n', n'' haben eine Regelfläche von der Ordnung $2nn'n''$ gemeinschaftlich.

Vier Complexe von den Graden n, n', n'', n''' haben im Allgemeinen $2nn'n''n'''$ Gerade gemeinsam.

Zwei Congruenzen von den Ordnungen n, n' und den Classen m, m' haben im Allgemeinen $nn' + mm'$ Gerade gemeinsam. Theorem von Halphen, *Compt. Rend.,* 1872.

Alle Geraden, die eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung schneiden, bilden einen (algebraischen) Complex n^{ten} Grads.

Alle Geraden, die eine gegebene Gerade schneiden, bilden einen linearen sogenannten speciellen Complex, der die gegebene Gerade zur Directrix hat.

Die sämmtlichen Geraden, die zwei Curven von den Ordnungen n_1, n_2 treffen, bilden eine Congruenz von der Ordnung und Classe $n_1 n_2$.

Die sämmtlichen Geraden, die zwei gegebene Gerade schneiden, bilden eine Congruenz von der Ordnung und Classe 1 (eine lineare Congruenz).

Alle Geraden, die drei algebraische Curven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 schneiden, bilden eine Regelfläche von der Ordnung $2n_1 n_2 n_3$. Cayley; vergl. auch weiter oben Kap. 13, § 6.

Es gibt zwei Gerade, die gleichzeitig vier gegebene Gerade schneiden. Theorem von Steiner, *System. Entwickel.* etc., *Werke,* 1, p. 284.

Es existiren $2n_1 n_2 n_3 n_4$ Gerade, die vier algebraische Curven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 treffen.

Die sämmtlichen Geraden, die eine algebraische Fläche n^{ter} Ordnung und a^{ten} Rangs berühren (vergl. Kap. 9, § 1 und Kap. 13, § 6), *bilden einen Complex a^{ten} Grads (einen speciellen Complex).*

Wenn von wenigen früheren Untersuchungen, unter denen sich auch einige von Cayley befinden, abgesehen wird, darf man wohl sagen, die *Liniengeometrie* als Lehre für sich sei mit der *Neuen Geometrie des Raumes,* Leipzig 1868, 1869 von Plücker entstanden, der schon 1865 einige Abhandlungen über diesen Gegenstand veröffentlicht hatte, *Proc. London math. Soc.,* 1865; *Phil. Trans.,* 1865.

In den Jahren 1866, 1868 veröffentlichte Battaglini, *Rend. Acc. Napoli,* 1866; *Atti Acc. Napoli,* 3, 1866; 4, 1868; *Giorn. di Batt.,* 6, 7, 10 seine Untersuchungen über die Complexe, setzte viele allgemeine Eigenschaften fest und stellte die Theorie eines besonderen quadratischen Complexes, der seinen Namen trägt, auf. Er machte den Anfang mit einer symbolischen Bezeichnung, die von Clebsch (siehe weiter unten § 2) vervollkommnet wurde und gab vielfache Anwendungen der Liniengeometrie auf die Mechanik; *Rend.* und *Atti Acc. Napoli,* 1869, 1870.

Von anderen Arbeiten citiren wir als die hervorragendsten: Clebsch, *Math. Ann.* 2, 5; Klein, ib. 2, 5, 7, 22, etc., *Dissert.*, 1868, wieder abgedruckt in den *Math. Ann.* 23; Lie, ib. 5; Reye (siehe weiter unten § 4); Voss, *Math. Ann.*, 9; Segre, *Atti Acc. Torino*, t. 19, 20, 1883—1885; *Mem. Acc. Torino*, 2a, t. 36 (1885), 37 (1886); etc.

Ein systematisches neues Buch über die in Rede stehende Theorie ist von R. Sturm, *Die Gebilde 1ten und 2ten Grads der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, 3 Thle., Leipzig, 1892, 1893, 1897.

Wir werden im Folgenden an den betreffenden Stellen noch weitere Literaturangaben machen; ausführlichere Nachweise findet man in dem wiederholt citirten Werk von Loria.

R. Sturm hat in seinem eben angeführten Buch andere Benennungen für die Complexe und die Congruenzen gebraucht; so nennt er den *linearen Complex: Strahlengewinde* oder einfach *Gewinde*; den speciellen linearen Complex: *Strahlengebüsch* oder kürzer *Gebüsch*; die *lineare Congruenz: Strahlennetz*.

Diese Benennungen sind dann auch von anderen deutschen Autoren benutzt worden.

§ 2. Der allgemeine algebraische Complex n^{ten} Grads. Die symbolische Bezeichnung von Battaglini und Clebsch. Invariante Formen der Complexe.

Der algebraische Complex n^{ten} Grads ist durch

$$\binom{n+5}{5} - \binom{n+3}{5} - 1$$

Gerade individualisirt; daher wird

ein linearer Complex durch 5 Gerade,
ein quadratischer durch 19 Gerade

gekennzeichnet.

Die sämmtlichen Geraden des Complexes, welche eine bestimmte Gerade des Raums treffen, bilden eine Congruenz, welche natürlich der Schnitt des Complexes mit dem speciellen linearen Complex ist, der aus *allen* die gegebene Gerade treffenden Geraden besteht; die sämmtlichen *Geraden dieser Congruenz berühren eine und dieselbe Fläche*, die *Complexfläche* genannt wird; Plücker.

Je nachdem die gegebene Gerade im Endlichen oder Unendlichen liegt, heisst die Complexfläche *Meridian-* oder *Aequatorialfläche;* Plücker.

Legt man durch die gegebene Grade eine Ebene, so umhüllen alle in ihr gelegenen Geraden des Complexes eine Curve; *die Complexfläche ist der Ort dieser Umhüllungscurven.*

Jeder Kegel, dessen Spitze in einem Punkt der Geraden liegt und welcher Gerade des Complexes zu Erzeugenden hat, ist der Complexfläche umschrieben; *diese kann daher als die Enveloppe derjenigen Kegel des Complexes angesehen werden. deren Spitzen in den Punkten der Geraden liegen.*

Die Complexflächen eines Complexes n^{ten} Grads sind von der Ordnung und Classe $2n(n-1)$ und haben die Gerade, die von ihren zum Complex gehörigen Tangenten getroffen wird, zur $n(n-1)$-fachen Geraden; diese Gerade ist für die Fläche $n(n-1)$-fach, mag die letztere als Ort oder als Enveloppe betrachtet werden.

Für einen Complex 2^{ten} Grads sind daher die Complexflächen 4^{ter} Ordnung und 4^{ter} Classe und haben eine Doppelgerade.

Die Geraden des Raums, zu welchen Complexflächen gehören, die durch denselben Punkt gehen oder dieselbe Ebene berühren, bilden einen Complex $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grads.

Es gibt gewisse Punkte des Raums von der Beschaffenheit, dass die durch sie gehenden Geraden des Complexes einen Kegel mit einer Doppelerzeugenden bilden; und es gibt gewisse Ebenen des Raums, die derart sind, dass die Enveloppe der in ihnen gelegenen Geraden des Complexes eine Doppeltangente hat. Diese *Punkte* und *Ebenen* heissen *singulär* und *der Ort der ersteren ist eine Fläche, die zugleich die Enveloppe der letzteren ist* und die *Singularitätenfläche des Complexes* genannt wird. Der Satz wurde für Complexe 2^{ten} Grads von Plücker, allgemein von Pasch aufgestellt. Pasch, *Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden*, Giessener Habilitationsschrift, 1870; *Ueber die Brennfläche der Strahlensysteme und die Singularitätenflächen der Complexe, Crelle,* 76.

Die Bezeichnung „Singularitätenfläche" stammt von F. Klein, *Gött. Nachr.*, 1869, p. 267.

Wenn eine Gerade für den von einem ihrer Punkte ausgehenden Kegel doppelt ist, so muss sie auch für die in einer ihrer Ebenen liegende Enveloppe doppelt sein. Diese Gerade heisst *singuläre Gerade des Complexes.*

Es kann vorkommen, dass alle Punkte einer Geraden singulär und alle d[illegible]de gehenden Ebenen singulär sind; die Gerade ist alsdann eine Doppelgerade des Complexes; *dieser Fall kann jedoch bei dem allgemeinen Complex nicht eintreten.*

Die Singularitätenfläche eines Complexes n^{ten} Grads ist von der Ordnung und Classe $2n(n-1)^2$; Clebsch, *Math. Ann.*, 5.

Die singulären Geraden eines Complexes sind durch den vollständigen Schnitt des Complexes mit einem anderen $2(n-1)^{ten}$ Grads gegeben; sie bilden mithin eine Congruenz von der Ordnung und der Classe $2n(n-1)$.

Wir führen die folgenden Theoreme von Clebsch, *Math. Ann.*, 5 an:

Die Spitzen der einem Complex n^{ten} Grads angehörigen Kegel, die von einer festen Geraden in n Punkten geschnitten werden, für welche eine (binäre) Invariante vom k^{ten} Grad verschwindet, bilden eine Fläche von der Ordnung kn, die diese feste Gerade als $\frac{kn}{2}$-fache Gerade enthält.

Die Geraden, welche einen dem Complex n^{ten} Grads angehörigen Kegel in Punkten schneiden, die eine bestimmte invariante Eigenschaft haben (für welche eine binäre Invariante k^{ten} Grads verschwindet), bilden einen Complex vom Grad $\frac{kn}{2}$.

Zu diesen beiden Theoremen lassen sich selbstverständlich auch die *dualen* Sätze aufstellen, wenn man an Stelle der Spitzen der Kegel die Ebenen der Umhüllungscurven des Complexes, an Stelle einer Punktreihe ein Ebenenbüschel etc. in Betracht zieht.

Für $n = 4$ erhält man die Theoreme:

Die Spitzen der einem Complex 4^{ten} Grads angehörigen Kegel, die von einer festen Geraden in 4 äquianharmonischen oder harmonischen Punkten geschnitten werden, bilden eine Fläche 8^{ter} bez. 12^{ter} Ordnung, welche diese Gerade zur 4-fachen bez. 6-fachen Geraden hat.

Die Geraden, welche einen bestimmten Kegel eines Complexes 4^{ten} Grads in 4 äquianharmonischen oder harmonischen Punkten schneiden, bilden einen Complex 4^{ten} bez. 6^{ten} Grads.

Wenn ein Complex $C = 0$ vom n^{ten} Grad gegeben ist, so lassen sich *die Polarcomplexe* einer Geraden des Raums genau auf dieselbe Art definiren, wie bei der gewöhnlichen Polaritätstheorie; sind p'_{ij} die Coordinaten der gegebenen Geraden, so stellt die Gleichung

$$\sum \frac{\partial C}{\partial p_{ij}} p'_{ij} = 0$$

einen Complex $(n-1)^{\text{ten}}$ Grads dar, welcher *der erste Polarcomplex des gegebenen* heisst. Ebenso ergeben sich die übrigen Polarcomplexe.

Battaglini (siehe das Citat am Ende des vorigen Paragraphen) führte zuerst und dann Clebsch in die analytische Darstellung der Complexe eine Symbolik ein, die derjenigen analog ist, die bei der Invariantentheorie der Curven und Flächen zur Verwendung kommt.

Wir geben im Folgenden die Symbolik in der von Clebsch, *Math. Ann.*, 2 vervollkommneten Gestalt an.

Bei Benutzung der Coordinaten p_{ij} ist ein algebraischer Complex durch die Gleichung gegeben:

$$\sum_1^4 a_{ij,\,kh,\,lm\,\ldots}\, p_{ij} p_{kh} p_{lm} \ldots = 0. \tag{1}$$

Wir setzen nun symbolisch

$$a_{ij,\,kh,\,lm\,\ldots} = a_{ij} a_{kh} a_{lm} \ldots .$$

Die linke Seite der Gleichung (1) lässt sich dann als die symbolische Potenz eines linearen Ausdrucks, d. h. durch

$$\left[\sum_1^4 a_{ij} p_{ij}\right]^n$$

darstellen, worin die Symbole a_{ij} die Eigenschaft haben, dass sie ihr Vorzeichen ändern, wenn die Indices i und j vertauscht werden.

Nun lässt sich beweisen, *dass sich immer und auf nur eine Art die linke Seite der Gleichung des Complexes als die n^{te} symbolische Potenz der linken Seite der Gleichung eines speciellen linearen (symbolischen) Complexes ausdrücken lässt, wobei unter speciell verstanden wird, dass der Complex eine feste Gerade zur Directrix habe.*

Wenn wir mit $P = 0$ die quadratische Gleichung bezeichnen, der die p_{ij} genügen, so lässt sich offenbar der Gleichung $F = 0$ eines jeden Complexes vom Grad $n > 1$ immer die Form geben:

$$= 0,$$

worin $F = 0$ die gegebene Gleichung und M eine Form vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grad mit *willkürlichen* Coefficienten ist.

Wenn wir nun in dem obigen symbolischen Ausdruck

$$a_{ij} = a_i b_j - a_j b_i, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

setzen, so wird der lineare Complex

$$\sum a_{ij} p_{ij} = 0$$

der Complex der Geraden, welche die Verbindungsgerade der beiden Punkte (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) treffen; diese symbolische Substitution kann man aber unter der Bedingung machen, dass zwischen den wirklichen Coefficienten des gegebenen Complexes F alle linearen Beziehungen bestehen sollen, welche identisch werden, wenn diese wirklichen Coefficienten durch Producte von Factoren vom Typus

$$a_i b_j - a_j b_i$$

ausgedrückt werden.

Nun ist die einzige zwischen diesen Factoren bestehende Beziehung

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_3 b_4 - a_4 b_3) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_4 b_2 - a_2 b_4) + \\ + (a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0;$$

mithin sind die *einzigen* Beziehungen n^{ten} *Grads* zwischen Determinanten vom Typus $(a_i b_j - a_j b_i)$ diejenigen, die man durch Multiplication der vorstehenden Relation mit einer beliebigen monomen Combination $(n-2)^{\text{ten}}$ Grads derselben Determinanten erhält; führt man diese Multiplication aus, so wird jeder der drei Terme der vorstehenden Relation ein *wirklicher* Coefficient des Complexes; es muss unter diesen daher die lineare Beziehung bestehen:

$$a_{12,34,lm,\ldots} + a_{13,42,lm,\ldots} + a_{14,23,lm,\ldots} = 0.$$

Nun existiren im Allgemeinen zwischen den Coefficienten von F keine Relationen dieser Art; *man kann aber immer und auf eine einzige Art M so wählen, dass die Coefficienten von*

$$F + MP$$

derartigen Beziehungen genügen. Den Beweis dafür hat Clebsch, *Math. Ann.,* 2 geliefert.

Die Form, welche auf diese Art die Gleichung des Complexes annimmt, heisst die *Normalform* und Clebsch hat gezeigt, *dass sie*

$$F - \frac{P}{1\,(n+1)}\,\Delta F + \frac{P^2}{1\cdot 2\,(n+1)\,n}\,\Delta^2 F -$$
$$- \frac{P^3}{1\cdot 2\cdot 3\,(n+1)\,n\,(n-1)}\,\Delta^3 F + \cdots = 0$$

lautet, worin

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial p_{12}\,\partial p_{34}} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{13}\,\partial p_{42}} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_{14}\,\partial p_{23}} \quad \textit{und}$$
$$\Delta^2 F = \Delta(\Delta F),\quad \Delta^3 F = \Delta\{\Delta(\Delta F)\},\cdots \textit{ ist.}$$

Der Strahlenraum wird durch jede *projective* oder *duale* Transformation des Punkt- und Ebenenraums in sich selbst transformirt; die Gruppe aller linearen Transformationen unter den p_{ij}, durch welche der Strahlenraum in sich selbst übergeführt wird, ist zugleich die Gruppe der sämmtlichen linearen Transformationen, für welche die Relation

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

unverändert bleibt.

Die Coefficienten eines Complexes mögen $a_{ij,hk,\ldots}$ und die Coefficienten des durch eine dieser linearen Transformationen transformirten Complexes $a'_{ij,hk,\ldots}$ heissen; die letzteren lassen sich linear durch die ersteren ausdrücken. Der Begriff von *Invarianten* des Complexes ergibt sich unmittelbar: man nennt *Invariante vom Grad k* (oder *Covariante) des Complexes* eine solche rationale ganze homogene Function vom Grad k in den a (oder vom Grad k in den a und einem beliebigen anderen Grad in den p), die bis auf einen Factor (Potenz der Substitutionsdeterminante) unverändert bleibt, wenn an die Stelle der a die a' (oder an die Stelle der a die a' und der p die transformirten Coordinaten p') gesetzt werden.

§ 3. Die linearen Complexe.

Die allgemeine Gleichung eines linearen Complexes ist

$$\sum_1^4 a_{ij}p_{ij} = 0.$$

Genügen die Coefficienten a der Relation

$$A \equiv a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0,$$

so besteht der Complex aus allen Geraden, welche eine gegebene Gerade treffen, deren Coordinaten die a_{ij} sind; dieser besondere Complex heisst der s p e c i e l l e *lineare Complex.*

Der lineare Complex hat eine einzige Invariante, nämlich A.

Gegeben sei ein Punkt des Raums; die durch ihn gehenden Geraden des linearen Complexes liegen in einer Ebene und sind die Gesammtheit der Geraden dieser Ebene, welche durch den Punkt gehen; ist umgekehrt eine Ebene gegeben, so umhüllen alle in ihr gelegenen Geraden des Complexes einen Punkt.

Mittelst des Complexes wird mithin eine specielle Raumpolarität festgesetzt und zwar eine der sogenannten *Nullpolaritäten oder Nullsysteme.* Vgl. Kap. 1, § 4, S. 44; Kap. 10, § 2, S. 251.

Den Punkt und die Ebene, welche in dieser Polarität conjugirt sind, kann man auch *conjugirt in Bezug auf den Complex* nennen.

Zwei Gerade des Raums, welche sich in der Nullpolarität entsprechen, heissen *conjugirt in Bezug auf den Complex; die Geraden des linearen Complexes sind sich selbst conjugirt.*

Zwei conjugirte Gerade können sich nicht treffen, wenn sie nicht zusammenfallen.

Jede Gerade, welche zwei conjugirte Gerade trifft, gehört zu dem Complex, und umgekehrt, *jede Gerade des Complexes. welche eine diesem nicht angehörige Gerade trifft, schneidet auch die der letzteren conjugirte Gerade.*

Diameter oder *Durchmesser* des Complexes werden die Geraden genannt, welche den unendlich fernen Geraden des Raums conjugirt sind, und *Diametralebenen* des Complexes die den unendlich fernen Punkten conjugirten Ebenen.

Die Durchmesser sind sämmtlich einander und den Diametralebenen parallel.

Die unendlich vielen Geraden des Complexes, welche in einer Diametralebene liegen, sind sämmtlich einander parallel.

Axe des Complexes heisst der (einzige) Durchmesser, welcher senkrecht auf den Ebenen steht, die durch die unendlich ferne dem Durchmesser conjugirte Gerade gehen.

Für jede Gerade des Complexes ist das Product aus ihrem geringsten Abstand von der Axe mit der trigonometrischen Tangente des Winkels zwischen der Geraden und der Axe constant; dieses constante Product heisst der P a r a m e t e r *des Complexes.*

Der lineare Complex wird durch jede schraubenförmige Bewegung um die eigene Axe in sich selbst transformirt.

Ein linearer Complex lässt sich auf verschiedene Art erzeugen, nämlich:

1) *durch die in der Nullpolarität vereinigten Geraden;*

2) *indem man alle Geraden zusammenfasst, welche die verschiedenen Paare von Erzeugenden einer Fläche 2ter Ordnung treffen, die in einer beliebigen, zwischen den Erzeugenden festgestellten Involution conjugirt sind. Die Chasles'sche Erzeugungsweise, Journ. de Liouville,* (1), 4;

3) *indem man alle Geraden zieht, die zwei zueinander projective Ebenenbüschel in Punktreihen schneiden, welche in Involution liegen;*

4) *durch die Geraden, von welchen aus zwei projective Punktreihen, deren Träger sich nicht schneiden, in einer Involution von Ebenen projicirt werden;*

5) *indem man alle Geraden zieht, welche die Paare sich entsprechender Strahlen zweier projectiver Strahlenbüschel treffen, die zwar in verschiedenen Ebenen liegen und ein verschiedenes Centrum besitzen, jedoch einen Strahl gemeinschaftlich haben, der sich selbst entspricht. Die Sylvester'sche Erzeugungsweise, Compt. Rend.,* 52, 1861.

Ueber die Construction eines linearen Complexes, von welchem 5 Gerade gegeben sind, siehe R. Sturm, l. c., 1, p. 107 u. ff.

§ 4. Büschel und Netze linearer Complexe.

Wenn die Gleichungen zweier linearer Complexe vorliegen und eine lineare Combination ihrer linken Seiten gebildet und gleich Null gesetzt wird, so erhält man die Gleichung eines *Büschels linearer Complexe.*

Ein Büschel linearer Complexe enthält im Allgemeinen zwei Complexe, die speciell sind. Siehe § 3, S. 385.

Daraus folgt:

Der Schnitt der beiden linearen Complexe ist im Allgemeinen eine Congruenz 1ter Ordnung und Classe (eine lineare Congruenz; Basiscongruenz des Büschels), welche aus allen Geraden besteht, die zwei gegebene Gerade treffen.

Wenn die beiden speciellen Complexe des Büschels zusammenfallen, so ist die Schnittcongruenz eine specielle Congruenz, welche nur eine einzige Directrix hat.

Sind ferner alle Complexe des Büschels specielle, so besteht die Schnittcongruenz aus den Geraden, welche in einer Ebene *liegen und den Geraden des Raums, welche durch einen Punkt dieser Ebene gehen.*

Die Axen aller linearen Complexe eines Büschels bilden eine Regelfläche 3ter Ordnung mit verschiedenen Leitgeraden, von denen eine im Unendlichen liegt.

Die Gleichung dieser Regelfläche lässt sich auf die Form reduciren:

$$z(x^2 + y^2) - cxy = 0; \quad \text{Plücker.}$$

Cayley nannte diese Regelfläche *Cylindroid.*

Wenn die Gleichungen dreier linearer Complexe

$$C = 0, \quad C' = 0, \quad C'' = 0$$

gegeben sind, so stellt die Gleichung

$$C + \lambda C' + \mu C'' = 0$$

ein Netz linearer Complexe dar.

Der Schnitt der drei linearen Complexe ist im Allgemeinen eine Regelfläche 2ter Ordnung; die ∞^1 Leitgeraden aller in dem Netz enthaltenen speciellen linearen Complexe bilden das zweite System von Erzeugenden dieser Regelfläche 2ter Ordnung.

Die Axen der sämmtlichen ∞^2 Complexe des Netzes bilden eine Congruenz 2ter Ordnung und 3ter Classe, die aus den Lothen besteht, welche den ∞^2 Paaren von Erzeugenden der zugehörigen Regelfläche 2ter Ordnung gemeinschaftlich sind.

Den Anfang mit dem Studium des linearen Complexes hat Giorgini, *Mem. della Società italiana delle scienze,* 20, 1827; Möbius, *Crelle,* 10 und Chasles, *Corr. math.*, 6, 1830; *Journ. de Liouville,* 4, 1839 gemacht; dann folgten, ausser Plücker, Reye, *Crelle,* 69, 86, 95, etc.; Pasch, ib., 75; d'Ovidio, *Atti Acc. Torino,* 16, 1881; *Ann. di mat.,* 7; *Atti Acc. Lincei,* (2), 3; De Paolis, *Mem. Acc. Lincei,* 1885; etc.

Die Bemerkung ist von Interesse, dass die Theorie der reciproken Figuren in der graphischen Statik im engsten Zusammenhang mit der Theorie der linearen Complexe steht.

Man hat auch die Systeme der projectiv aufeinander bezogenen linearen Complexe und die geometrischen Gebilde studirt, welche durch die Geraden erzeugt werden, die den sich entsprechenden Complexen gemeinsam sind. Vergl. darüber Segre, *Mem. Acc. Torino,* t. 36, 37, 1885/86; Montesano, *Sui complessi di rette di 2⁰ grado generati da due fasci proiettivi di complessi lineari* (separate Schrift), Napoli 1886 und *Rend. Acc. Napoli,* 1886.

Mit dem Studium des Linienraums und speciell der linearen Complexe unter Zuhülfenahme der Geometrie der ebenen Kegelschnitte beschäftigten sich Cremona, *Giorn. di Batt.*, 8; Aschieri, *Rend. Ist. Lomb.*, 1879; *Mem. Ist. Lomb.*, 1883; Segre, *Atti Acc. Torino*, t. 20, 1885.

Die Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum (die ersten Begriffe sind Klein zu verdanken, Klein und Noether, *Gött. Nachr.*, 1869) untersuchten speciell Caporali, *Mem. Acc. Lincei*, 1877/78; Del Pezzo, *Rend. Palermo*, 1.

§ 5. Die linearen Involutionscomplexe Klein's.

Zwei lineare Complexe

$$\sum a_{ij}p_{ij} = 0, \quad \sum b_{ij}p_{ij} = 0,$$

die so beschaffen sind, dass die *Invariante*

$$a_{12}b_{34} + a_{13}b_{42} + a_{14}b_{23} + a_{34}b_{12} + a_{42}b_{13} + a_{23}b_{14}$$

verschwindet, stehen in einer Beziehung zueinander, welche als *Involution* bezeichnet wird; Klein, *Math. Ann.*, 2.

Jeder specielle lineare Complex liegt zu sich selbst in Involution.

Es sind bis zu sechs lineare Complexe möglich, die zu je zweien in Involution liegen. Sie werden von Klein *das System der sechs Fundamentalcomplexe* genannt; *es gibt* ∞^{15} *solche Systeme, jedes von ihnen besteht aus Complexen, die sämmtlich nicht speciell sind.*

Die Untersuchung dieser Systeme steht in Zusammenhang mit den neuen von Klein eingeführten Liniencoordinaten. Siehe S. 375. *Bezeichnet man mit* $x_i = 0$ *die Gleichungen der 6 Fundamentalcomplexe, so wird die Gleichung der Fundamentalfläche 2ter Ordnung des Raums von fünf Dimensionen* (siehe S. 376) $\sum x_i^2 = 0$. *Jeder andere lineare Complex ist durch* $\sum a_i x_i = 0$ *gegeben und zwei Complexe* $\sum a_i x_i = 0$, $\sum b_i x_i = 0$ *sind involutorisch, wenn*

$$\sum a_i b_i = 0 \quad \textit{ist.}$$

Die sechs Fundamentalcomplexe schneiden sich zu je zweien in 15 linearen Congruenzen mit verschiedenen Directricen. Siehe § 11. *Die Directricen einer dieser Congruenzen gehören den 4 anderen Fundamentalcomplexen an und treffen daher die 12 Directricen der 6 durch diese 4 Complexe bestimmten Congruenzen.*

Geht man von diesen Begriffen aus, so kommt man zu bemerkenswerthen Configurationen und insbesondere zu einer Configuration von 16 Punkten und 16 Ebenen, die mit derjenigen der singulären Punkte und Ebenen der Kummer'schen Fläche identisch ist. Siehe Kap. 12, S. 303.

Näheres findet man bei Klein, l. c.; Königs, *Géom. réglée* etc.; *Ann. de Toulouse*, 7, 1893 und in dem citirten Werk von R. Sturm.

Ueber die Anwendung auf die Kummer'sche Fläche siehe auch die schon auf S. 302 citirte Arbeit Reichardt's, *Nova Acta der Leop. Carol. Akad.*, 50, Halle 1887.

§ 6. Complexe 2^{ten} Grads im Allgemeinen.

Der Complex 2^{ten} Grads hängt von 19 Constanten ab; er wird daher durch 19 seiner Geraden individualisirt.

Die Complexfläche in Bezug auf eine gegebene Gerade r ist von der 4^{ten} Ordnung und Classe; die Gerade r ist Doppelgerade für sie.

Der Ort der Spitzen der Complexkegel, in Bezug auf welche zwei Punkte reciprok sind, ist eine durch diese beiden Punkte gehende Fläche 2^{ter} Ordnung. Battaglini.

Auf jeder Geraden r giebt es 4 Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 von der Beschaffenheit, dass die Complexkegel, deren Spitzen in ihnen liegen, in zwei Ebenen zerfallen und durch jede Gerade gehen 4 Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ derart, dass die in ihnen liegenden Complexgeraden zwei Punkte umhüllen.

Die Punkte A sind Cuspidalpunkte für die Complexfläche in Bezug auf r (die Doppelgerade der Fläche) und die Ebenen α sind die 4 durch r gehenden Ebenen, deren beide Berührungspunkte mit der Fläche in einen zusammenfallen.

Das anharmonische Verhältniss der 4 Punkte A ist demjenigen der 4 Ebenen α gleich. Klein, *Math. Ann.* 2, 7.

Die Punkte A erzeugen und die Ebenen α umhüllen dieselbe Fläche 4^{ter} Ordnung und Classe (die Singularitätenfläche des Complexes 2^{ten} Grads; siehe § 2, S. 380). *Sie ist eine Kummer'sche Fläche.* Kap. 12, § 3.

Jedem Punkt A entspricht eine durch ihn gehende Gerade a (Doppelgerade des Kegels, dessen Spitze A ist) und jeder Ebene α entspricht eine in ihr liegende Gerade a' (Doppelgerade für die in α liegende Enveloppe); die Geraden a und a' sind *singuläre Gerade des Complexes;* siehe § 2, S. 380.

Jede singuläre Gerade s ist einem auf ihr liegenden singu-

lären Punkt S und einer durch sie gehenden singulären Ebene σ zugeordnet; diese berührt die Singularitätenfläche in dem singulären Punkt S und schneidet sie in zwei anderen Punkten, welche die Centren zweier in der singulären Ebene σ liegender Büschel sind. Die beiden anderen durch s gelegten Berührungsebenen sind die zwei Ebenen, in welche der Kegel zerfällt, dessen Spitze in S liegt.

Jede Ebene π schneidet die Singularitätenfläche in einer Curve, welche die in π gelegene Complexcurve (siehe S. 377) *in jedem Punkt berührt, in welchem sie diese Curve trifft; die gemeinschaftlichen Tangenten sind singuläre Gerade des Complexes; ebenso gilt der duale Satz.*

Die Ebenen, welche so beschaffen sind, dass die in ihnen liegenden Complexcurven entweder zwei gegebene Gerade schneiden, oder eine Gerade schneiden und eine Ebene berühren, oder auch zwei Ebenen berühren, hüllen eine developpable Fläche 16ter, bez. 8ter, bez. 4ter Classe ein.

Die Regelfläche, welche aus den singulären Geraden besteht, die eine gegebene Gerade schneiden, ist 8ter Ordnung und die sämmtlichen singulären Geraden bilden eine Congruenz 4ter Ordnung und Classe.

Es gibt 16 Ebenen, deren Complexcurven aus zwei unendlich nahen Punkten gebildet sind, und in dualer Weise gibt es 16 Punkte, deren Complexkegel aus zwei zusammenfallenden Ebenen bestehen.

Diese 16 Punkte und 16 Ebenen sind die singulären Punkte und Ebenen der Kummer'schen Fläche, welche die Singularitätenfläche des Complexes ist.

Die 16 Punkte liegen in allen auf eine beliebige Gerade bezogenen Complexflächen und die 16 Ebenen berühren dieselben Flächen.

Ist die Kummer'sche Fläche gegeben, so wird der Complex auf die folgende Art gebildet: Man betrachte in einer die Fläche in S berührenden Ebene σ die singuläre Gerade s des Complexes; diese schneidet die Fläche in zwei anderen Punkten; man nehme nun in σ die beiden Strahlenbüschel, welche diese Punkte zu Centren haben; die Gesammtheit aller dieser ∞^2 Büschel, welche man durch Variation der Berührungsebene σ erhält, ist der gegebene Complex.

Wir wollen nun das in σ gelegene Strahlenbüschel, dessen Centrum in S liegt, betrachten, und die ∞^2 Büschel dieser Art. Wie sich [illegible] lässt, können sie auf die folgende

Art projectiv einander zugeordnet werden: Man nehme in einem von ihnen einen beliebigen Strahl und alle ihm entsprechenden in den übrigen an und betrachte die beiden anderen Schnittpunkte der letzteren mit der Fläche und die Strahlenbüschel, die diese Schnittpunkte zu Centren haben und in den durch diese Schnittpunkte gehenden Berührungsebenen an die Fläche liegen. Diese ∞^2 Strahlenbüschel bilden dann einen zweiten quadratischen Complex, welcher dieselbe Singularitätenfläche, wie der gegebene, hat.

Man erhält so ∞^1 Complexe 2ten Grads, die *confocal* (Klein und Lie), *homofocal* (Segre), in *Involution liegend* (Schur) oder *consingulär* (R. Sturm) genannt werden.

Da die Gleichung der Kummer'schen Fläche von 18 Constanten, die des quadratischen Complexes von 19 Constanten abhängt, so erkennt man, dass es in der That ∞^1 quadratische Complexe mit derselben Singularitätenfläche geben muss.

Ueber die Art, die projective Correspondenz, von der eben die Rede war, festzusetzen, verweisen wir auf R. Sturm, l. c., 3, p. 32.

Jede Gerade des Raums gehört vier confocalen Complexen an.

Die durch die singulären Geraden des quadratischen Complexes gebildete Congruenz kann man als den Schnitt dieses Complexes mit einem anderen ansehen, welcher in der von dem gegebenen Complex erzeugten Reihe confocaler Complexe unendlich wenig von dem gegebenen verschieden ist.

Eine singuläre Gerade des Complexes, welche die Kummersche Fläche osculirt (eine dreipunktige Berührung mit ihr hat), heisst *eine singuläre Gerade 2ter Ordnung des Complexes* (Segre); berührt sie die Kummer'sche Fläche vierpunktig, so wird sie von demselben Autor *eine singuläre Gerade 3ter Ordnung* genannt.

Die singulären Geraden 2ter Ordnung eines quadratischen Complexes bilden eine Regelfläche 16ter Ordnung, und die aller Complexe der confocalen Reihe eine Congruenz von der 24ten Ordnung und Classe.

Singuläre Gerade 3ter Ordnung eines gegebenen quadratischen Complexes gibt es im Ganzen 32; die singulären Geraden 3ter Ordnung der Complexe der ganzen confocalen Reihe bilden eine Regelfläche 64ter Ordnung, welche in die 16 in jeder der Doppelebenen der Kummer'schen Fläche enthaltenen Enveloppen 2ter Ordnung und in die 16 von jedem der 16 Doppelpunkte derselben Fläche ausgehenden Kegel 2ter Ordnung zerfällt.

Wenn die Klein'schen Coordinaten (siehe § 1, S. 375) benutzt werden, lässt sich die Gleichung des Complexes 2ten Grads schreiben:

$$\sum_1^6 k_i x_i^2 = 0,$$

worin die x an die Relation

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0$$

gebunden sind.

Die singulären Geraden 1[ter] Ordnung werden durch den Schnitt des gegebenen Complexes mit einem anderen bestimmt, dessen Gleichung

$$\sum_1^6 k_i^2 x_i^2 = 0$$

lautet.

Die singulären Geraden 2[ter] Ordnung ferner ergeben sich aus dem Schnitt der vorstehenden Congruenz mit dem Complex

$$\sum_1^6 k_i^3 x_i^2 = 0;$$

und für diejenigen dritter Ordnung muss schliesslich noch

$$\sum_1^6 k_i^4 x_i^2 = 0$$

sein.

Die Gleichung der Reihe confocaler Complexe lautet:

$$\sum_1^6 \frac{x_i^2}{k_i + \lambda} = 0,$$

worin λ ein variabeler Parameter ist*).

Der erste, der sich mit den Complexen 2[ten] Grads beschäftigte, war Battaglini, *Atti Acc. Napoli*, 1866; *Giorn. di Batt.*, 6;

---

*) Man könnte glauben, dass unter diesen einfach unendlich vielen Complexen derjenige nicht enthalten sei, dessen Gleichung $\sum k_i x_i^2 = 0$ lautet; wir bemerken jedoch, dass man diese Gleichung, da $\sum x_i^2 = 0$ ist, auch $\sum (k_i + \mu) x_i^2 = 0$ schreiben kann, während man der Gleichung im Text aus demselben Grund auch die Form $\sum \left(\frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{1}{k_i + \lambda}\right) x_i^2 = 0$, d. h. $\sum \frac{k_i + \mu}{k_i + \lambda} x_i^2 = 0$ geben kann; multiplicirt man nun mit $k_1 + \lambda$ und lässt dann λ gegen ∞ convergiren, so ergibt sich $\sum (k_i + \mu) x_i^2 = 0$.

er studirte einen speciellen quadratischen Complex, der nach ihm benannt wurde; siehe § 7; es ist jedoch zu bemerken, dass er Anfangs geglaubt hatte, dieser Complex sei der allgemeinste; diesen Irrthum hat Klein, *Dissert.*, Bonn 1868 nachgewiesen. In dem Plücker'schen Werk ist zum ersten Mal eine Theorie der Complexe 2ten Grads enthalten, die später eingehend auch von anderen Autoren, Clebsch, Klein, Lie (siehe § 1, S. 378) untersucht wurden. Eine umfassende Darstellung dieser Theorie bringt der 3te Band des citirten Buches von R. Sturm.

Von anderen Arbeiten über die Complexe 2ten Grads citiren wir Caporali, *Mem. Acc. Lincei,* 1878, der sie auf den Punktraum abbildete; Schur, *Dissert.*, Berlin 1879 (Auszug in den *Math. Ann.*, 15); Reye, *Crelle,* 86, 93, 95, 97, 98; Segre, *Mem. Acc. Torino,* t. 36, 1885, der die früher von Klein (vergl. § 1, S. 376) angegebene Idee weiter ausbaute, d. h. die Geometrie auf einer Fläche 2ten Grads im Raum von fünf Dimensionen studirte; Montesano, die S. 387 citirte Schrift und *Rend. Acc. Napoli,* 1886; etc.

Wie die Complexe 2ten Grads classificirt werden und welche die bemerkenswerthesten sind, davon wird im folgenden Paragraphen die Rede sein.

Die Theorie der Polarität der Complexe 2ten Grads (siehe § 2, S. 381 und diejenige der Diameter, Centren, etc. (siehe S. 385), die ein specieller Fall der ersteren ist, behandelte besonders Plücker. Vergl. auch die §§ 567—585 im 3ten Band des R. Sturm'schen Werks.

Reye, *Crelle,* 98, legt seiner Classification der allgemeinen Complexe 2ten Grads die Anzahl der in ihnen enthaltenen imaginären Elemente zu Grund. Er unterscheidet *hyperbolische, parabolische, elliptische* und *imaginäre Complexe.*

§ 7½ Classification der Complexe 2ten Grads.

Bezeichnet man mit $P = 0$ (siehe § 2) die identische quadratische Relation zwischen den Liniencoordinaten oder die Gleichung der Fundamentalfläche 2ter Ordnung im Raum von 5 Dimensionen und mit $C = 0$ die Gleichung einer anderen Fläche 2ter Ordnung in demselben Raum, deren Schnitt mit der ersteren die Mannigfaltigkeit liefert, welche dem Liniencomplex 2ten Grads entspricht, so lassen sich die Complexe classificiren, *indem man die Discriminante der Fläche 2ter Ordnung*

$$P + \lambda C = 0$$

betrachtet, die vom 6^{ten} *Grad in* λ *ist und insbesondere eine Determinante* 6^{ter} *Ordnung* Δ *darstellt.*

Wenn die Wurzeln dieser Discriminante sämmtlich verschieden sind, *d. h. wenn das Büschel von Flächen* 2^{ter} *Ordnung 6 verschiedene Kegel enthält,* so liegt der in § 6 besprochene *allgemeine Complex mit 19 Constanten* vor; *die Singularitätenfläche ist dann eine allgemeine Kummer'sche Fläche.*

Es kann vorkommen, dass sie speciell ein *Tetraedroid* wird; siehe Kap. 12, § 4; alsdann erhält man den sogenannten *Battaglini'schen oder harmonischen Complex,* der als besonderen Fall den *Painvin'schen Complex* enthält, dessen Singularitätenfläche zur *Fresnel'schen Fläche* geworden ist. Siehe Kap. 12, § 4, S. 310.

Es sind ferner die Fälle zu untersuchen, in denen ein Theil der Wurzeln der Discriminante Δ einander gleich ist, keine jedoch alle Unterdeterminanten 5^{ter} Ordnung der Determinante 6^{ter} Ordnung annullirt. Alsdann fallen einige der Kegel 2^{ten} Grads, von denen oben die Rede war, zusammen. Nimmt man z. B. an, 2 von ihnen oder 3 etc. fallen zusammen, so werden die bezüglichen Complexe mit

$$[2, 1, 1, 1, 1] \quad \text{oder} \quad [3, 1, 1, 1], \text{ etc.}$$

bezeichnet, während für den allgemeinen Complex das Symbol

$$[1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

gebraucht wird.

In solchen Fällen hat der Complex Doppelgerade (§ 2, S. 381), *die auch für die Singularitätenfläche Doppelgerade sind. Man unterscheidet ausser dem allgemeinen Fall 10 Fälle.* Siehe die Tabelle S. 396.

Es bleiben nun die Fälle zu betrachten, in denen die Determinante 6^{ter} Ordnung Δ vielfache Wurzeln hat und diese Wurzeln sämmtliche Minoren 5^{ter} Ordnung (wir wollen sie mit Δ' bezeichnen) oder auch alle Minoren 4^{ter} Ordnung der Determinante, die Δ'' heissen mögen, annulliren.

Wir benutzen die folgende Schreibweise zur Bezeichnung der Complexe, welche diesen Fällen entsprechen; wir nehmen an, eine Wurzel sei ν-fach für Δ, ν'-fach für alle Minoren Δ' und annullire *nicht sämmtliche* Minoren Δ''. Den bezüglichen Complex bezeichnen wir mit dem Symbol

$$[(\nu - \nu', \nu'), r, s, \ldots],$$

worin

$$\nu + r + \qquad = 6$$

ist und $r, s, \ldots$ die Vielfachheiten der übrigen Wurzeln der Determinante Δ angeben, d. h. derjenigen Wurzeln, welche die Δ' nicht annulliren. Mit anderen Worten: wenn eine ν-fache Wurzel von Δ auch die Δ' mit der Vielfachheit ν' der Wurzel annullirt, so wird in dem oben S. 394 definirten Symbol an die Stelle der Zahl ν, welche dieser vielfachen Wurzel entspricht, das Symbol $(\nu - \nu', \nu')$ gesetzt.

Auf ähnliche Art wird, wenn eine Wurzel ν-fach für Δ, ν'-fach für alle Δ' und ν''-fach für alle Δ'' ist, in demselben Symbol an die Stelle der Zahl ν

$$(\nu - \nu', \nu' - \nu'', \nu'')$$

gesetzt. So bedeutet z. B. das Symbol $[(3, 2), 1]$, dass von den 6 Wurzeln von Δ eine fünffach und für sämmtliche Δ' doppelt ist; und das Symbol $[(111)\, 21]$, dass von den 6 Wurzeln von Δ eine einfach und eine andere doppelt ist, ohne alle Δ' zu annulliren, dass ferner eine dreifach, für alle Δ' doppelt und für alle Δ'' einfach ist. *Es ist immer:*

$$\nu - \nu' \geqq \nu' - \nu'' \geqq \nu''.$$

Diese Bezeichnungsart ist durch die *Weierstrass'sche Theorie der Elementartheiler*, von der wir in Bd. 1, p. 328 handelten, veranlasst worden. Wir haben hier die $P + \lambda C$ zu untersuchen, wobei P und C Formen zweiten Grads in sechs Variabelen sind.

Auf die Möglichkeit, die Elementartheiler in dieser Frage zu verwerthen, hat zuerst Klein in seiner Dissertation hingewiesen.

Ueber die Literatur siehe Bd. 1, Kap. 12, § 15, S. 328—330.

Wir lassen nun die Tabelle für alle oben erwähnten Fälle folgen.

Den Fällen 9, 10, 11 entsprechen insbesondere als Singularitätenflächen, ausser einer Ebene, die von Cayley unter den Nummern 16, 18, 19 aufgeführten Flächen, *Mem. on Cubic Surfaces, Phil. Trans.*, 1869, Thl. 1, p. 317 und *dual.*

In den Fällen 12—49 ist die Singularitätenfläche immer eine Regelfläche.

Falls alle Δ'' für eine Wurzel von $\Delta = 0$ verschwinden, degenerirt die Singularitätenfläche stets in eine doppelte Fläche 2ter Ordnung.

Laufende Nummer:	Symbol:	Anzahl der Constanten:	Doppelgerade des Complexes:	Singularitätenfläche:	
2	[21111]	18	1	4^{ter} Ordnung und 4^{ter} Classe mit einer Doppelgeraden. Sie ist die Complexfläche eines allgemeinen quadratischen Complexes in Bezug auf	eine beliebige Gerade oder
3	[3111]	17	1		eine Gerade des Complexes oder
4	[411]	16	1		eine singuläre Gerade 1^{ter} Ordn. oder
5	[51]	15	1		eine singuläre Gerade 2^{ter} Ordnung.
6	[2211]	17	2 Gerade, die sich schneiden.	4^{ter} Ordnung und Classe mit 2 Doppelgeraden, die sich schneiden. Complexfläche des allgemeinen quadratischen Complexes in Bezug auf eine Berührende an die Kummer'sche Fläche. Die Geraden sind	. . . beide cuspidal.
7	[321]	16			. . . beide doppelt,
8	[33]	15			. . . eine cuspidal,
9	[222]	16	3 in einer Ebene liegende Gerade oder (dual)	Cayley'sche Fläche 3^{ter} Ordnung und 4^{ter} Classe und die durch die drei Geraden gehende Ebene oder dual:	
10	[42]	15	3 durch einen Punkt gehende Gerade *).	Steiner'sche Fläche 4^{ter} Ordnung und 3^{ter} Classe (siehe Kap. 11 und 12) und der Punkt auf den 3 Geraden.	
11	[6]	14		Für den Complex [6] ist die Singularitätenfläche eine Complexfläche eines allgemeinen Complexes in Bezug auf eine singuläre Gerade 3^{ter} Ordnung.	

12	[(11) 1111]	17	2 windschiefe Gerade.	Regelfläche 4^{ter} Ordnung mit zwei Doppeldirectricen und ohne Doppelerzeugende (Typus 11 von Cremona, siehe Kap. 12, § 10, S. 343).
13	[(11) 211]	16	3 Gerade, von denen eine die beiden anderen windschiefen schneidet.	Dieselbe mit einer Doppelerzeugenden (allgemeiner Typus 5 von Cremona; vergl. oben S. 341).
14	[(11) 31]	15	Dieselben.	Dieselbe mit einer Cuspidalerzeugenden (Typus 5 von Cremona mit Cuspidalerzeugender).
15	[(11) 22]	15	4, von denen zwei windschief sind, und 2 sich schneiden; von den ersteren bildet eine mit den letzteren ein Dreieck und die andere ein Dreikant.	Regelfläche 3^{ter} Ordnung mit 2 Directricen, von denen eine doppelt, die andere einfach ist, ein Punkt auf der Doppeldirectrix und eine durch die einfache Directrix gehende Ebene, welche die doppelte Erzeugende in einem beliebigen, nicht cuspidalen Punkt schneidet. Die Regelfläche 3^{ter} Ordnung hat zwei Cuspidalpunkte und 2 ebensolche Ebenen, welche auf der ersten Leitlinie liegen bez. durch die zweite Leitlinie gehen.
16	[(11) 4]	14	Dieselben.	Dieselbe, doch sind der Punkt und die Ebene cuspidal.
17	[(21) 111]	16	2 windschiefe Gerade.	Regelfläche 4^{ter} Ordnung mit zwei zusammenfallenden Leitlinien (Typus 12 Cremona's). Dieser Leitlinie gehören 4 Cuspidalpunkte und 4 Cuspidalebenen an.

*) In dem Complex [42] fallen zwei der 3 Geraden zusammen und in [6] fallen alle drei zusammen. Daher kommt ein scheinbarer Widerspruch zwischen den Resultaten der verschiedenen Autoren Weiler, p. 204; Segre § 164; R. Sturm, p. 486, die weiter unten citirt werden. Wir machen darauf aufmerksam, damit Irrthümer vermieden werden.

Laufende Nummer:	Symbol:	Anzahl der Constanten:	Doppelgerade des Complexes:	Singularitätenfläche:
18	[(21) 21]	15	3 Gerade, von denen zwei windschiefe durch die dritte geschnitten werden.	Regelfläche 4ter Ordnung (Typus 6 Cremona's) mit einer Doppelerzeugenden.
19	[(21) 3]	14	Dieselben.	Dieselbe mit einer Cuspidalerzeugenden.
20	[(31) 11]	13	Dieselben.	Regelfläche 4ter Ordnung mit einer dreifachen Geraden, die einfache Directrix und doppelte Erzeugende ist (Typus 10 Cremona's).
21	[(31) 2]	14	Wie in Fall 15.	Cayley'sche Regelfläche 3ter Ordnung mit einem Punkt und einer Ebene wie in Fall 15.
22	[(41) 1]	14	Wie in Fall 18.	Wie in Fall 20, doch ist die dreifache Gerade auch Cuspidalerzeugende (nicht nur doppelt) (Typus 10 Cremona's mit stationären Ebenen, die zusammenfallen).
23	[(51)]	13	Wie in Fall 15.	Cayley'sche Regelfläche 3ter Ordnung mit einem Punkt und einer Ebene, wie in Fall 16.
24	[(22) 11]	14	Ein Strahlenbüschel.	Kegel 2ten Grads und Kegelschnitt.
25	[(32) 1]	13	Dasselbe.	Kegel 2ten Grads und durch seine Spitze gehender Kegelschnitt; die Ebene des Kegelschnitts berührt den Kegel.
26	[(22) 2]	13	Ein Strahlenbüschel und eine durch sein Centrum gehende andere Gerade oder dual in der Ebene des Büschels.	Wie in Fall 24, nur zerfällt der Kegel in zwei Ebenen oder dual der Kegelschnitt in zwei Punkte.

27	[(42)]	12	Ebenso.	Zwei Ebenen und ein den Schnitt der beiden Ebenen berührender Kegelschnitt oder dual ein Kegel und zwei Punkte auf einer seiner Erzeugenden (specieller Fall von 26).
28	[(33)]	11	Ein Strahlenbüschel und zwei andere Gerade, von denen eine in der Ebene des Büschels liegt, und die andere durch sein Centrum geht.	Eine dreifache Ebene, ein dreifacher Punkt; eine zweite Ebene und ein zweiter Punkt, die sich angehören.
29	[(11) (11) 11]	15	4 Gerade, die ein windschiefes Vierseit bilden.	Zwei Flächen 2ten Grads, die sich in einem windschiefen Vierseit schneiden.
30	[(11) (11) 2]	14	5 Gerade, die ein Vierseit und eine Diagonale bilden.	Eine der Flächen 2ten Grads wird zu einem Paar Berührungsebenen an die andern*).
31	[(21) (11) 1]	14	4 Gerade, die ein windschiefes Vierseit bilden.	Zwei Flächen 2ten Grads, die eine zweimal gezählte Gerade und zwei andere gemeinschaftlich haben, welche die erste schneiden.
32	[(21) (21)]	13	Dieselben.	Zwei Flächen 2ten Grads, die ein Paar von doppelt gezählten Geraden gemeinschaftlich haben.
33	[(22) (11)]	12	Wie in Fall 28.	2 Ebenen, 2 Punkte; eine Ebene und ein Punkt sind zweimal gezählt und gehören sich an.

*) Dieser Complex heisst der Hirst'sche, *Collect. math. in memoriam D. Chelini*, Mediolani 1881, p. 51; *Proc. Lond. Math. Soc.*, 10. Er wird durch zwei zueinander correlative Ebenen erzeugt. Siehe auch R. Sturm, 3, p. 429, 430.

Laufende Nummer:	Symbol:	Anzahl der Constanten:	Doppelgerade des Complexes:	Singularitätenfläche:
34	[(31) (11)]	13	Wie in Fall 30.	Wie in Fall 30.
35	[(11) (11) (11)]	13	Die 6 Kanten eines Tetraeders.	4 Ebenen und 4 Punkte, welche die Seitenflächen und Ecken eines Tetraeders bilden. Dies ist der ***tetraedrale Complex***; vergl. § 9.
36	[(111) 111]	14	Ein System von Erzeugenden einer Fläche 2^{ten} Grads.	Eine zweimal gezählte Fläche 2^{ten} Grads.
37	[(111) 21]	13	Ein System von Erzeugenden einer Fläche 2^{ten} Grads und eine Directrix derselben.	Dieselbe.
38	[(111) 3]	12	Dasselbe.	Dieselbe.
39	[(211) 11]	13	Zwei Strahlenbüschel.	Zwei Doppelebenen und auf ihrem Schnitt zwei Doppelpunkte.
40	[(211) 2]	12	Zwei Strahlenbüschel und eine Doppelgerade in einem von ihnen.	Dieselben.
41	[(311) 1]	12	Zwei Strahlenbüschel.	Dieselben.

42	[(411)]	11	Dieselben.	Dieselben*).
43	[(221) 1]	11	Zwei zusammenfallende Strahlenbüschel.	Eine Ebene und ein Punkt, die einander angehören und viermal zu zählen sind.
44	[(321)]	10	Dieselben.	Dieselben.
45	[(222)]	8	Ein (ebenes) Strahlennetz oder dual ein Strahlenbündel.	Ein Doppelkegel 2ten Grads oder dual ein Doppelkegelschnitt.
46	[(111) (11) 1]	12	Ein System von Erzeugenden einer Fläche 2ten Grads und zwei verschiedene Leitgerade dieser Fläche.	Eine doppelte Fläche 2ten Grads.
47	[(111) (21)]	11	Dieselben, doch fallen die beiden Leitgeraden zusammen.	Dieselbe.
48	[(211) (11)]	11	Zwei Strahlenbüschel und zwei Strahlen, von denen der eine dem 1ten, der andere dem zweiten Büschel angehört.	Ein Paar Ebenen und ein Paar Punkte, zweimal gezählt.
49	[(111) (111)]	9	Die beiden Systeme von Erzeugenden einer Fläche 2ten Grads.	Eine doppelte Fläche 2ten Grads.

*) Näheres über die Singularitätenfläche in den Fällen 40, 41, 42 findet man in der weiter unten citirten Arbeit Segre's, p. 68.

Es sind im Ganzen 49 Species; rechnet man die 6 Species, die noch eine zweite zu ihnen *dualistische* Species zulassen, also die unter den Nummern 9, 10, 11, 26, 27, 45 doppelt, so ergeben sich 55 Species.

Die erste Arbeit über die Classification der Complexe ist von Weiler, *Math. Ann.*, 7; sie enthält jedoch viele Ungenauigkeiten, welche von Segre und Anderen richtig gestellt wurden. Auf Weiler folgte Segre, *Atti Acc. Torino,* 36, 1884; er untersuchte in einem besonderen Aufsatz, *Math. Ann.*, 23 auch die Fälle, in denen die Singularitätenfläche eine degenerirte doppelte Fläche 2^{ten} Grads ist. In dem 3^{ten} Band des Sturm'schen Werks wird der Gegenstand ausführlich nach Methoden der reinen Geometrie behandelt.

§ 8. Der Battaglini'sche oder harmonische Complex.

Der Battaglini'sche Complex (vergl. die Literaturangaben am Ende des § 6) wird auf die folgenden Arten projectiv erzeugt: *Er ist die Gesammtheit der Geraden, die zwei Flächen 2^{ten} Grads f_1, f_2 in vier harmonischen Punkten treffen,* oder:

die Gesammtheit der Geraden, durch welche sich an zwei gegebene Flächen 2^{ten} Grads (die übrigens nicht dieselben sind, wie die vorigen) vier harmonische Berührungsebenen legen lassen. Aschieri, *Giorn. di Batt.*, 8.

Der Battaglini'sche Complex lässt sich also auf unendlich viele Arten erzeugen.

Die Congruenz der singulären Geraden des Battaglini'schen Complexes ist der Schnitt dieses Complexes mit dem tetraedralen Complex (siehe § 9) *derjenigen Geraden, deren Polaren in Bezug auf die beiden Flächen 2^{ten} Grads f_1, f_2 sich schneiden.*

Betrachtet man das Büschel $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ und ordnet die Flächen 2^{ten} Grads dieses Büschels paarweise involutorisch in der Art einander zu, dass $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ die Doppelelemente der Involution darstellen, *so sind die den beiden Flächen 2^{ten} Grads eines jeden Paares gemeinschaftlichen Tangenten die Geraden des Complexes.* Segre und Loria, *Math. Ann.*, 23.

Die singulären Ebenen des Complexes sind die den beiden Flächen 2^{ten} Grads eines jeden Paares gemeinschaftlichen Berührungsebenen, und die singulären Geraden sind die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte. Ebenda.

Wie wir schon gesagt haben (§ 7, S. 394), *ist die Singu-*

laritätenfläche des Battaglini'schen Complexes ein Tetraedroid; wir fügen hinzu:

Jedem Tetraedroid als Singularitätenfläche entsprechen zwei Battaglini'sche Complexe.

Die auf die Coordinaten p bezogene Gleichung des Battaglini'schen Complexes lässt sich durch die Quadrate der p allein ausdrücken.

Ein specieller Fall des Battaglini'schen Complexes ist der Painvin'sche (*Bull. de Darboux,* 1871; *Nouv. Ann. de math.,* 1872; Desmoulin, *Bull. de la Soc. Math.,* 20), *welcher aus den sämmtlichen Geraden besteht, von denen aus man an ein Ellipsoid Paare von orthogonalen Berührungsebenen legen kann.*

Man erhält diesen Complex, wenn man eine der beiden Flächen 2ten Grads, die auf die oben angegebene Art (als Enveloppe) zur Erzeugung des Complexes dienen, in den Kugelkreis des (Euclid'schen) Raums) degeneriren lässt.*

Die Singularitätenfläche des Painvin'schen Complexes ist eine Fresnel'sche Wellenfläche.

Die Battaglini'schen Complexe wurden von Segre und Loria, *Math. Ann.,* 23 und von Montesano, *Rend. Acc. Napoli,* 1886 in Classen geordnet; man vergleiche auch das Sturm'sche Werk, Bd. 3, p. 488 u. ff.

§ 9. Der Reye'sche oder tetraedrale Complex.

Zu dem tetraedralen oder Reye'schen Complex gehört das Symbol oder die Charakteristik

$$[(11)(11)(11)] \quad (\text{siehe § 7}).$$

Seine Gleichung in Klein'schen x-Coordinaten kann geschrieben werden:

$$a(x_1^2+x_2^2)+b(x_3^2+x_4^2)+c(x_5^2+x_6^2)=0.$$

Dem Reye'schen Complex entspricht ein Tetraeder von der Beschaffenheit, dass jede Gerade, welche in einer seiner Seitenflächen liegt oder durch eine seiner Ecken geht, dem Complex angehört.

Die vier Seitenflächen und die vier Ecken des Tetraeders bilden die Singularitätenfläche des Complexes, und die Congruenz

*) Kugelkreis oder absoluter Kegelschnitt (assoluto) heisst der unendlich ferne imaginäre Kreis, der allen Kugeln des Raums gemeinschaftlich ist, d. h. der Ort der unendlich fernen imaginären Kreispunkte sämmtlicher Ebenen des Raums. Siehe S. 28 und 83.

der singulären Geraden besteht aus allen in einer der vier Ebenen enthaltenen und allen durch einen der vier Eckpunkte gehenden Geraden.

Die Kanten des Tetraeders sind Doppelgerade des Complexes.

Wählt man dieses Tetraeder zum Fundamentaltetraeder der Coordinaten, so lautet die Gleichung des Complexes in Coordinaten p_{ij}:

$$a p_{12} p_{34} + b p_{13} p_{42} + c p_{14} p_{23} = 0.$$

Der Reye'sche Complex besteht aus allen Geraden, welche die 4 Ebenen des Fundamentaltetraeders in 4 Punkten schneiden, die in einem bestimmten anharmonischen Verhältniss stehen; oder: *aus allen Geraden, die von den 4 Ecken des Tetraeders in vier in bestimmtem anharmonischem Verhältniss stehenden Ebenen projicirt werden. (Dieses zweite anharmonische Verhältniss ist dem ersteren gleich).*

Variirt man das anharmonische Verhältniss, während das Tetraeder fest bleibt, so ergeben sich ∞^1 confocale tetraedrale Complexe.

Reye hat die folgenden Erzeugungsweisen des tetraedralen Complexes angegeben:

Er ist die Gesammtheit der Geraden, welche die sich entsprechenden Punkte zweier superponirter homographisch einander zugeordneter Räume (siehe Kap. 1) *verbinden,* oder:

die Gesammtheit der Schnittlinien der sich entsprechenden Ebenen der beiden nämlichen Räume; oder:

die Gesammtheit der Geraden, welche die ihnen entsprechenden Geraden in denselben beiden Räumen schneiden.

Andere Erzeugungsarten sind:

Der Reye'sche Complex ist die Gesammtheit der Geraden, welche die Paare sich entsprechender Strahlen zweier homographischer und beliebig im Raum gelegener Strahlenbüschel treffen.

Er ist auch die Gesammtheit der Geraden, welche die Punkte einer Ebene mit den Punkten der ihnen entsprechenden Strahlen eines homographisch auf die Ebene bezogenen Bündels verbinden.

Er wird ferner durch alle Sehnen und Tangenten der sämmtlichen Raumcurven 3^{ter} Ordnung definirt, welche durch die 4 Ecken des Tetraeders gehen und eine Gerade des Raums, die dem Complex natürlich angehört, zweimal schneiden. Nimmt man statt dieser Geraden eine andere Gerade des Complexes, so *ändern sich die Curven 3ter Ordnung, der Complex aber bleibt derselbe.*

Der Reye'sche Complex wird durch das Tetraeder und eine dieser Erzeugungsgeraden des Complexes individualisirt.

Ein speciell von metrischem Gesichtspunkt aufgefasster tetraedaler Complex *besteht aus den Geraden, die von zwei festen Punkten gleichweit entfernt sind;* siehe R. Sturm, l. c., p. 364. Ein anderer specieller tetraedraler Complex hat die Charakteristik [(22) (11)]; siehe § 7; *bei ihm sind* die *Complexcurven, d. h. die Curven, welche in den Ebenen des Raums von Geraden des Complexes umhüllt werden, sämmtlich Parabeln und die Complexkegel sämmtlich gleichseitig.* Vergl. S. 122.

Den tetraedralen Complex untersuchte zuerst Reye, *die Geometrie der Lage,* 2 Bde., Hannover 1877, 1880 (1. Aufl., 1866, 1868); auf ihn folgten Lie, *Gött. Nachr.,* 1870, *Math. Ann.,* 5; Battaglini, *Giorn. di Batt.,* 12; Aschieri, *Rend. Ist. Lomb.,* 1879; Loria, *Atti Acc. Torino,* 1884; *Giorn. di Batt.,* 23; etc.

Weiler, *Zeitschr. f. Math.,* 22 stellte die Abbildung auf den Raum von drei Dimensionen her; dem tetraedralen Complex ist der 2te Thl. des 1ten Bds. des Sturm'schen Werks gewidmet.

Arbeiten über andere specielle Complexe findet man auf p. 222, 223 des öfter citirten Buches von Loria, *Il pass. e il pres. delle princip. teorie geom.,* Torino, 1896 und auf p. 102, 103 der deutschen Ausg.

§ 10. Allgemeine Theorie der Liniencongruenzen.

Die Ordnung n einer algebraischen Congruenz ist die Anzahl ihrer Geraden, die durch einen beliebigen Punkt des Raums gehen, und *die Classe m* einer Congruenz die Anzahl ihrer in einer beliebigen Ebene gelegenen Geraden.

Unter dem *Rang r* (nach Schumacher: *Art,* nach Sturm: *Rang*) einer Congruenz versteht man die Anzahl ihrer Paare von Geraden, die mit einer willkürlichen Geraden des Raums demselben Büschel angehören.

Eine Congruenz von der Ordnung n und Classe m pflegt man mit (n, m) zu bezeichnen, und, wenn auch der Rang angegeben werden soll, mit (n, m, r).

Nennt man das *Geschlecht* der Regelfläche, längs welcher die Congruenz (n, m, r) von einem allgemeinen linearen Complex geschnitten wird, p, so besteht die Relation

$$p = (n - 1)(m - 1) - r.$$

Die Zahl p pflegen einige Autoren auch *das Geschlecht der Congruenz* zu nennen.

Wenn Classe und Ordnung gleich 1 sind, so ist der Rang Null.

Jede Congruenz, deren Ordnung und Classe gleich sind, und die einem linearen Complex angehört, hat den Rang Null.

Die Congruenz, welche der Schnitt zweier Complexe von den Graden n_1, n_2 ist, hat den Rang $n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1)$.

Die Ebenen, welche durch zwei der n Strahlen der Congruenz, die durch einen Punkt P gehen, gelegt werden, umhüllen, wenn P eine Gerade durchläuft, eine abwickelbare Fläche T von der Classe

$$\tfrac{1}{2}n(n-1) + r;$$

durchläuft P eine Ebene, so umhüllen dieselben Ebenen eine Fläche S von der Classe

$$\tfrac{1}{2}m(m-1) + r,$$

für welche die von P durchlaufene Ebene $\tfrac{1}{2}m(m-1)$-fache Berührungsebene ist.

Die Schnittpunkte der in einer Ebene liegenden m Geraden der Congruenz bilden, wenn die Ebene um eine Gerade rotirt, eine Curve C von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}m(m-1) + r,$$

und wenn die Ebene um einen Punkt rotirt, eine Fläche S_1 von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}n(n-1) + r,$$

für welche das Centrum des Ebenenbündels

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)\text{-}facher$$

Punkt ist.

Der Ort der Geraden der Congruenz, die eine gegebene Gerade schneiden, ist eine Regelfläche R von der Ordnung

$$n + m,$$

welche diese Gerade zur n-fachen Directrix hat.

Mittelst der algebraischen Congruenzen werden involutorische Correspondenzen *höherer Ordnung* zwischen den Ebenen und Punkten des Raums bestimmt; diese Zuordnungen wollen wir analog den gewöhnlichen Nullpolaritäten und Nullsystemen von Möbius (§ 3, S. 385) *N*[illegible]*herer Ordnung* nennen. Ist ein Punkt des Raums gegeben, so gehen n Strahlen der Congruenz und mithin $\alpha = \frac{1}{2}n(n-1)$ Ebenen durch ihn; wenn eine Ebene gegeben ist, so liegen m Strahlen der Congruenz und mithin $\beta = \frac{1}{2}m(m-1)$ Punkte in ihr; die gewöhnliche Nullpolarität ist ein specieller Fall der höheren für $\alpha = \beta = 1$.

Einer solchen Correspondenz kann man *eine zweite Charakteristik* γ beilegen, welche angibt, wie viele Punkte auf einer beliebigen Geraden des Raums derart existiren, dass eine der den Punkten entsprechenden Ebenen durch die Gerade geht. *Wenn ein solches Nullsystem mittelst einer Congruenz hergestellt wird, entspricht seine dritte Charakteristik γ dem Rang der Congruenz.*

Das älteste Beispiel für eine derartige Zuordnung wurde von Cremona, *Compt. Rend.*, 54, 1862 gegeben; spätere Untersuchungen sind von Ameseder, *Crelle,* 97; Voss, *Math. Ann.*, 23; R. Sturm, ib., 28.

Mehr Einzelheiten und Beispiele findet man in § 56 des 1ten Bds. des Sturm'schen Werks.

Jeder Strahl der Congruenz wird von zwei anderen unendlich nahen Strahlen geschnitten; die beiden Schnittpunkte heissen *Brennpunkte, Focalpunkte* und die beiden durch diese Gerade und je eine der beiden anderen gehenden Ebenen *Focalebenen.*

Die Focalpunkte beschreiben dieselbe Fläche (Brennfläche), die von den Focalebenen umhüllt wird. Sie ist von der Ordnung

$$n_1 = 2m(n-1) - 2r$$

und der Classe

$$m_1 = 2n(m-1) - 2r.$$

Daraus ergibt sich:

Die Differenz zwischen der Ordnung und der Classe der Brennfläche einer algebraischen Congruenz ist das Doppelte der Differenz zwischen der Ordnung und der Classe der Congruenz. Theorem von Klein; siehe Lie, *Gött. Nachr.*, 1870.

Jeder Strahl der Congruenz berührt die Brennfläche in seinen eigenen Focalpunkten und die Berührungsebenen in diesen Punkten sind die Focalebenen.

Singuläre Punkte und Ebenen der Congruenz werden die Punkte und Ebenen genannt, denen unendlich viele Gerade der Congruenz angehören; die von den letzteren gebildeten Kegel und die von ihnen umhüllten Curven heissen *singuläre Kegel und Curven der Congruenz.*

Sind diese Kegel von der h^{ten} Ordnung, so sagt man, der singuläre Punkt sei vom *Grad h*; sind die Curven von der h^{ten} Classe, so heisst die singuläre Ebene vom *Grad h.*

Zwei singuläre Punkte oder Ebenen heissen *verbunden (conjugati)*, wenn die Gerade, welche die beiden Punkte verbindet oder der gemeinschaftliche Schnitt der beiden Ebenen ist, *der Congruenz angehört.*

Manchmal scheint es, als ob die Congruenz eine besondere Brennfläche nicht besitze, sondern nur eine *Brennlinie* habe.

Wir wollen z. B. die Congruenz der Geraden betrachten, die zwei gegebene Curven treffen; die Punkte dieser Curven treten als Focalpunkte der Strahlen der Congruenz auf, und es könnte daher scheinen, dass es andere Focalpunkte, als die den beiden Curven angehörigen, nicht gebe.

Einige Autoren haben diese Congruenzen *solche ohne Brennfläche* genannt, R. Sturm jedoch bemerkt in seinem citirten Werk, dass diese Annahme nicht zutrifft, wenn die Congruenz eine höhere als die 1^{te} Ordnung hat; denn offenbar ist alsdann jeder Punkt der Verbindungsgeraden der beiden Berührungspunkte der den zwei Curven gemeinschaftlichen Tangentialebenen als Focalpunkt anzusehen und daher die Brennfläche die aus diesen Verbindungsgeraden gebildete Regelfläche, d. h. die Developpable der den beiden Curven gemeinschaftlichen Tangentialebenen.

Die Punkte der beiden Curven sind nach der eben gegebenen Definition offenbar auch *singuläre Punkte* der Congruenz; man sieht daher, dass solche Congruenzen unendlich viele singuläre Punkte haben; diese können eine oder mehrere Linien bilden, die wir *singuläre Linien* nennen wollen; *im Allgemeinen* jedoch sind die singulären Punkte nur in endlicher Anzahl vorhanden.

Man kann mithin die Congruenzen von höherer als der 1^{ten} Ordnung in solche unterscheiden, die *keine singulären Linien haben* und in solche *mit singulären Linien.*

Wenn man einen Strahl einer beliebigen (auch nicht algebraischen) Congruenz betrachtet und alle ihm unendlich nahen, sowie die kleinsten Abstände zwischen ihm und diesen anderen, *so sind die auf dem Strahl liegenden Fusspunkte dieser kleinsten Abstände im Allgemeinen immer zwischen zwei Punkten,* die *Grenzpunkte* heissen, enthalten.

Unter allen unendlich nahen Strahlen gibt es, wie wir oben bereits gesagt haben, zwei, die den Strahl schneiden, für welche also der kleinste Abstand Null ist; diese Schnitte sind die *Focalpunkte.*

Beachtenswerth ist das Theorem:

Die Focalpunkte, die natürlich beide innerhalb des von den Grenzpunkten eingeschlossenen Segments liegen, stehen gleichweit von den Grenzpunkten ab.

Daraus ergiebt sich: *Der Mittelpunkt des Segments der Grenzpunkte fällt mit dem Mittelpunkt des Segments der Focalpunkte zusammen;* er wird *der Mittelpunkt des Strahls* genannt.

Man betrachte die beiden dem gegebenen Strahl unendlich nahen Strahlen, für welche die Fusspunkte der kleinsten Abstände von dem gegebenen Strahl mit den Grenzpunkten zusammenfallen; man erhält dann das Theorem: *Die Richtungen dieser kleinsten von den Grenzpunkten ausgehenden Abstände stehen senkrecht aufeinander;* die durch den Strahl und diese Richtungen gehenden Ebenen heissen *Hauptebenen.*

Die Ebenen, welche den Winkel zwischen den Hauptebenen halbiren, fallen mit den Halbirungsebenen des Winkels zwischen den Focalebenen zusammen.

Zwischen dem Winkel γ, den die beiden Focalebenen miteinander bilden, dem Abstand $2d$ der Grenzpunkte und dem Abstand 2δ der Focalpunkte besteht die Relation: $\sin\gamma = \frac{\delta}{d}$.

Die hier entwickelten Begriffe gehören der Infinitesimaltheorie der Congruenzen an, zu welcher Hamilton und Kummer den Grund gelegt haben. Wir werden diese Theorie in Kapitel 16 besprechen und dort auch die sogenannte *Dichtigkeit* des Systems in einem Punkt eines Strahls in dem von Kummer eingeführten Sinn definiren (siehe weiter unten Kap. 16, § 15), die mit dem Begriff der *Krümmung* einer Fläche in einem Punkt verwandt ist. Von den Congruenzen, die nach Methoden der Infinitesimalgeometrie studirt wurden, ist die Congruenz der Normalen zu einer Fläche bemerkenswerth; von ihr wird ebenfalls in Kap. 16 die Rede sein. Hier beschränken wir uns darauf, in den folgenden Paragraphen die *algebraischen* Congruenzen 1^{ter} und 2^{ter} Ordnung zu betrachten.

Die erste Species wichtiger Congruenzen, die sich den Geometern bot, war die der Normalen zu einer Fläche. Im Jahr 1828 begann Hamilton sein Studium der Congruenzen, die auch *Strahlensysteme* genannt wurden, *Irish Trans.*, 15, 1828; 16, 1830; 17, 1837 und im Jahr 1860 veröffentlichte Kummer seinen schon erwähnten Aufsatz, *Crelle*, 57, der einen wichtigen Fortschritt in der Entwickelung der Theorie bedeutete.

Den Anfang mit dem systematischen Studium der algebraischen Congruenzen 1^{ter} und 2^{ter} Ordnung machte Kummer im Jahr 1866 in einem anderen Aufsatz *Berl. Abh.*, 1866 und ein grosser Theil der *neuen Geometrie* Plücker's wurde der Theorie der Congruenzen und speciell derjenigen gewidmet, die sich aus dem Schnitt zweier linearer Complexe ergeben.

Andere Arbeiten über die Congruenzen sind von Möbius, *Leipz. Ber.*, 14, 1862; Matthiessen, *Zeitschr. f. Math.*, 29; *Acta math.*, 4; Weingarten, *Crelle*, 98; Bianchi, *Ann. di mat.*, 15; Voss, *Math. Ann.*, 9; R. Sturm, *Gött. Nachr.*, 1888; *Math. Ann.*, 36; Schumacher, ib., 37, 38; Montesano, *Atti Acc. Torino*, 1892; *Rend. Lincei*, 1892; *Rend. Palermo*, 1893; etc.

Eine alles Wesentliche umfassende Darstellung der Congruenzentheorie findet man bei Sturm l. c. Bd. 2. Die Einführung des *Rangs* geschah durch Schumacher, der ihn, wie wir oben bereits bemerkt haben, *Art* nannte.

§ 11. Congruenzen 1^{ter} Ordnung.

Alle Congruenzen 1^{ter} Ordnung sind vom Rang Null; sie können keine eigentliche Brennfläche als Ort der Focalpunkte haben; ihre Brennfläche ist vielmehr nur die Enveloppe der Focalebenen.

Unter die Congruenzen 1^{ter} Ordnung ist *das Strahlenbündel* zu rechnen, *welches von der Classe Null ist und für welches nur ein einziger singulärer Punkt existirt.*

Jede andere Congruenz 1^{ter} Ordnung hat immer wenigstens eine singuläre Linie. Wenn eine singuläre Linie der linearen Congruenz die Ordnung γ_h hat und so beschaffen ist, dass die unendlich vielen Strahlen, die von einem ihrer Punkte ausgehen, einen Kegel h^{ter} Ordnung bilden, so besteht die Relation

$$\sum \gamma_h h(h-1) = m(m-1),$$

worin m die Classe der Congruenz angibt und die Summirung sich über alle singulären Linien erstreckt.

Man erhält ferner noch zwei Beziehungen, von denen die letzte aus den beiden früheren folgt:

$$\sum \gamma_h h^2 = m(m+1),$$
$$\sum \gamma_h h = 2m.$$

Die Congruenz erster Ordnung kann höchstens zwei singuläre Linien (Leitcurven der Congruenz) haben.

Wenn sie nur eine Leitcurve hat und auf jedem ihrer Strahlen die Focalpunkte im Allgemeinen verschieden sind, so liegt eine Congruenz der Sehnen einer gewissen Curve vor.

Die einzige aus Sehnen einer Curve gebildete Congruenz 1^{ter} Ordnung ist die Congruenz der Sehnen einer Raumcurve 3^{ter} Ordnung; sie ist von der 3^{ten} Classe.

Wenn die Congruenz zwei Leitcurven hat, so muss die eine von ihnen eine Gerade sein; die Ordnung der anderen Curve ist dann die Classe m der Congruenz; diese Directrix m^{ter} Ordnung muss die Gerade in

$$m(m-1)$$

Punkten treffen.

Wenn die beiden Brennpunkte auf jedem Strahl der Congruenz zusammenfallen, so hat diese eine einzige Focalcurve und Directrix, welche nur eine Gerade sein kann.

Diese Congruenz lässt sich auf eine einzige Art, wie folgt, erzeugen: man ordnet die Punkte einer Geraden in einer Correspondenz $[1, m]$ den Ebenen des Büschels zu, welches diese Gerade zur Axe hat, und betrachtet als Gerade der Congruenz die sämmtlichen (ein Büschel bildenden) Geraden, welche durch einen Punkt der Geraden gehen und in der entsprechenden Ebene liegen.

Der (einzige) Brennpunkt eines jeden Strahls ist der Punkt, in welchem der Strahl die Leitgerade trifft und die Focalebene ist die Ebene, die durch den Strahl und die Leitgerade geht.

Kummer hat in seiner Arbeit *Berl. Abh.*, 1866 bei der Classification der Congruenzen 1^{ter} Ordnung die mit nur einer Focallinie nicht zu diesen Congruenzen gerechnet.

§ 12. Congruenzen 2^{ter} Ordnung ohne singuläre Linien.

Die Congruenzen zweiter Ordnung können nur entweder *eine endliche Anzahl singulärer Punkte* oder *singuläre Linien haben.*

In dem ersteren Fall kann die Classe m nicht höher als die 7^{te} sein.

In einer Congruenz 2^{ter} *Ordnung ohne singuläre Linien können keine singulären Ebenen von einem höheren als dem* 1^{ten} *Grad und keine singulären Punkte von höherem als dem* 6^{ten} *Grad vorkommen.* Siehe § 10.

Jeder singuläre Punkt ersten Grads ist das Centrum eines Strahlenbüschels, welches in einer singulären Ebene liegt, die ebenfalls ersten Grads ist.

Der Rang einer Congruenz $(2, m)$ *ohne singuläre Linien ist der* $(m - 2)^{\text{te}}$.

Die Charakteristiken des durch die Congruenz $(2, m)$ *bestimmten Nullsystems* (siehe § 10) *sind:*

$$1, \ \tfrac{1}{2}m(m-1), \ m-2.$$

Die Brennfläche einer Congruenz $(2, m)$ *ohne singuläre Curven ist* 4^{ter} *Ordnung,* $2m^{\text{ter}}$ *Classe und* 12^{ten} *Rangs*); jeder singuläre Punkt der Congruenz ist Doppelpunkt für die Brennfläche.*

Die Strahlen, deren Focalpunkte und die Strahlen, deren Focalebenen zusammenfallen, bilden 2 Regelflächen $2(m+2)^{\text{ten}}$ *Grads.*

Wenn α_h *die Anzahl der singulären Punkte* h^{ten} *Grads bezeichnet, so gelten die folgenden Relationen:*

$$\begin{aligned} \sum \alpha_h &= 18 - m, \\ \sum \alpha_h h &= 4(m+2), \\ \sum \alpha_h h^2 &= 2m(m+2), \\ \sum \alpha_h h^3 &= (m+2)^2(m-1). \end{aligned}$$

Jede Congruenz $(2, m)$ *ohne singuläre Linien hat* $\tfrac{1}{2}(m-2)(m-3)$ *Doppelstrahlen und zu jedem singulären Punkt* h^{ten} *Grads gehören* $\tfrac{1}{2}(h-1)(h-2)$ *Doppelstrahlen, welche Doppelerzeugende des von diesem Punkt ausgehenden Kegels sind; kein Doppelstrahl liegt in der Brennfläche.*

Jede singuläre Ebene enthält 6 auf einem Kegelschnitt liegende singuläre Punkte und jeder (von einem singulären Punkt 2^{ten} *Grads ausgehende) singuläre Kegel* 2^{ten} *Grads enthält im Ganzen 9 singuläre Punkte, die auf einer Raumcurve* 4^{ter} *Ordnung* 1^{ter} *Species liegen, welche einen Doppelpunkt in der Spitze des Kegels hat. Jeder Doppelstrahl enthält zwei singuläre Punkte; die Summe*

*) Unter Rang einer Fläche versteht man die Zahl a. Siehe S. 208.

der Zahlen, welche die Grade der beiden letzteren angeben, beträgt $m + 2$.

Es gibt zwei Arten von Congruenzen $(2, m)$ *ohne singuläre Punkte, nämlich:*

I. *die Congruenzen, welche nur singuläre Punkte vom* 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} *und* $(m-1)^{\text{ten}}$ *Grad besitzen (1^te^ Art);*

II. *diejenigen, welche nur singuläre Punkte vom* 1^{ten}, 2^{ten} *und* $(\frac{1}{2}m + 1)^{\text{ten}}$ *Grad haben (2^te^ Art).*

Die Zahlen α_k bezüglich der verschiedenen Arten von Congruenzen $(2, m)$ ohne singuläre Linien sind mithin die folgenden:

	Congruenzen 1^ter^ Art					
	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)
α_1	16	10	6	3	1	0
α_2	—	5	6	6	4	0
α_3	—	—	2	3	6	10
α_4	—	—	—	1	0	0
α_5	—	—	—	—	1	0
α_6	—	—	—	—	—	1

	Congruenzen 2^ter^ Art	
	(2, 4)	(2, 6)
α_1	6	0
α_2	6	8
α_3	2	0
α_4	—	4

Für die beiden Congruenzen (2, 6) werden nach dem Vorgang R. Sturm's in seinem citirten Werk die Bezeichnungen $(2, 6)_{\mathrm{I}}$, $(2, 6)_{\mathrm{II}}$ gebraucht. Es ist zu beachten, dass die Autoren vor R. Sturm seine „2^te^ Art" die „1^te^" nannten und umgekehrt.

Die Congruenz (2, 2) *hat zur Brennfläche eine Kummer-sche Fläche; sie ist der vollständige Schnitt eines Complexes* 2^{ten} *Grads mit einem linearen Complex.*

Aus den 16 singulären Punkten lassen sich 40 Paare verbundener Punkte und 80 Paare nicht verbundener Punkte zusammenstellen. Jeder Punkt ist mit anderen 5 Punkten verbunden.

Diese Congruenz studirte speciell Kummer, *Berl. Abh.*, 1866; Reye, *Crelle*, 86; Schur, *Math. Ann.*, 15; Caporali, *Mem. Lincei*, (3), 2, 1878; Stahl, *Crelle*, 92; Hirst, *Lond. math. Soc.*, 14; R. Sturm, *Crelle*, 101. Eine ausführliche Behandlung dieser und anderer Congruenzen findet man auf p. 117 u. ff. des 2ten Bds. des R. Sturm'schen Werks.

Die Congruenz (2, 3) *hat 5 singuläre Punkte 2ten Grads* S_2, *10 ersten Grads* S_1 *und mithin 10 singuläre Ebenen; jede von diesen geht durch 2 Punkte* S_2 *und einen Punkt* S_1.

Jeder Punkt S_2 *ist mit jedem anderen* S_2 *und mit vier* S_1 *verbunden; jeder Punkt* S_1 *ist mit drei* S_1 *und mit zwei* S_2 *verbunden.*

Durch jede Congruenz (2, 3) *gehen 10 tetraedrale Complexe; das Fundamentaltetraeder eines jeden von ihnen hat zu Ecken drei Punkte* S_2 *und den einzigen Punkt* S_1, *der mit keinem dieser drei* S_2 *verbunden ist.*

Die Brennfläche ist eine Fläche 4ter Ordnung und 6ter Classe; sie hat die 10 singulären Ebenen zu in Kegelschnitten doppelt berührenden Ebenen,

Diese Congruenz wurde ausser von Kummer, Reye, Hirst, die oben citirt wurden, auch von Stahl, *Crelle*, 91; Voss, *Math. Ann.*, 23, p. 381 u. ff.; Schumacher, *Unters. über Strahlensyst. 3ter Ordn. und 2ter Classe, Dissertation*, München 1885 studirt.

Die Congruenz (2, 4) *ist vom 2ten Rang; sie hat nothwendiger Weise einen Doppelstrahl, der die beiden singulären Punkte 3ter Ordnung verbindet; sie besitzt zwei miteinander verbundene singuläre Punkte* S_3 *dritten Grads, 6 zweiten und 6 ersten Grads und mithin 6 singuläre Ebenen. In jeder singulären Ebene liegt ein Punkt* S_3, *zwei* S_2 *und zwei* S_1. *Jeder Punkt* S_2 *ist nur mit einem der übrigen* S_2 *nicht verbunden; ein Punkt* S_3 *und ein* S_2 *sind immer verbunden; jeder Punkt* S_1 *ist mit drei anderen* S_1 *nicht verbunden und nur mit einem einzigen* S_3 *verbunden.*

Die Brennfläche ist 4ter Ordnung und 8ter Classe mit 14 konischen Punkten und 6 längs Kegelschnitten berührenden Ebenen. Die Bitangentialebenen umhüllen eine Developpable 4ter Classe, und die stationären Ebenen eine Developpable 12ter Classe, welche die Brennfläche längs einer Curve 12ter Ordnung berührt.

Durch die Congruenz (2, 4) *gehen 3 tetraedrale Complexe.*

Die Ecken des Tetraeders sind die beiden Punkte S_3 und zwei Punkte S_2, welche nicht miteinander verbunden sind.

Die Congruenz wurde ausser von Kummer und den übrigen oben citirten Autoren speciell auch von Stahl studirt, *Crelle*, 97.

Die Congruenz (2, 5) *hat drei singuläre Ebenen und ist vom 3ten Rang.*

Sie hat einen Punkt S_4, drei Punkte S_3, sechs S_2 und drei S_1, ferner drei Doppelstrahlen, die S_4 mit jedem der Punkte S_3 verbinden.

Es existirt ein einziger singulärer Kegel 4ter Ordnung, welcher die sämmtlichen singulären Punkte bis auf einen S_1 enthält. Die diesem S_1 entsprechende singuläre Ebene enthält auch die beiden anderen Punkte S_1.

Die Congruenz (2, 5) *gehört zu einem einzigen tetraedralen Complex, dessen Tetraeder die Punkte S_4, S_3 zu Ecken hat.*

Die Brennfläche ist 4ter Ordnung, 10ter Klasse mit 13 konischen Punkten und 3 singulären Berührungsebenen. Die doppelt berührenden Ebenen umhüllen eine Developpable 12ter Classe und die stationären Ebenen eine Developpable 18ter Classe.

Diese Brennfläche ist **nicht** *die einzige Fläche 4ter Ordnung mit 13 konischen Punkten.*

Die Congruenz $(2, 6)_{\mathrm{I}}$ *hat einen Punkt S_5, sechs S_3, vier S_2, einen S_1, eine singuläre Ebene, 6 Doppelstrahlen.*

Alle Punkte S_2 und der einzige S_5 liegen in der singulären Ebene; der Rang von $(2, 6)_{\mathrm{I}}$ *ist der 4te.*

Die $(2, 6)_{\mathrm{I}}$ *gehört einem tetraedralen Complex nicht an.*

Die Brennfläche ist 4ter Ordnung, 12ter Classe mit 12 Doppelpunkten; sie ist nicht die einzige von dieser Beschaffenheit); die doppelt berührenden Developpablen und die stationären Ebenen sind beide von der 24ten Classe.*

Die Congruenz $(2,6)_{\mathrm{II}}$ *hat vier Punkte S_4, acht S_2, sechs Doppelstrahlen, welche die 4 Punkte S_4 verbinden; sie ist vom 4ten Rang.*

---

*) Rohn hat bewiesen, dass es 4 Arten von Flächen 4ter Ordnung mit 12 Doppelpunkten gibt; siehe *Math. Ann.*, 29; vergl. auch R. Sturm, l. c., p. 271.

Sie unterscheidet sich dadurch von der anderen Congruenz 6^{ter} Classe, dass sie einem tetraedralen Complex angehört; die Ecken des Tetraeders sind die 4 Punkte S_4.

Die sechs in einer Ebene liegenden Strahlen der Congruenz bilden immer ein Brianchon'sches Sechsseit. Vergl. S. 76.

Die Brennfläche hat 12 Doppelpunkte; sie ist nicht dieselbe, wie die von $(2, 6)_{\mathrm{I}}$, *sondern eine andere der 4 von Rohn gefundenen Flächen* (siehe oben). Vergl. R. Sturm, l. c., 2, p. 271.

Man beachte, dass die Congruenzen (2, 5), (2, 4), (2, 3), (2, 2) *sich sämmtlich als specielle Fälle von* $(2, 6)_{\mathrm{II}}$ *ansehen lassen;* Kummer, l. c., p. 102; R. Sturm, l. c., 2, p. 294.

Die Congruenz (2, 7) hat einen Punkt S_6, 10 Punkte S_3 und 10 Doppelstrahlen, welche den einzigen Punkt S_6 mit den 10 Punkten S_3 verbinden; sie ist vom 5^{ten} Rang.

Die Brennfläche ist von der 14^{ten} Classe und hat 11 conische Punkte; die doppelt berührenden Developpablen und stationären Ebenen sind von den Classen 40 bez. 30; diese Brennfläche ist nicht die einzige, die 11 conische Punkte hat; es gibt ausser ihr noch drei andere, wie Rohn, l. c. gefunden hat.

Die Congruenzen 2^{ter} Ordnung mit nur singulären Punkten wurden zuerst in der bereits citirten Arbeit von Kummer, 1866 studirt; später folgten die oben schon angegebenen Aufsätze, dann Caporali, *Rend. Acc. Napoli,* 1879; Bertini, *Rend. Acc. Lincei,* 1879—80; Loria, *Atti Acc. Torino,* 1884—1886; Masoni, *Rend. Acc. Napoli,* 1883.

Die Arbeit Caporali's enthält eine sehr elegante Erzeugungsart für die Congruenzen (7, 2), (6, 2), (5, 2).

§ 13. Congruenzen 2^{ter} Ordnung mit singulären Linien.

Von diesen Congruenzen unterscheidet man drei Kategorien:

I. Die Congruenz besteht aus den Sehnen einer Raumcurve, welche nur eine Curve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Species sein kann. Siehe Kap. 10, S. 254. *Sie ist 6^{ter} Classe und 2^{ten} Rangs.*

Die Brennfläche ist 8^{ter} Ordnung und wird aus den vier Kegeln 2^{ten} Grads gebildet, die durch die Curve 4^{ter} Ordnung gehen.

Die 4 Spitzen der Kegel sind für die Congruenz singuläre Punkte 2^{ten} Grads; die singuläre Linie ist offenbar die Raumcurve 4^{ter} Ordnung.

II. *Die Congruenz besteht aus allen Geraden, die zwei Curven treffen; diese Curven sind die singulären Linien und können sein:*

A) *zwei Kegelschnitte mit zwei gemeinschaftlichen Punkten: die Congruenz ist 4^{ter} Classe und 2^{ten} Rangs; die Punkte der beiden Kegelschnitte sind singulär 2^{ten} Grads mit Ausnahme der beiden gemeinschaftlichen Punkte, die singulär 3^{ten} Grads sind: die Ebenen der beiden Kegelschnitte sind singulär 2^{ten} Grads und die zwei Berührungsebenen an beide Kegelschnitte in ihren Schnitt punkten singuläre Ebenen 1^{ten} Grads.*

Betrachtet man das Büschel von Flächen 2^{ter} Ordnung, welche durch die beiden Kegelschnitte gehen, und in diesem Büschel die zwei nicht degenerirten Kegel, so sind die Spitzen dieser beiden Kegel auch singuläre Punkte 2^{ten} Grads für die Congruenz; die Brennfläche (4^{ter} Ordnung) besteht dann aus diesen beiden Kegeln.

B) *Eine der singulären Linien ist eine Gerade und die andere eine Curve n^{ter} Ordnung, welche die Gerade in $n-2$ Punkten schneidet. Diese Congruenz ist n^{ter} Classe und nullten Rangs.*

Jeder Punkt auf der singulären Geraden ist ein singulärer Punkt n^{ten} Grads und jeder Punkt der Curve singulär 1^{ten} Grads. Jede durch die Gerade gelegte Ebene ist singulär 2^{ten} Grads. Die Brennfläche besteht aus der Gesammtheit aller durch die Gerade an die Curve gezogenen Berührungsebenen; sie ist mithin von der Ordnung

$$m - 2(n-2),$$

wenn m die Classe der Raumcurve angibt.

Die Congruenz hat zu Doppelstrahlen alle Geraden, welche die Curve zweimal schneiden und von den Punkten der singulären Geraden ausgehen; diese Bisecanten bilden eine Regelfläche von der Ordnung

$$2(n-1) - \tfrac{1}{2}m.$$

III. *Die Congruenz besteht aus Strahlen, welche eine gewisse singuläre Linie nur einmal schneiden. Es können hier die folgenden Fälle vorkommen:*

A) *die singuläre Linie ist eine Gerade. Die Congruenz hat den Rang Null. Sie kann sein:*

(1) *die Congruenz* $(2, 2)$ *aller Geraden, die eine Fläche* 2^{ter} *Ordnung berühren und eine gegebene Gerade schneiden;*

(2) *die Congruenzen* $(2, 2\mu - 2)$ *der Geraden, welche in einem Punkt eine Fläche* μ^{ter} *Ordnung mit einer* $(\mu - 2)$*-fachen Geraden berühren und welche diese letztere in einem zweiten Punkt treffen;*

(3) *die Congruenzen* $(2, m)$ *der Geraden, die man erhält, wenn die Punkte einer Geraden den Ebenen eines Büschels, dessen Axe die Gerade ist, in der Correspondenz* $(2, m)$ *zugeordnet und die Büschel von Geraden construirt werden, deren Centrum in einem Punkt der Geraden liegt und deren Ebene die diesem Punkt entsprechende Ebene ist.*

Diese Species (3) hat Kummer nicht in Erwägung gezogen.

B) *Die singuläre Linie ist von der Ordnung* $n > 1$; *von jedem ihrer Punkte geht ein Strahlenbüschel der Congruenz aus und ausserdem ein anderer isolirter Strahl. Die Classe der Congruenz ist der Ordnung der singulären Curve, die rational sein muss, gleich.*

Die Ebenen der von den Punkten der singulären Curve ausgehenden Strahlenbüschel müssen einen Kegel zweiter Ordnung berühren, dessen Spitze auch ein singulärer Punkt für die Congruenz ist.

Der Rang der Congruenz ist $n - 1$.

Die Congruenz besteht aus den Tangenten an einen Kegel 2^{ter} *Ordnung.*

Von dieser Species lassen sich zwei Unterabtheilungen unterscheiden:

(1) *die rationale Curve* n^{ter} *Ordnung liegt auf dem Kegel* 2^{ten} *Grads und geht* $n - 2$ *mal durch dessen Spitze;*

(2) *die rationale Curve* n^{ter} *Ordnung liegt nicht auf dem Kegel, ist aber projectiv zu ihm, d. h. ihre Punkte entsprechen eindeutig den Berührungsebenen des Kegels und jeder Punkt liegt in der ihm entsprechenden Berührungsebene.*

C) *Die singuläre Linie ist von der Ordnung* $n > 1$; *von jedem ihrer Punkte geht ein Kegel* 2^{ter} *Ordnung von Geraden der Congruenz aus und irgend ein anderer Strahl. Der Rang der Congruenz ist* $n - 2$.

Man unterscheidet die folgenden Fälle:

(1) *der Kegel* 2^{ter} *Ordnung zerfällt in zwei Ebenen. Die Congruenz ist* $2n^{\text{ter}}$ *Classe und besteht aus Strahlen, welche einen Kegel* 2^{ter} *Ordnung berühren und eine ebene Curve* n^{ter} *Ordnung, die* $n - 1$ *mal durch die Spitze des Kegels geht, schneiden.*

Die hier folgenden Arten hat Kummer nicht in Erwägung gezogen, sie wurden von Sturm gefunden.

(2) *Der von einem Punkt der singulären Linie ausgehende Kegel 2ten Grads ist nicht degenerirt; die singuläre Linie ist ein Kegelschnitt. Die Congruenz besteht aus allen Geraden, welche den Kegelschnitt schneiden und eine Fläche 4ter Ordnung berühren, die den Kegelschnitt zur Doppelcurve und ausserdem noch 4 andere conische Punkte hat. Die Congruenz ist 4ter Classe.*

(3) *Der Kegel degenerirt nicht und die singuläre Linie ist eine ebene Curve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt; die Congruenz ist 6ter Classe; sie entsteht auf die folgende Art: Man nimmt im Raum 4 Punkte an, deren 6 Verbindungsgerade sich auf der Curve 3ter Ordnung schneiden; alle Kegel 2ten Grads, deren Spitzen auf der Curve liegen, und welche durch die vier gewählten Punkte und durch den Doppelpunkt der Curve gehen, erzeugen die Congruenz* (2, 6).

(4) *Der Kegel degenerirt nicht und die singuläre Linie ist eine Raumcurve 3ter Ordnung; die Congruenz ist 6ter Classe; sie entsteht auf die folgende Art: Auf der Raumcurve 3ter Ordnung nimmt man 4 Punkte an und zieht durch einen von ihnen P eine Sehne, welche die Curve in einem fünften Punkt Q schneidet; die Gesammtheit der Kegel 2ten Grads, deren Spitzen auf der Curve liegen, und welche durch die 4 Punkte gehen und in P die Sehne PQ berühren, erzeugt die Congruenz.*

Die sechs Verbindungsgeraden der 4 Punkte sind Doppelstrahlen der Congruenz und die 4 Punkte sind singulär vom 4ten Grad.

Die Congruenzen 2ter Ordnung mit singulären Linien behandelte zuerst Kummer in dem wiederholt citirten Aufsatz vom Jahr 1866; er begann sie zu classificiren; es entgingen ihm jedoch einige Species; vollständig ist die Aufzählung von Sturm, *Math. Ann.*, 36, von Schumacher, ib., 38 und in der schon citirten *Dissertation* Schumacher's. Das letzte Kapitel des 2ten Bds. des Sturm'schen Werks gibt eine eingehende Darstellung dieser Congruenzen.

Mit ihnen beschäftigte sich auch Montesano, *Atti Acc. Torino*, 1892; *Rend. Lincei*, (5), 1; *Rend. Palermo*, 7; *Rend. Ist. Lomb.*, 1893; er studirte ihre Abbildung auf eine Ebene.

Ueber die Congruenzen höherer als der zweiten Ordnung existiren nur wenige Arbeiten.

Eine der ersten ist von Irmer, *Ueber Strahlensysteme 3ter Ordnung mit Brenncurven, Dissertation,* Halle 1870 (siehe die *Fortschr. d. Math.,* 1870, p. 611); eine Congruenz (3, 3) wurde von Roccella in einer unter dem Titel: *Sugli enti geometrici dello spazio di rette* etc., 1882 separat publicirten Arbeit untersucht, in welcher der Verfasser eine specielle, durch drei projective Büschel linearer Complexe erzeugte Congruenz studirte. Mit Congruenzen 3ter und höherer Ordnung befassten sich auch Hirst, *Proc. London Soc.,* 14, 16, 17; *Rend. Palermo,* 1 und Fano, *Atti Acc. Torino,* 1894—1896; 1901; *Mem. Acc. Torino,* (2), 50, 1901. In dem letzteren Aufsatz stellt Fano seine sämmtlichen früheren Untersuchungen über die Congruenzen 3ter Ordnung ohne singuläre Linien systematisch zusammen.

§ 14. Die Kugelgeometrie.

Wenn 5 Kugeln gegeben sind, deren Gleichungen in Cartesischen Coordinaten

$$s_i \equiv (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 + (z - \gamma_i)^2 - R_i^2 = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 5)$$

lauten, so lässt sich die Gleichung jeder anderen Kugel des Raums

$$s \equiv s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + s_4 x_4 + s_5 x_5 = 0$$

schreiben, worin die x Grössen bedeuten, die von der speciellen in Betracht gezogenen Kugel abhängen.

Die fünf Grössen x kann man zu *homogenen Coordinaten* einer Kugel des Raums nehmen; die fünf gegebenen Kugeln sind dann die *Fundamentalkugeln* des Coordinatensystems.

Betrachtet man *die Kugel* als Element eines Raums, *so bildet offenbar die Gesammtheit aller Kugeln einen linearen Raum von 4 Dimensionen,* während die Gesammtheit aller Geraden des Raums, wie wir schon gesagt haben, einen *quadratischen* Raum von 4 Dimensionen bildet.

Dieses homogene Coordinatensystem wurde von Loria angewendet.

Ein anderes von Reye benutztes System *nicht* homogener Coordinaten ist das folgende:

Wir wollen *Potenz eines Punkts in Bezug auf eine Kugel* das Produkt der Abstände des Punkts von zwei mit ihm in derselben Geraden liegenden Punkten der Kugel nennen; (*dieses Product bleibt beim Variiren der durch den Punkt gehenden Transversalen constant*); die drei Coordinaten α, β, γ des Mittelpunkts der Kugel und die in Bezug auf die Kugel gebildete Potenz p des Anfangspunkts der Cartesischen Coordinaten (diese Potenz wird durch $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = p$ ausgedrückt) können zu Coordinaten der Kugel im Raum genommen werden.

Die Coordinaten x_i haben (analog, wie bei den homogenen Punkt- oder Ebenencoordinaten) die Eigenschaft, dass eine jede ihrer linearen Transformationen geometrisch der Umänderung des Systems der fünf Fundamentalkugeln in ein System von fünf anderen entspricht, welche in Bezug auf die früheren zu Coordinaten die Coefficienten der zu der gegebenen inversen *linearen Substitution haben.*

Sie haben ausserdem die Eigenschaft, *dass, wenn der Kugelraum mittelst einer Transformation durch reciproke Radienvectoren transformirt wird, die Coordinaten der transformirten Kugeln in Bezug auf die 5 transformirten Fundamentalkugeln dieselben sind, wie die der früheren Kugeln in Bezug auf die früheren 5 Fundamentalkugeln.* Loria.

Setzt man

$$2R_{ij} = 2R_{ji} = R_i^2 + R_j^2 - \\ - \{(\alpha_i - \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2 + (\gamma_i - \gamma_j)^2\},$$

so heisst der Ausdruck $2R_{ij}$ *Invariante* der beiden Fundamentalkugeln (i), (j); *sein Verschwinden ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass die beiden Kugeln einander orthogonal (senkrecht) schneiden.*

Wenn alle R_{ij} verschwinden, d. h., wenn die fünf Kugeln zu je zweien senkrecht auf einander stehen, so gilt die Relation $\sum \frac{1}{R_i^2} = 0$. Darboux, *Sur une classe remarquable des courbes et surfaces*, Paris 1873, p. 135.

Fünf Kugeln, die sich zu je zweien orthogonal schneiden, können nicht sämmtlich reell sein.

Wird mit R der Radius einer beliebigen Kugel mit den Coordinaten x_i, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ bezeichnet, so besteht die Formel

$$R^2 = \frac{\sum_{ij} R_{ij} x_i x_j}{(\sum_i x_i)^2},$$

aus welcher unmittelbar die Beziehungen vor Augen treten, die zwischen den x bestehen müssen, damit die Kugel entweder den

Radius Null habe (sich auf einen Punkt, eine sogenannte *Punktkugel*, reducire) oder einen unendlich grossen Radius habe (sich auf eine Ebene, eine *Ebenenkugel*, reducire).

Eine Punktkugel ist als orthogonal zu einer Kugel anzusehen, wenn sie auf ihr liegt; zwei Punktkugeln sind orthogonal, wenn sie zusammenfallen.

Nennt man R_{xy} die Polare des Pols y in Bezug auf die Form

$$R_{xx} = \sum_{ij} R_{ij} x_i x_j\,,$$

so ist die gemeinschaftliche Invariante der beiden Kugeln mit den Coordinaten (x) *und* (y)

$$-\frac{R_{xy}}{\Sigma_i x_i\, \Sigma_i y_i}\,.$$

Die Bedingung dafür, dass die beiden Kugeln (x), (y) *einander berühren, ist*

$$R_{yy} R_{xx} - (R_{xy})^2 = 0\,.$$

Wie in der Liniengeometrie, so lassen sich auch in der Kugelgeometrie die *Kugelcomplexe*, die *Kugelcongruenzen*, ihre *Ordnungen*, etc. definiren.

Alle Kugeln eines linearen Kugelcomplexes stehen senkrecht auf derselben Kugel.

Alle Punktkugeln des Raums bilden offenbar einen Complex 2^{ten} Grads, dessen Gleichung

$$\sum_{ij} R_{ij} x_i x_j = 0$$

lautet; wenn man zwischen den x eine neue quadratische Gleichung aufstellt, so ergibt sich ein anderer Kugelcomplex 2^{ten} Grads; die den beiden Complexen gemeinschaftliche Congruenz 4^{ter} Ordnung wird nur von Punktkugeln gebildet; dabei ist das Theorem bemerkenswerth, *dass der Ort dieser* ∞^2 *Punktkugeln eine Cyclide ist.* Siehe Kap. 12, § 7.

Ferner gilt im Allgemeinen:

Der Ort der Punktkugeln eines Complexes n^{ter} *Ordnung ist eine Fläche* $2n^{\text{ter}}$ *Ordnung, die den unendlich fernen imaginären Kreis zur* n*-fachen Linie hat. Der Ort der Punktkugeln einer Congruenz* n^{ter} *Ordnung ist eine Curve* $2n^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Von diesem Gesichtspunkt aus studirte und classificirte Loria die *Cycliden*, wie wir an der betreffenden Stelle, Kap. 12 angegeben haben.

Die ersten Begriffe einer Kugelgeometrie verdankt man Lie, *Compt. Rend.*, 1870; *Math. Ann.*, 5, ferner Darboux in dem schon auf Seite 421 citirten Werk (vergl. auch Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Vol. 1: *Les coordonnées pentasphériques*); auf sie folgten Reye, *Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme*, Leipzig 1879; *Crelle*, 99; Loria, *Mem. Acc. Torino*, 1884; *Atti Acc. Torino*, 1885.

Die Arbeit des letzteren Autors enthält eine systematische Behandlung des Gegenstands; wir haben sie zu den wenigen obigen Angaben benutzt.

Mit metrischen Beziehungen in Bezug auf die Kugeln des Raums beschäftigten sich Frobenius, *Crelle*, 79; Darboux, l. c. und *Ann. de l'Éc. norm. sup.*, 1872; siehe auch Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. des Raums*, 2. Thl., 3. Aufl. p. 453 u. ff.

Ueber die Bestimmung der durch drei gegebene Punkte gehenden *Punktkugel* und die Beziehung dieses Problems zu der Aufgabe, den Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise berührt, siehe Casey, *Trans. Irish Ac.*, 1866; Cayley, *Ann. di mat.*, (2) 1.

Kapitel XV.

Abzählende Geometrie.

§ 1. Allgemeines. — Princip der Erhaltung der Anzahl.

Die abzählende Geometrie beschäftigt sich mit den Problemen, die zu ermitteln suchen, *wie viele bestimmte geometrische Gebilde existiren, die gegebenen Bedingungen genügen;* z. B. wie viele Kegelschnitte eines Büschels eine Gerade berühren, oder wie viele Curven 4^{ter} Ordnung mit einem dreifachen Punkt durch zehn gegebene Punkte gehen, etc.

Nachdem das geometrische Gebilde definirt ist, nehmen wir an, es existiren ∞^c Individuen, die dieser Definition entsprechen, d. h., wir setzen voraus, bei der analytischen Darstellung des Gebildes bleiben c Constante unbestimmt; die Zahl c pflegt alsdann *die Constantenzahl* des Gebildes genannt zu werden.

1. *Für einen Punkt der Ebene ist $c = 2$ und für einen Punkt des Raums $c = 3$.*

2. *Für eine Ebene des Raums ist $c = 3$.*

3. *Für eine Gerade in der Ebene ist $c = 2$ und für eine solche im Raum $= 4$.*

4. *Bei einem Dreieck im Raum wird $c = 9$ und in der Ebene $c = 6$.*

5. *Die Constantenzahl eines ebenen Polygons von n Seiten im Raum beträgt:*

$$c = 2n + 3.$$

6. *Für ein Polyeder von k Seiten ist $c = k + 6$.* Hoppe, *Grunert's Arch.*, 55; Schubert, ib., 63.

7. *Die Constantenzahl beträgt für eine in einer gegebenen Ebene liegende Curve n^{ter} Ordnung, ν^{ter} Classe, mit d Doppelpunkten, r Spitzen, δ Doppeltangenten, ι Inflexionen:*

$$c = 3 + \tfrac{1}{2}n(n + 3) - d - 2r = 3 + \tfrac{1}{2}\nu(\nu + 3) - \delta - 2\iota,$$

8. *für eine allgemeine Fläche n^{ter} Ordnung:*

$$c = \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1,$$

9. *für einen allgemeinen Liniencomplex n^{ter} Ordnung:*

$$c = \tfrac{1}{12}(n+1)(n+2)^2(n+3) - 1;$$

Lüroth, *Crelle,* 67; Voss, *Math. Ann.,* 9.

Wenn y eine Bedingung ausdrückt, welcher ein geometrisches Gebilde, dessen Definition gegeben ist, unterworfen wird, und z eine andere solche Bedingung, so wird die aus beiden zusammen resultirende Bedingung durch yz dargestellt und das *Product* der beiden Bedingungen genannt.

Wenn z. B. g die Bedingung bezeichnet, unter welcher eine Gerade eine bestimmte andere Gerade schneidet und g_p die Bedingung, die erfüllt sein muss, damit eine Gerade durch einen Punkt gehe, so stellt gg_p die Bedingung dar, unter welcher eine Gerade durch einen Punkt geht und eine andere Gerade trifft; g^2 die Bedingung dafür, dass eine Gerade zwei gegebene Gerade schneide, etc.

Man sagt, eine Bedingung sei von der *Dimension* α für ein bestimmtes geometrisches Gebilde, wenn sie zu α Gleichungen zwischen den c Constanten des Gebildes führt, d. h. wenn $\infty^{c-\alpha}$ Gebilde vorhanden sind (∞^0 = endliche Zahl), die der gegebenen Bedingung genügen. Die Gesammtheit aller, der Bedingung von der Dimension α genügenden $\infty^{c-\alpha}$ Gebilde heisst *ein System von der $(c-\alpha)^{\text{ten}}$ Stufe;* so ist eine Curve ein System 1^{ter} Stufe; ein Strahlencomplex ein System 3^{ter} Stufe, eine Regelfläche ein Strahlensystem 1^{ter} Stufe etc.

Die Dimension einer Bedingung, welche das Product mehrerer anderer ist, kommt der Summe der Dimensionen der Factoren gleich.

Es sei c die Constantenzahl eines geometrischen Gebildes und diesem mögen c-fach zusammengesetzte Bedingungen auferlegt werden; alsdann existirt im Allgemeinen eine *endliche Anzahl N* von Individuen des Gebildes, welche diesen Bedingungen genügen.

Wird die gegenseitige Lage der Elemente des Gebildes geändert, oder wird sie auf geeignete Weise specialisirt, so bleibt die Zahl N entweder ungeändert oder wird unendlich gross. Dieser Satz heisst *das Princip der Erhaltung der Anzahl* oder *das Princip der gleichgültigen oder speciellen Lage.* Schubert. Algebraisch interpretirt, sagt es aus, dass eine Gleichung, wie man auch die Werthe ihrer Coefficienten ändern möge, entweder dieselbe Anzahl von Wurzeln behält, oder eine Identität wird, in welchem Fall die Anzahl ihrer Wurzeln unendlich gross ist.

Selbstverständlich muss man bei seiner Anwendung die durch die vorgenommenen Aenderungen etwa eingetretene Vervielfachung der Individuen in Rechnung ziehen.

Dieses Princip ist sehr förderlich, weil man durch Specialisirung der Lage der Elemente eines Gebildes die Berechnung der Anzahl von Individuen, die gegebenen Bedingungen genügen, bedeutend vereinfachen kann. Ein Beispiel wird seine Anwendung erläutern:

Man wünscht zu wissen, wie viele Gerade 4 gegebene Gerade treffen.

Man weist den 4 Geraden eine specielle Lage an und nimmt z. B. an, zwei von ihnen gehen durch einen Punkt P und die beiden anderen durch einen anderen Punkt P'; dann gibt es offenbar zwei Gerade, welche die 4 Geraden treffen und zwar die Verbindungslinie der beiden Punkte P, P' und den Schnitt der beiden Ebenen, in denen die beiden gegebenen Paare von Geraden liegen. Vermöge des obigen Princips können wir daher behaupten, *dass immer zwei Gerade existiren, welche vier gegebene Gerade treffen.* Es leuchtet auch ein, dass durch andere Specialisirung der Lage der vier Geraden (z. B. durch die Annahme, drei der Geraden liegen in einer Ebene oder gehen durch einen Punkt etc.) die gesuchte Anzahl unendlich gross werden kann.

Die Anwendungen dieses Princips, welches als Postulat anzunehmen ist, sind verschiedenartig; es wurde von Schubert klar formulirt und kann auf vier verschiedene Arten ausgesprochen werden, die sich als Corollare des Princips ansehen lassen. Siehe Schubert, *Calcül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879, p. 12 u. 334.

§ 2. Symbolischer Calcül der Bedingungen. Incidenz- und Coincidenzformeln. Sätze über die Berührungen.

Für das Thema, welches uns hier beschäftigt, ist die Einführung der folgenden Symbolik von Bedeutung.

Es sei ein Gebilde gegeben, dessen Constantenzahl c beträgt; wenn wir ihm eine Bedingung ν von der Dimension c auferlegen, so erhalten wir eine endliche Anzahl von Individuen, die ihr genügen; wir wollen diese Zahl mit demselben Buchstaben ν bezeichnen, der auch die Bedingung darstellt.

Man kann dann zwischen den Symbolen, welche die verschiedenen Bedingungen darstellen, die sich einem Gebilde auferlegen lassen, damit es auf eine *endliche* Anzahl von Arten bestimmt sei, Fundamentalbeziehungen oder -Identitäten feststellen.

Es sei z. B. p das Symbol, welches die Bedingung darstellt, unter welcher ein Punkt in einer Ebene liegt und P das Symbol für die Bedingung, dass ein Punkt in einem speciellen Ort fest liege; wir können dann offenbar symbolisch schreiben:

$$p^3 = P,$$

weil beide Terme den Zahlenwerth 1 haben.

Auf diese Art würde man nur zu Relationen zwischen Bedingungen von der Dimension c kommen; nimmt man aber einen Kunstgriff zu Hülfe, so lässt sich auch Beziehungen zwischen solchen von beliebiger Dimension $\alpha < c$ ein Sinn beilegen: Es mögen verschiedene Bedingungen von der Dimension α vorliegen; sie seien $\nu, \nu', \nu'', \ldots$ und y sei eine beliebige Bedingung von der Dimension $c - \alpha$. Multiplicirt man $\nu, \nu', \nu'', \ldots$ mit y, so ergeben sich lauter Bedingungen von der Dimension c. Nun wollen wir annehmen, es bestehe zwischen den ν eine Relation, wenn die aus der Multiplication eines jeden Terms dieser Relation mit (dem beliebigen) y sich ergebende Beziehung (die eine solche zwischen Bedingungen von der Dimension c darstellt) thatsächlich in dem oben angegebenen Sinn existirt.

Bezeichnet z. B. p_g die Bedingung, unter welcher ein Punkt auf einer Geraden liegt, so ist offenbar

$$p^2 = p_g.$$

Denn, multiplicirt man z. B. mit p, so folgt $p^3 = pp_g$, und diese Relation besteht, weil beide Seiten der Gleichung den Werth 1 haben.

Im Allgemeinen gelten für die symbolischen Gleichungen, welche man auf diese Art erhält, alle gewöhnlichen Regeln der Arithmetik über Addition, Subtraction und Multiplication.

Fundamentalrelationen sind:

$$\left.\begin{array}{l} p^2 = p_g \\ p^3 = pp_g = P \end{array}\right\}$$ *p, p_g, bez. P sind die Symbole, welche die Bedingungen darstellen, unter welchen ein Punkt in einer Ebene, auf einer Geraden, oder fest liegt;*

$$\left.\begin{aligned} e^2 &= e_g \\ e^3 &= e\,e_g = E \end{aligned}\right\}$$

e, e_g, bez. E sind die Symbole, welche die Bedingungen darstellen, die bestehen müssen, damit eine Ebene durch einen Punkt oder eine Gerade gehe oder fest liege;

$$\left.\begin{aligned} g^2 &= g_p + g_e \\ g g_p &= g_s = g g_e \\ g g_s &= G = \tfrac{1}{2} g^4 \\ G &= g_e{}^2 = g_p{}^2 \end{aligned}\right\}$$

g, g_e, g_p, g_s, bez. G sind die Symbole für die Bedingungen, die bestehen müssen, damit eine Gerade entweder eine Gerade schneide oder in einer Ebene liege oder durch einen Punkt gehe oder einem Strahlenbüschel angehöre oder fest liege).*

Punkt und Gerade, Ebene und Gerade, Punkt und Ebene heissen *incident*, wenn *sie sich gegenseitig angehören*, d. h. wenn der Punkt auf der Geraden liegt, die Gerade in der Ebene oder der Punkt in der Ebene; zwei Gerade heissen *incident*, wenn sie sich schneiden.

Incidenzformeln werden wir alle Gleichungen zwischen den Bedingungen nennen, welche diese vier Incidenzen darstellen.

Sie lauten, wenn die Symbole die oben angegebene Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned} pg &= p_g + g_e = p^2 + g_e, \\ pg_p &= p^3 + g_s, \\ pg_s &= p^2 g_p = G + p^3 g = G + p^2 g_e, \end{aligned}\right\}$$

Die Gerade g und der Punkt p gehören sich an.

$$\left.\begin{aligned} eg &= g_p + e_g = g_p + e^2, \\ eg_e &= g_s + e^3, \\ e^2 g_e &= eg_s = G + e^3 g = G + e^2 g_p, \end{aligned}\right\}$$

Die Ebene e und die Gerade g gehören sich an.

$$\left.\begin{aligned} & p^3 - p^2 e + pe^2 - e^3 = 0, \\ & p^3 e - p^2 e^2 + pe^3 = 0, \end{aligned}\right\}$$

Der Punkt p und die Ebene e gehören sich an.

$$\left.\begin{aligned} & G - g_s h + g_e h_p + g_p h_e - g h_s + H = 0, \\ & G h - g_s (h_p + h_e) + (g_p + g_e) h_s - g H = 0, \\ & G h_e - g_s h_s + g_p H = 0, \\ & G h_p - g_s h_s + g_e H = 0. \end{aligned}\right\}$$

Das Symbol h ist, wie g, das Symbol einer Geraden und die beiden Geraden g und h schneiden sich.

---

*) Diese Symbole haben Schubert in seinen weiter unten citirten Arbeiten und auch andere deutsche Autoren benutzt; sie beziehen sich auf die Anfangsbuchstaben der Worte *Gerade, Ebene, Punkt, Strahl.*

Diese Formeln kommen auf vielfache Art zur Anwendung; wir können uns dabei aber nicht aufhalten und verweisen auf das Schubert'sche Werk. Wir beschränken uns darauf, einige Beispiele anzuführen.

Es liege das einfach unendliche System aller Berührungs*geraden* und der bezüglichen Berührungs*punkte* einer Raumcurve vor; wenn man dann ein einfach unendliches System derartiger Curven betrachtet, so erhält man in der Gesammtheit ein *doppelt* unendliches System von sich angehörenden Geraden und Punkten. Für ein solches System stellt das Symbol p^2 die Bedingung dar, unter welcher einer dieser Punkte gleichzeitig in zwei gegebenen Ebenen liegt, d. h. in einer gegebenen Geraden; es stellt mithin auch die Anzahl der Curven des Systems dar, welche von einer gegebenen Geraden geschnitten werden; ebenso wird das Symbol g_e die Anzahl der *Tangenten* des Systems angeben, welche in einer gegebenen Ebene liegen, daher auch die Anzahl der Curven des Systems, die eine gegebene Ebene berühren, und pg die Anzahl der Punkte des Systems, die in einer gegebenen Ebene liegen und zugleich Geraden entsprechen, die eine andere gegebene Gerade schneiden; aus der Formel $pg = p^2 + g_e$ folgt daher das Theorem:

Es liege ein einfach unendliches System von Raumcurven vor; wenn zu der Anzahl der Curven, die eine gegebene Gerade schneiden, die Anzahl der Curven addirt wird, die eine bestimmte Ebene berühren, so erhält man als Summe die Anzahl der Curven des Systems, welche eine Ebene derart schneiden, dass die Tangenten in den Schnittpunkten eine bestimmte Gerade treffen; oder man erhält den Grad der Curve, welche der Ort der Berührungspunkte aller eine gegebene Gerade schneidenden Tangenten an die Curven des Systems ist; Zeuthen, *Compt. Rend.*, 1872.

Es sei n die Ordnung einer ebenen Curve, ν die Bedingung, unter welcher sie eine gegebene Gerade des Raums schneidet, μ die Bedingung dafür, dass ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt gehe, P diejenige, unter welcher sie selbst durch einen Punkt geht. Betrachtet man ein *doppelt* unendliches System solcher Curven, so erhält man ein dreifach unendliches System von Punkten, und die Ebenen der Curven bilden ein doppelt unendliches System von Ebenen.

Die Incidenzformel

$$p^3 - p^2 e + p e^2 - e^3 = 0$$

wird

$$P = \mu\nu - n\mu^2,$$

weil

$$p^3 = P, \quad e = \mu, \quad p^2 = \nu$$

und überdies

$$e^3 = \mu^3 = 0$$

ist, da im Allgemeinen in einem *doppelt* unendlichen System von Curven die (*dreifache*) Bedingung nicht erfüllt werden kann, dass eine Curve dieses Systems in einer willkürlich vorgeschriebenen Ebene liegen, d. h., dass die Ebene der Curve durch *drei* gegebene Punkte gehen soll.

Nun drückt die oben angegebene Relation die Bedingung P durch die beiden anderen ν und μ aus; wenn wir daher eine Tabelle hätten, aus welcher wir den Werth von $\mu\nu$ und μ^2 entnehmen könnten, so würden wir den Werth von P erhalten. So wollen wir z. B. ein doppelt unendliches System von *Kegelschnitten* im Raum und zwar speciell das System aller Kegelschnitte betrachten, die drei gegebene Ebenen berühren und drei gegebene Gerade schneiden; nennt man ϱ die Bedingung, unter welcher ein Kegelschnitt des Raums eine Ebene berührt, so lässt sich die Bedingung, welcher alle diese Kegelschnitte genügen müssen, durch $\nu^3\varrho^3$ ausdrücken. Multiplicirt man daher beide Seiten der Incidenzformel mit $\nu^3\varrho^3$, so erhält man, da im vorliegenden Fall $n = 2$ ist,

$$P\nu^3\varrho^3 = \mu\nu^4\varrho^3 - 2\mu^2\nu^3\varrho^3.$$

Aus der Tabelle, die wir weiter unten in § 4 folgen lassen, entnehmen wir:

$$\mu\nu^4\varrho^3 = 72, \quad \mu^2\nu^3\varrho^3 = 24,$$

mithin

$$P\nu^3\varrho^3 = 24,$$

d. h., *in unserem System gibt es 24 Kegelschnitte, die durch einen Punkt gehen.*

Coincident heissen zwei Elemente (zwei Punkte, zwei Gerade, zwei Ebenen), die unendlich nahe aneinander liegen.

Die bezüglichen Formeln heissen *Coincidenzformeln.* Eine von ihnen entspricht dem sogenannten *Chasles'schen Coincidenzprincip.* Siehe Kap. 1, § 2.

Wir wollen annehmen, ein *einfach* unendliches System von *Paaren* von Punkten sei derart gegeben, dass es in ihm p Paare gibt, die den ersten Punkt und [illegible] die den zweiten Punkt gemeinschaftlich haben, und es stelle g die Gerade dar, welche die beiden Punkte eines Paars verbindet und mithin auch die Anzahl der Geraden, welche Paare von Punkten verbinden und von einer *beliebigen* Geraden des Raums getroffen werden. *Bezeichnet man dann mit ε die Anzahl der Coincidenzen, d. h. die Zahl, welche angibt, wie oft die beiden Punkte eines Paars coincidiren, so ergibt sich die Formel*

$$\varepsilon = p + q - g. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wenn die Verbindungsgerade der beiden Punkte eines Paars eine feste Lage hat, so wird $g = 0$ und man erhält

$$\varepsilon = p + q.$$

Diese letztere Beziehung entspricht der Chasles'schen Correspondenzformel.

Aus der Formel (1) lassen sich verschiedene andere ableiten, z. B. die beiden folgenden:

$$\varepsilon g_p = p^3 + q^3 + g_s,$$
$$\varepsilon p = pq - g_e,$$

die auf die nachstehende Art zu interpretiren sind:

Ist ein dreifach unendliches System von Punktepaaren gegeben und man addirt die Anzahl der Paare, deren erstes Element fest liegt, die Anzahl derjenigen, deren zweites Element fest liegt, und den Grad des Liniencomplexes, welcher aus den die entsprechenden Punkte eines Paars verbindenden Geraden besteht, so ist die Summe derjenigen Zahl gleich, welche angibt, wie oft sich zwei entsprechende Punkte unbegrenzt in einer Richtung einander nähern, die durch einen beliebigen festen Punkt geht.

Bei einem doppelt unendlichen System von Punktepaaren ist die Differenz zwischen der Anzahl der Paare, deren Punkte bez. in zwei voraus bestimmten Ebenen liegen und der Anzahl der Paare, für welche die Verbindungsgerade der beiden Punkte in einer im Voraus festgesetzten Ebene liegt, der Ordnung der Raumcurve gleich, welche der Ort der Coincidenzen ist.

Es lassen sich nun die Formeln für die Ausdehnung des Chasles'schen Correspondenzprincips auf die Ebene und den Raum ableiten. Sie sind von Salmon, *Geom. of three dim.*, 2. ed., 1865, p. 511 (siehe Fiedler's Bearbeitung, 2. Thl. 2. Aufl., p. 556); Zeuthen, *Compt. Rend.*, 1874; Schubert, *Math. Ann.*, 10 angegeben worden. Siehe auch des letzteren *Calcül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879, p. 45.

Aus denselben Principien ergeben sich die folgenden wichtigen Theoreme:

Es liege ein einfach unendliches System ebener Curven und ausserdem eine Curve n^{ter} Ordnung und m^{ter} Classe vor. Wenn ν und ϱ die sogenannten beiden Charakteristiken des Systems ebener Curven sind, d. h. angeben, wie viele Curven des Systems durch einen Punkt gehen bez. eine Gerade berühren, so gibt es

$$n\varrho + m\nu$$

Curven des Systems, welche die gegebene Curve berühren.

Und ähnlich: *In einem einfach unendlichen System von Raumcurven gibt es*

$$n\varrho + m\nu$$

Curven, die eine Fläche n^{ter} Ordnung und m^{ter} Classe berühren, wenn mit ϱ die Anzahl der eine Ebene berührenden und mit ν die Anzahl der eine Gerade schneidenden Curven bezeichnet wird.

Die Berührungspunkte zweier einfach unendlicher Systeme von ebenen Curven, deren Charakteristiken bez.

$$\nu_1, \varrho_1; \quad \nu_2, \varrho_2$$

sind, bilden eine Curve von der Ordnung

$$\nu_1\varrho_2 + \varrho_1\nu_2 + \nu_1\nu_2,$$

und die Tangenten in diesen Berührungspunkten umhüllen eine Curve von der Classe

$$\nu_1\varrho_2 + \varrho_1\nu_2 + \varrho_1\varrho_2 \, .$$

Eine Verallgemeinerung des 1^{ten} Theorems lautet:

Es sei in der Ebene eine Zuordnung zwischen Punkten und Geraden von der Art festgestellt, dass jeder Geraden eine Anzahl ϱ von auf ihr liegenden Punkten und jedem Punkt eine Anzahl ν von durch ihn gehenden Geraden entspricht; es wird dann

$$n\varrho + m\nu$$

mal vorkommen, dass eine dieser Geraden in einem der ihr entsprechenden Punkte eine ebene Curve n^{ter} Ordnung und m^{ter} Classe berührt.

Dieser Satz kann zur Ableitung des Correspondenzprincips von Brill-Cayley benutzt werden (siehe Kap. 5, § 4), welches die Erweiterung des für die Correspondenzen auf der Geraden geltenden Chasles'schen Princips auf diejenigen Correspondenzen ist, die auf Curven beliebigen Geschlechts bestehen. Siehe § 18 des citirten Schubert'schen Werks.

Um die Fruchtbarkeit dieser Theoreme darzuthun und ihre Anwendung zu zeigen, wollen wir das folgende Beispiel eingehender ausführen:

Es soll zu ermitteln sein, wie viele in einer Ebene liegende Kegelschnitte 5 gegebene Kegelschnitte berühren. Bezeichnet man mit S die Bedingung, unter welcher ein Kegelschnitt eines Systems *einen anderen* festen Kegelschnitt berührt und mit μ die Bedingung, unter welcher seine Ebene durch einen Punkt geht, so ist die Bedingung dafür, dass ein Kegelschnitt des *ebenen* Systems 5 Kegelschnitte berühre, durch

$$\mu^3 S^5$$

gegeben.

Nun ist aber nach einem der vorstehenden Theoreme

$$S = n\varrho + m\nu = 2\varrho + 2\nu,$$

weil in dem vorliegenden Fall $m = n = 2$ ist; die Bedingung lautet daher:

$$\mu^3 S^5 = \mu^3(2\varrho + 2\nu)^5 = 2^5\mu^3(\varrho^5 + 5\varrho^4\nu + \\ + 10\varrho^3\nu^2 + 10\varrho^2\nu^3 + 5\varrho\nu^4 + \nu^5).$$

Aus den Tabellen in § 4 entnehmen wir dann die Werthe von $\mu^3\varrho^5$, $\mu^3\varrho^4\nu$, etc. und erhalten schliesslich

$$\mu^3 S^5 = 2^5 \cdot 102 = 3264$$

als die Anzahl der Kegelschnitte eines ebenen Systems, die 5 gegebene Kegelschnitte berühren.

§ 3. Die Charakteristikentheorie.

Man habe in einer Ebene ein einfach unendliches System von Kegelschnitten; es sei z eine Bedingung 1ter Dimension (eine einfache), und ν bez. ϱ mögen die Bedingungen darstellen, unter denen ein Kegelschnitt des Systems durch einen Punkt geht bez. eine Gerade berührt.

Die Charakteristikentheorie beruht auf dem nachstehenden Satz von Chasles, der zwar von Chasles als allgemein giltig hingestellt wurde, der aber, wie man später in Folge der Untersuchungen von Halphen einsah, nicht für alle Fälle gilt.

Die Bedingung z lässt sich (wie Halphen zeigte, nicht allgemein, sondern nur in vielen Fällen) linear durch ν und ϱ mittelst der Formel

$$z = \alpha\nu + \beta\varrho$$

ausdrücken, worin α, β nur von der Bedingung z abhängige Zahlen sind. Die Zahlen ν, ϱ heissen Charakteristiken des *Kegelschnittsystems.*

Dieses Theorem, welches eine wichtige Formel der abzählenden Geometrie der Kegelschnitte enthält, wurde durch Versuche von Chasles, *Compt. Rend.*, 1864 aufgefunden, ohne Beweis formulirt und zu verschiedenen Anwendungen benutzt.

Bewiesen wurde es von Clebsch, *Math. Ann.*, 6; Halphen, *Bull. Soc. math.*, 1; Schubert und Hurwitz, *Gött. Nachr.*, 1876; Schubert, *Abz. Geom.*, § 38; Brill, *Math. Ann.*, 10; etc.

Das Chasles'sche Theorem gilt jedoch nicht für jede Bedingung z, wie Halphen nachwies, *Compt. Rend.*, 83, p. 537 und 886; *Proc. Lond. math. Soc.*, 9, 10; *Math. Ann.*, 15; *Journ. de l'Éc. pol.*, 45; er machte zu dem Theorem den Zusatz:

Damit das Chasles'sche Theorem giltig sei, d. h., damit sich z durch die Formel

$$z = \alpha\nu + \beta\varrho$$

ausdrücken lasse, worin α und β nur von z abhängen, ist es nöthig und ausreichend, dass die Anzahl der Kegelschnitte, welche der Bedingung z genügen und eine Berührung 3^{ter} Ordnung mit einer gegebenen Curve haben, $\alpha + \beta$ sei.

Andererseits hat Study in seiner Habilitationsschrift (Leipzig 1885, *Math. Ann.*, 26) nachgewiesen, dass, von einem gewissen Standpunkt aus betrachtet, der Chasles'sche Satz als allgemein giltig angesehen werden kann.

Aus dem Chasles'schen Theorem folgt ein Corollar zu einem von uns schon in § 2 mitgetheilten Satz über die Anzahl der Berührungscurven an gegebene Curven:

Wenn man die Anzahl der Kegelschnitte eines Systems zu kennen wünscht, welche eine Curve n^{ter} Ordnung und m^{ter} Classe berühren, so genügt dazu, in der Chasles'schen Formel

$$\alpha = m, \quad \beta = n$$

zu setzen.

Man kann auch ein allgemeineres Problem, als das Chasles'sche, aufstellen:

Wenn ein System von beliebigen Gebilden (nicht von Kegelschnitten allein) gegeben ist, das nicht nur einfach unendlich, sondern k-fach unendlich ist, existirt dann eine *endliche* Anzahl von k-fachen Bedingungen der Art, dass jede andere k-fache Bedingung z sich linear und mit nur von der Bedingung z abhängigen Coefficienten durch sie ausdrücken lässt? Diese k-fachen Bedingungen, *deren Anzahl endlich ist*, kann man dann die *Charakteristiken* des Systems nennen.

An diesem Problem hat man sich vielfach versucht; Chasles meinte einmal, die beiden Charakteristiken ν und ϱ könnten nicht nur für die Kegelschnitte, sondern für jede Plancurve gelten. Halphen dehnte die Betrachtungen dieser Art auch auf die Kegelschnitte des Raums und die Flächen zweiter Ordnung aus; *Bull. Soc. math.*, 2. Cremona bemerkte, dass sich für ein doppelt unendliches System von Kegelschnitten *drei* Charakteristiken aufstellen lassen; nämlich die Anzahl der durch 2 Punkte gehenden Kegelschnitte, die Anzahl derjenigen, die durch einen Punkt gehen und eine Gerade berühren, und die Anzahl der Kegelschnitte, die zwei Gerade berühren, *Compt. Rend.*, 69, p. 776. Schubert widmete diesem Problem ein ganzes Kapitel seiner citirten Arbeit und machte den Versuch, es für gewisse einfache Systeme von Gebilden zu lösen.

Die ersten Arbeiten über die Charakteristikentheorie sind die sehr zahlreichen Aufsätze von Chasles (z. B. *Compt. Rend.*, 1864; speciell der vom 27. Juni 1864), welche zum Theil Veranlassung zu einer Polemik mit De Jonquières gaben; ein Verzeichniss der sich hierauf beziehenden Schriften findet man bei Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geom.*, Torino 1896, p. 263, 264, deutsche Ausg., p. 65 u. ff.

Andere Arbeiten sind von Cayley, namentlich in den *Phil. Trans.*, 1868; Salmon, *An. Geom. der höheren ebenen Curven*, deutsch von Fiedler, 2. Aufl., Leipzig 1882; Cremona, *Compt. Rend.*, 1864 (siehe auch seine *Introd. ad una teoria geom. delle curve piane*, Bologna 1862, auch in den *Mem. Acc. Bologna*, 12, 1861, deutsch von M. Curtze, 1865); Zeuthen, unter Anderem *Bull. des sciences math.*, 7. Eine kurze Darstellung findet man in der Clebsch-Lindemann'schen *Geometrie* und viele Literaturnachweise, die sich jedoch nur bis 1872 erstrecken, bei Painvin, *Bull. des sciences math.*, 3.

Ueber die neueste Literatur sehe man Loria, l. c. nach, wo auch die lange Reihe der übrigen Aufsätze von Chasles, *Compt. Rend.*, 1871—1877 über die zahlreichen Anwendungen des nach ihm benannten Correspondenzprincips auf die abzählende Geometrie aufgezählt wird. Die Geschichte dieses Princips, welches seiner Natur nach so eng mit den Theorien der abzählenden Geometrie verbunden ist, findet man in einem historischen Aufsatz von Segre, *Bibl. math.*, 1892.

Man kann sagen, dass die abzählende Geometrie als Lehrkörper mit der Charakteristikentheorie von Chasles entstanden sei.

Es war Halphen, der, von der Charakteristikentheorie ausgehend, den symbolischen Calcül der Bedingungen einführte, welcher dann hauptsächlich von Schubert fortgesetzt wurde. Der letztere legte systematisch die Grundlagen dazu in seinen *Beiträgen zur abzählenden Geometrie, Math. Ann.*, 10 und anderen darauf folgenden Arbeiten, ib., 11, 12, etc.

Viele Resultate und Bestimmungen in Bezug auf die abzählende Geometrie wurden schon früher von verschiedenen Autoren insbesondere auf geometrischem Weg gefunden, wie z. B. von Steiner, *Crelle,* 32, 37, 45, 55; Bischoff, ib., 56; De Jonquières, *Journ. de Liouville,* 6, 1861; 10, 1865; ein Theil der Resultate, zu denen sie kamen, ist jedoch fehlerhaft. Der Zweck der Autoren, die sich später mit der abzählenden Geometrie beschäftigt haben, bestand hauptsächlich darin, derartige Bestimmungen auf feste Gesetze zurückzuführen, eine Rechnung für sie einzurichten und mit deren Hülfe diesen Theil der Geometrie zu einem systematischen Ganzen zu machen.

Ein wichtiges Buch, in welchem man alle Methoden und Resultate der abzählenden Geometrie zusammengestellt und erklärt findet, ist von Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie,* Leipzig 1879, das wir bei der Bearbeitung dieses Kapitels vielfach benutzt haben.

Neuere Forschungen sind insbesondere von demselben Autor Schubert, *Math. Ann.*, 26, 38, 45; *Acta math.*, 8; *Hamburger Mitth.*, 1, 2, 3, etc. und von Pieri, *Rend. Palermo*, 5; *Rend. Ist. Lomb.*, 1893—1895.

§ 4. Methode zur Ermittelung der charakteristischen Zahlen eines Systems von Gebilden. Uebersicht über verschiedene wichtige Resultate der abzählenden Geometrie.

Aus unseren obigen Betrachtungen geht hervor, dass durch das Rechnen mit Bedingungssymbolen sich der Calcül mit einer Bedingung auf den mit anderen reduciren lässt; die Charakteristikentheorie hat z. B. gerade den Zweck, zu ermitteln, ob gewisse elementare Bedingungen bestehen, mit deren Hülfe sich alle übrigen ausdrücken lassen.

Man kann nun fragen, ob es nicht möglich sei, Zahlen aufzufinden, die diese elementaren Bedingungen oder Charakteristiken darstellen würden und mit deren Hülfe sich vielleicht die übrigen oder doch ein Theil von ihnen ausdrücken lassen. Diese Ermittelung geschieht mittelst einer von Chasles eingeführten und von Zeuthen, Schubert und Anderen vielfach angewendeten und weiter entwickelten Methode:

Man betrachtet specielle invariante Ausartungen des gegebenen Gebildes, sucht die Relationen auf, welche die Bedingungen dafür, dass das Gebilde auf die gegebene Art degenerire, mit den übrigen elementaren Bedingungen (unter denen es durch einen Punkt geht, eine Ebene, oder eine Gerade berührt) verbinden, leitet daraus die charakteristischen Zahlen für die ausgearteten Gebilde ab und erhält schliesslich mit Hülfe der gefundenen Relationen die Zahlen für die allgemeinen Gebilde.

Ein Beispiel wird genügen, die Anwendung dieser Methode zu erläutern.

Das gegebene Gebilde sei ein Kegelschnitt. Man betrachte zwei invariante Ausartungen desselben, nämlich

η — einen Kegelschnitt, dessen Punkte eine Doppelgerade und dessen Tangenten zwei verschiedene Strahlenbüschel bilden, deren Centren in zwei Punkten der Doppelgeraden liegen;

δ — einen Kegelschnitt, dessen Punkte zwei verschiedene Gerade und dessen Tangenten zwei zusammenfallende Strahlenbüschel bilden, deren Centrum in dem Schnittpunkt der beiden Geraden liegt.

Bezeichnet man mit η bez. δ die Bedingungen, unter welchen ein Kegelschnitt auf diese beiden Arten degenerirt, und mit μ, ν, ϱ die Bedingungen dafür, dass die Ebene eines Kegelschnitts durch einen Punkt gehe, der Kegelschnitt eine Gerade schneide, bez. eine gegebene Ebene berühre, so findet man mittelst des Princips der Coincidenzen die Relationen:

$$2\nu - \varrho - 2\mu = \eta,$$
$$2\varrho - \nu = \delta,$$

woraus

$$\nu = \tfrac{2}{3}\eta + \tfrac{1}{3}\delta + \tfrac{4}{3}\mu,$$
$$\varrho = \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{2}{3}\delta + \tfrac{2}{3}\mu$$

folgt.

Es soll nun die Zahl

$$\mu^3 \nu \varrho^4$$

zu ermitteln sein, d. h., die Anzahl der Kegelschnitte einer Ebene, welche durch einen Punkt gehen, also eine Gerade des Raums schneiden, und vier Gerade der Ebene, mithin vier Ebenen des Raums berühren; aus den vorstehenden Formeln ergibt sich:

$$\mu^3 \nu \varrho^4 = \tfrac{2}{3} \eta \mu^3 \varrho^4 + \tfrac{1}{3} \delta \mu^3 \varrho^4 + \tfrac{4}{3} \mu^4 \varrho^4 .$$

Nun ist das Glied, welches den Factor μ^4 enthält, Null, weil man eine Ebene durch 4 beliebige Punkte des Raums nicht legen kann; würde man daher die beiden anderen Glieder der rechten Seite kennen, so wäre auch der Werth der linken Seite bekannt. Offenbar gibt es nun in einer Ebene (μ^3) drei Kegelschnitte η, die vier gegebene Gerade zu Tangenten haben; die Anzahl der Kegelschnitte δ aber, die vier gegebene Gerade berühren, ist Null; man erhält also:

$$\mu^3 \nu \varrho^4 = 2 .$$

Um einen Begriff von den Resultaten zu geben, welche sich aus den bisher entwickelten Methoden und Principien ableiten lassen, wollen wir hier einige Hauptergebnisse zusammenstellen, auch der Bedeutung wegen, die sie an sich und unabhängig von den Methoden haben, mit deren Hülfe sie gefunden wurden.

Die wichtigsten in dem 4ten Kap. des citirten Werks von Schubert enthaltenen Sätze lauten:

1. *Es gibt zwei Gerade, die 4 gegebene Gerade treffen.*

2. *Es gibt drei windschiefe Polygone von n Seiten, deren n Ecken in gegebenen Ebenen liegen und deren n Seiten durch gegebene Punkte gehen.*

3. *Wenn im Raum fünf Paare von Geraden gegeben sind, so lassen sich auf 20 verschiedene Arten fünf in einer Ebene liegende und in einem Punkt zusammenlaufende Strahlen derart ziehen, dass jeder der Strahlen die 2 Geraden eines der gegebenen Paare trifft.*

4. *Ein Kegelschnitt liege vor; μ sei die Bedingung dafür, dass seine Ebene durch einen gegebenen Punkt gehe, ν, dass er eine gegebene Gerade schneide, ϱ die Bedingung, unter welcher er eine gegebene Ebene berührt. Benutzt man nun dieselben Bezeichnungen, wie in den vorigen Paragraphen, so erhält man die folgende Tabelle für die Anzahl der Kegelschnitte des Raums, die acht Bedingungen genügen*):*

---

*) Der leichteren Uebersicht wegen wollen wir hier nochmals die Bedeutung der Symbole in dieser Tabelle

$\mu^3\nu^5 = 1$	$\mu^2\nu^6 = 8$	$\mu\nu^7 = 34$	$\nu^8 = 92$
$\mu^3\nu^4\varrho = 2$	$\mu^2\nu^5\varrho = 14$	$\mu\nu^6\varrho = 52$	$\nu^7\varrho = 116$
$\mu^3\nu^3\varrho^2 = 4$	$\mu^2\nu^4\varrho^2 = 24$	$\mu\nu^5\varrho^2 = 76$	$\nu^6\varrho^2 = 128$
$\mu^3\nu^2\varrho^3 = 4$	$\mu^2\nu^3\varrho^3 = 24$	$\mu\nu^4\varrho^3 = 72$	$\nu^5\varrho^3 = 104$
$\mu^3\nu\varrho^4 = 2$	$\mu^2\nu^2\varrho^4 = 16$	$\mu\nu^3\varrho^4 = 48$	$\nu^4\varrho^4 = 64$
$\mu^3\varrho^5 = 1$	$\mu^2\nu\varrho^5 = 8$	$\mu\nu^2\varrho^5 = 24$	$\nu^3\varrho^5 = 32$
	$\mu^2\varrho^6 = 4$	$\mu\nu\varrho^6 = 12$	$\nu^2\varrho^6 = 16$
		$\mu\varrho^7 = 6$	$\nu\varrho^7 = 8$
			$\varrho^8 = 4$

5. *Es existiren in jeder gegebenen Ebene 3264 Kegelschnitte, welche fünf andere gegebene Kegelschnitte berühren.*

Bei der Berechnung dieser Zahl machte Steiner Fehler; er fand den Werth 6^5; genau ermittelten die Zahl zuerst Chasles und Th. Berent.

6. *Es stelle μ die Bedingung dafür dar, dass eine Fläche 2ten Grads durch einen gegebenen Punkt gehe, ϱ, dass sie eine Ebene berühre, und ν, dass sie eine Gerade berühre; man erhält dann die folgende Tabelle für die Anzahl der Flächen 2ten Grads des Raums, die neun Bedingungen erfüllen:*

$\mu^9 = \varrho^9 = 1$	$\nu^2\mu^7 = \nu^2\varrho^7 = 4$	$\nu^4\mu^3\varrho^2 = \nu^4\mu^2\varrho^3 = 112$
$\mu^8\varrho = \mu\varrho^8 = 3$	$\nu^2\mu^6\varrho = \nu^2\mu\varrho^6 = 12$	$\nu^5\mu^4 = \nu^5\varrho^4 = 32$
$\mu^7\varrho^2 = \mu^2\varrho^7 = 9$	$\nu^2\mu^5\varrho^2 = \nu^2\mu^2\varrho^5 = 36$	$\nu^5\mu^3\varrho = \nu^5\mu\varrho^3 = 80$
$\mu^6\varrho^3 = \mu^3\varrho^6 = 17$	$\nu^2\mu^4\varrho^3 = \nu^2\mu^3\varrho^4 = 68$	$\nu^5\mu^2\varrho^2 = 128$
$\mu^5\varrho^4 = \mu^4\varrho^5 = 21$	$\nu^3\mu^6 = \nu^3\varrho^6 = 8$	$\nu^6\mu^3 = \nu^6\varrho^3 = 56$
$\nu\mu^8 = \nu\varrho^8 = 2$	$\nu^3\mu^5\varrho = \nu^3\mu\varrho^5 = 24$	$\nu^6\mu^2\varrho = \nu^6\mu\varrho^2 = 104$
$\nu\mu^7\varrho = \nu\mu\varrho^7 = 6$	$\nu^3\mu^4\varrho^2 = \nu^3\mu^2\varrho^4 = 72$	$\nu^7\mu^2 = \nu^7\varrho^2 = 80$
$\nu\mu^6\varrho^2 = \nu\mu^2\varrho^6 = 18$	$\nu^3\mu^3\varrho^3 = 104$	$\nu^7\mu\varrho = 104$
$\nu\mu^5\varrho^3 = \nu\mu^3\varrho^5 = 34$	$\nu^4\mu^5 = \nu^4\varrho^5 = 16$	$\nu^8\mu = \nu^8\varrho = 92$
$\nu\mu^4\varrho^4 = 42$	$\nu^4\mu^4\varrho = \nu^4\mu\varrho^4 = 48$	$\nu^9 = 92$

Das Symbol $\mu^3\nu^5$ zeigt an, dass die Ebene des Kegelschnitts durch drei gegebene Punkte gehen soll (mithin gegeben ist) und der Kegelschnitt fünf (im Raum) gegebene Gerade schneiden soll; das Symbol $\mu^3\nu^4\varrho$ bedeutet, dass der Kegelschnitt in einer gegebenen Ebene liegen, vier gegebene Gerade schneiden (mithin durch vier in seiner Ebene liegende gegebene Punkte gehen) und eine gegebene Ebene (mithin eine in seiner Ebene liegende gegebene Gerade) berühren soll.

[illegible] Zahlen [illegible]. [illegible] Bedingungen für die [illegible] Flächen 2ten Grades [illegible]; zu diesem Zweck drückt man [illegible] Bedingungen [illegible] § 2 [illegible] durch a, ν, ϱ aus und [illegible] Zahlenwerth eines jeden Terms [illegible] Grades [illegible] in § 2 [illegible] Beispiel.

7. [illegible] F [illegible] 2ten Grades, die [illegible] F [illegible] 2ten Grades [illegible]

8. [illegible] Plancurve [illegible] gegebenen Ebene liege vor; [illegible] durch einen Punkt geht, und ϱ, [illegible]; man erhält dann die folgenden Zahlen:

Wenn [illegible] Curve 3ter Ordnung [illegible], d. h. 6ter Classe, ist:

$$\nu^9 = 1, \quad \nu^8\varrho = 4, \quad \nu^7\varrho^2 = 16, \quad \nu^6\varrho^3 = 64,$$
$$\nu^5\varrho^4 = 256, \quad \nu^4\varrho^5 = 976, \quad \nu^3\varrho^6 = 3424, \quad \nu^2\varrho^7 = 9766,$$
$$\nu\varrho^8 = 21004, \quad \varrho^9 = 33616.$$

Wenn die Curve 3ter Ordnung einen Doppelpunkt haben, d. h. 4ter Classe sein soll:

$$\nu^8 = 12, \quad \nu^7\varrho = 36, \quad \nu^6\varrho^2 = 100,$$
$$\nu^5\varrho^3 = 240, \quad \nu^4\varrho^4 = 480, \quad \nu^3\varrho^5 = 712,$$
$$\nu^2\varrho^6 = 756, \quad \nu\varrho^7 = 600, \quad \varrho^8 = 400.$$

Soll schliesslich die Curve eine Spitze haben, also 3ter Classe sein:

$$\nu^7 = 24, \quad \nu^6\varrho = 60, \quad \nu^5\varrho^2 = 114,$$
$$\nu^4\varrho^3 = 168, \quad \nu^3\varrho^4 = 168, \quad \nu^2\varrho^5 = 114,$$
$$\nu\varrho^6 = 60, \quad \varrho^7 = 24.$$

Die Zahlen für die cubischen Plancurven wurden von Maillard de la Gournerie berechnet, *Rech. des caractéristiques des systèmes élém. de courbes planes du 3me ordre, Thèse,* Paris 1871, dessen Resultate in dem *Bull. de Darboux,* 3, 1872, p. 161 wieder abgedruckt sind, später von Zeuthen, *Compt. Rend.,* 1872 und von Schubert, *Gött. Nachr.,* 1874, 1875; *Math. Ann.* 13.

9. *Für eine Plancurve 4ter Ordnung, 12ter Classe in einer gegebenen Ebene gilt, wenn ν und ϱ dieselben Bedingungen, wie vorher, bezeichnen, die Tabelle:*

$\nu^{14}=1$,	$\nu^{13}\varrho=6$,	$\nu^{12}\varrho^2=36$,
$\nu^{11}\varrho^3=216$,	$\nu^{10}\varrho^4=1296$,	$\nu^9\varrho^5=7776$,
$\nu^8\varrho^6=46\,656$,	$\nu^7\varrho^7=279\,600$,	$\nu^6\varrho^8=1\,668\,096$,
$\nu^5\varrho^9=9\,840\,040$	$\nu^4\varrho^{10}=56\,481\,396$,	$\nu^3\varrho^{11}=308\,389\,896$,
$\nu^2\varrho^{12}=1\,530\,345\,504$,	$\nu\varrho^{13}=6\,533\,946\,576$,	$\varrho^{14}=23\,011\,191\,144$.

Diese Zahlen, sowie viele andere, die sich auf specielle Flächen 4[ter] Ordnung (mit doppelten, dreifachen Punkten, mit Spitzen etc.) beziehen, berechnete Zeuthen, *Compt. Rend.*, 1872; *Kopenhagener Acad.*, 1873. In dem Schubert'schen Werk sind die Resultate Zeuthen's angegeben.

10. *Für eine cubische Raumcurve sei P die Bedingung, dass sie durch einen Punkt gehe, T, dass sie eine Gerade berühre, ν, eine Gerade schneide, ϱ, eine Ebene berühre, B die Bedingung dafür, dass sie eine gegebene Gerade in zwei Punkten schneide. Man erhält dann die Tabelle:*

$$\nu^{12}=80\,160, \quad \varrho^{12}=56\,960,$$

$P^5\nu^2 = 5$,	$P^5\nu\varrho = 10$,	$P^5\varrho^2 = 20$,	
$P^4\nu^4 = 30$,	$P^4\nu^3\varrho = 60$,	$P^4\nu\varrho^3 = 240$,	
$P^4T\nu = 4$,	$P^4T\varrho = 8$,		
$PT^3\nu = 12$,	$PT^3\varrho = 12$,		
$T^2\varrho^6 = 608$,	$T^3\nu^3 = 120$,	$T^3\nu^2\varrho = 120$,	
$P^3B^3 = 1$,	$P^2B^4 = 1$,	$PB^5 = 1$,	$B^6 = 6$,
$P^3B^2\nu^2 = 4$,	$P^2B^3\nu^2 = 6$,	$PB^4\nu^2 = 9$,	$B^5\nu^2 = 20$,
$P^3B^2\nu\varrho = 8$,	$P^2B^3\nu\varrho = 12$,	$PB^4\nu\varrho = 18$,	$B^5\nu\varrho = 40$.

Zu vielen anderen ähnlichen Zahlenbestimmungen kommt man durch Einführung anderer Bedingungen. Schubert, l. c., § 25 hat eine grosse Anzahl zusammengestellt. Solche Berechnungen für cubische Raumcurven wurden von Cremona, *Crelle*, 60, Bestimmungen auf geometrischem Weg von R. Sturm, *Crelle*, 79, 80 und auch von Schubert ausgeführt.

Weitere Zahlenangaben in Bezug auf die linearen Strahlencongruenzen, die projectiven Strahlen- und Ebenenbüschel etc. findet man in dem wiederholt citirten Werk von Schubert.

Kapitel XVI.

Infinitesimaltheorie der Curven und Flächen.

§ 1. Tangenten und Normalen an Curven und Flächen.

Die *Tangente an eine (Plan- oder Raum-) Curve* in einem Punkt P der Curve (dem Berührungspunkt) ist die Grenzlage einer variabelen Geraden, die durch den Punkt P und einen anderen demselben Zweig der Curve angehörigen Punkt P' geht, wenn P' mit P zusammenzufallen strebt.

Die *Normale zu einer Plancurve* in einem Punkt P ist die Gerade, welche in P senkrecht auf der Tangente in P steht.

Die Gleichungen für die Tangente und die Normale an eine Plancurve lauten,

wenn die Gleichung der Curve

$$y = f(x) \quad \textit{ist:}$$

für die Tangente: $Y - y = \dfrac{dy}{dx}(X - x)$,

für die Normale: $\dfrac{dy}{dx}(Y - y) = -(X - x)$,

wobei x, y die Coordinaten des Berührungspunkts und X, Y die laufenden Coordinaten sind;

ist dagegen die Gleichung der Curve

$$\varphi(x, y) = 0,$$

für die Tangente: $(X - x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + (Y - y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$,

für die Normale: $(X - x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - (Y - y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$;

ist schliesslich die Curve durch die beiden Gleichungen

$$x = \psi(t), \quad y = \chi(t)$$

gegeben, so lauten die Gleichungen

für die Tangente: $(Y - y)\frac{d\psi}{dt} - (X - x)\frac{d\chi}{dt} = 0$

und die Normale: $(Y - y)\frac{d\chi}{dt} + (X - x)\frac{d\psi}{dt} = 0.$

Bezeichnet man mit θ, θ' die Winkel, welche die Tangente und die Normale mit der x-Axe bilden, *so erhält man,* wenn $y' = \frac{dy}{dx}$ gesetzt wird:

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \cos\theta' = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\sin\theta = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \sin\theta' = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Das Vorzeichen dieser Formeln hängt von dem Uebereinkommen ab, das man in Bezug auf die positive Richtung der Tangenten und Normalen trifft.

Die Länge der Tangente und *die Länge der Normalen* heissen die Längen der von dem Punkt P der Curve und der x-Axe begrenzten Segmente der Tangente bez. der Normalen.

Subtangente und *Subnormale* werden die Längen der auf der x-Axe liegenden Segmente genannt, die von dem Fusspunkt des von dem Curvenpunkt P auf die x-Axe gefällten Loths und den Punkten begrenzt werden, in denen die Tangente bez. die Normale die x-Axe treffen.

Es gelten nun die Formeln:

T = Länge der Tangente $= \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}$,

N = Länge der Normalen $= y\sqrt{1+y'^2}$,

S_t = Subtangente $= \frac{y}{y'}$,

S_n = Subnormale $= yy'$.

Polarsubtangente bez. *Polarsubnormale* heissen die Theile der Tangente bez. Normalen, die zwischen dem Curvenpunkt und dem Punkt liegen, in welchem sie von dem im Pol auf den Radiusvector errichteten Loth getroffen werden.

Asymptote einer Plancurve ist die Gerade, welche die Grenzlage der Tangente an die Curve darstellt, wenn der Berührungspunkt sich unbegrenzt auf einem Zweig der Curve in das Unendliche entfernt.

Die Gleichung der Asymptote ist

$$Y - AX - B = 0,$$

worin

$$A = \lim \frac{dy}{dx},$$

$$B = \lim \left(y - \frac{dy}{dx} x\right)$$

ist, und diese Grenzen in dem Sinn zu nehmen sind, dass die Coordinaten x, y des Curvenpunkts den Coordinaten des unendlich fernen Punkts der Curve zustreben sollen.

Die Gleichungen der Tangente an eine Raumcurve lauten, *wenn die Raumcurve durch*

$$y = \varphi(x)$$

$$z = \psi(x),$$

gegeben ist:

$$(Y - y) = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

$$(Z - z) = \frac{dz}{dx}(X - x),$$

oder symmetrischer:

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

und, wenn die Curve durch die Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

gegeben ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

Normalebene einer Raumcurve in einem Punkt P heisst die Ebene, welche auf der in P an die Curve gelegten Tangente senkrecht steht und durch den Berührungspunkt geht.

Die Gleichung der Normalebene hat eine der beiden folgenden Formen:

$$(X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Richtungscosinus der Tangente sind:

$$\cos\alpha = \cos(t, x) = \frac{dx}{ds}, \quad \left(ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\right),$$

$$\cos\beta = \cos(t, y) = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos\gamma = \cos(t, z) = \frac{dz}{ds},$$

wenn mit (t, x), (t, y), (t, z) die Winkel zwischen der Tangente t und den Axen x, y, z bezeichnet werden.

Wenn P ein Punkt einer Fläche ist und alle möglichen auf dieser Fläche liegenden Raumcurven durch ihn gezogen werden, so liegen die in P an alle diese Curven gezogenen Tangenten sämmtlich in einer Ebene, der Tangentialebene an die Fläche.

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $f(x, y, z) = 0$ lautet:

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Die durch P gehende Gerade, welche senkrecht auf der Tangentialebene an die Fläche in P steht, heisst *die Flächennormale.*

Die Gleichungen der Flächennormalen sind:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

und die Richtungscosinus der Flächennormalen:

$$\cos(n, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos(n, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos(n, z) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$z = \varphi(x, y)$$

gegeben ist, und wenn

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

gesetzt wird, so lauten die Gleichungen der Flächennormalen:

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1},$$

und die Richtungscosinus sind:

$$\cos(n, x) = \pm \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos(n, y) = \pm \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos(n, z) = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

§ 2. Concavität und Convexität der ebenen Curven. Inflexion.

Es sei P ein Punkt einer Plancurve, deren Gleichung $y = f(x)$ lautet, und x_0 sei seine Abscisse; wenn eine Zahl k von der Beschaffenheit existirt, dass alle Punkte mit der Abscisse $x_0 \pm h$ (worin $h < k$ ist), einen Bogen bilden, der auf einer und derselben Seite der Tangente an die Curve in P liegt, so sagt man, die Curve sei in P *convex* oder *concav*; existirt keine solche Zahl k, so ist die Curve in P weder convex noch concav, sondern besitzt daselbst einen *Inflexionspunkt* oder *Wendepunkt.*

Die Curve heisst ferner in P *convex* bez. *concav in Bezug auf die x-Axe*, wenn alle Punkte mit der Abscisse $x_0 \pm h$ in dem stumpfen bez. spitzen Winkel liegen, welchen die Tangente an die Curve in P mit der x-Axe bildet.

Damit eine Curve in einem Punkt convex oder concav sei, ist es nöthig und ausreichend, dass, wenn $y', y'', y''', \ldots, y^{(m)}$ die Derivirten von y nach x sind, die in dem Punkt x_0 Null *werden, und wenn* $y^{(m+1)}$ *die erste der Derivirten ist, welche in* x_0 *nicht verschwinden, die Ordnung* m *eine ungerade Zahl sei.*

In diesem Fall ist die Curve convex oder concav in Bezug auf die x*-Axe, je nachdem das Product*

$$f(x_0)f^{(m+1)}(x_0)$$

positiv oder negativ ist.

Damit der Punkt P *mit der Abscisse* x_0 *ein Inflexionspunkt der Curve sei, ist es nöthig, dass für* $x = x_0$ *die zweite Derivirte* $f''(x)$ *verschwinde, d. h. die Inflexionspunkte sind in der Zahl derjenigen Punkte enthalten, deren Abscissen die zweite Derivirte von* y *nach* x *annulliren.*

§ 3. Inhalt ebener Flächen, Länge der Curvenbogen, Volumina von Körpern und Inhalt beliebiger Flächen.

Es sei eine ebene Curve gegeben, deren auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Gleichung $y = f(x)$ lautet, und man betrachte einen Theil der Curve von $x = \alpha$ bis $x = \beta$, der von den betreffenden Parallelen zur y-Axe *nur einmal* getroffen wird.

Man ziehe die beiden Ordinaten in den Endpunkten, deren Abscissen α und β sind; der Inhalt des von dem Curvenbogen, der x-Axe und den beiden Endordinaten begrenzten Ebenenstücks wird auf die folgende Art bestimmt:

Man zerlege das Intervall von α *bis* β *in eine beliebige Anzahl von Theilen*

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$$

und ziehe von den Theilungspunkten aus die Ordinaten bis zur Curve; zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten wird ein kleiner Curvenbogen enthalten sein, auf dem ein beliebiger Punkt P *angenommen wird; es sei* x_r *die Abscisse des Punktes* P*, der auf dem kleinen dem Intervall* δ_r *entsprechenden Bogen gewählt wurde. Das Product* $\delta_r f(x_r)$ *ist der Inhalt des Rechtecks, dessen Basis* δ_r *und dessen Höhe die Ordinate des Punktes* P *ist.*

Die Grenze der Summirung

$$\sum_{r=1}^{n} \delta_r f(x_r)$$

bestimmt, wenn man die Theilintervalle δ_r *an Grösse unbegrenzt abnehmen und mithin ihre Anzahl* n *ins Unendliche wachsen* *lässt, den Inhalt der ebenen zwischen der Curve und Abscissenaxe enthaltenen Fläche.*

Analytisch wird dieser Flächeninhalt durch die Formel

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

ausgedrückt. Siehe Bd. 1, Kap. 7.

Jede beliebige von ebenen Curven eingeschlossene ebene Fläche lässt sich immer aus ebenen Flächen der angegebenen Art zusammensetzen, d. h. solchen, die von Curvenbogen und der x-Axe begrenzt sind.

Man führe die Zerlegung des Intervalls, wie oben, aus, ziehe die Tangente an die Curve in dem Punkt der Curve, dessen Abscisse x_r ist, und ebenso in allen analogen Punkten, und betrachte das Segment der Tangente, welches von den beiden durch die Endpunkte des Intervalls δ_r gehenden Ordinaten bestimmt wird.

Die *Länge des Curvenbogens* oder einfach der *Curvenbogen* wird als *die Grenze der Summe aller dieser Tangentensegmente für* $n = \infty$ definirt.

Der analytische Ausdruck für den ebenen Curvenbogen lautet:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Nennt man den Curvenbogen s, so gilt die Differentialbeziehung:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Bezeichnet θ den Winkel, welchen die Tangente in einem Punkt der Curve mit der x-Axe bildet, so ist:

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds},$$

$$\sin\theta = \frac{dy}{ds}.$$

Wir definiren nun die Länge des Bogens einer Raumcurve.

Es seien $y = \varphi(x)$ und $z = \psi(x)$ die Gleichungen der Raumcurve; wir wollen den Theil der Curve betrachten, der von einem Punkt mit der Abscisse $x = \alpha$ bis zu einem Punkt mit der Abscisse $x = \beta$ reicht, und annehmen, dieser Theil sei so beschaffen, dass jede Ebene, deren Abscisse zwischen α und β liegt, und welche auf der x-Axe senkrecht steht, ihn nur in einem Punkt treffe.

Wir theilen das Stück der x-Axe von $x = \alpha$ bis $x = \beta$, wie früher, in Theilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ und legen durch die Theilpunkte auf der x-Axe senkrechte Ebenen, welche den totalen Bogen der Curve in ebensoviele Theilbogen zerlegen; in jedem dieser Theilbogen, z. B. in demjenigen, der sich in δ_r projicirt, wählen wir einen Punkt, ziehen in ihm die Tangente an die Curve und betrachten das Stück dieser Tangente, welches von den durch die Endpunkte des Segments δ_r gehenden Ebenen begrenzt wird.

Die Grenze der Summe aller dieser Tangentenstücke, wenn die Intervalle δ_r an Grösse unbegrenzt abnehmen, ist die Länge des Raumcurvenbogens.

Der analytische Ausdruck für den Curvenbogen ist:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx,$$

worin

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ist; bezeichnet man mit (t, x), (t, y), (t, z) die Richtungswinkel der Tangente, so erhält man die Formeln (vergl. § 1):

$$\cos(t, x) = \frac{dx}{ds},$$

$$\cos(t, y) = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos(t, z) = \frac{dz}{ds}.$$

Wir gehen nun zu der Bestimmung der Volumina und des Inhalts beliebiger Flächen über.

Wir wollen den endlichen Theil einer von einer geschlossenen Linie (dem Rand) begrenzten Fläche betrachten; dieser Rand projicire sich auf die xy-Ebene in eine ebene geschlossene Linie φ und es werde angenommen, die sämmtlichen Geraden, welche durch die Punkte der von φ eingeschlossenen ebenen Fläche gehen, treffen die Fläche im Raum *höchstens in einem einzigen Punkt.*

Man ziehe in der Ebene xy ein Rechteck, dessen Seiten den beiden Axen x und y parallel laufen und die Curve φ berühren, die vollständig im Inneren dieses Rechtecks liege, und α, β seien die Abscissen, α', β' die Ordinaten der Ecken des Rechtecks.

Wir theilen das Intervall der x-Axe von α bis β in Theilintervalle $\delta_1, \ldots, \delta_n$ und das Intervall der y-Axe von α' bis β' in Theilintervalle δ_1', $\delta_2', \ldots, \delta_n'$ und ziehen durch die Theilpunkte die Parallelen zu den Axen x bez. y.

Auf diese Art wird das der Curve φ umschriebene Rechteck in eine Anzahl kleiner Rechtecke geteilt, von denen jedes den Flächeninhalt $\delta_r \delta_s'$ hat; wir betrachten von ihnen nur die, welche entweder ganz im Innern des von φ begrenzten Ebenenstücks liegen, oder von φ durchschnitten werden und lassen die übrigen kleinen Rechtecke, die ganz ausserhalb des von φ begrenzten Ebenenstücks liegen, weg.

Durch einen im Rechteck vom Flächeninhalt $\delta_r \delta_s'$ (den Umfang nicht ausgeschlossen) liegenden Punkt $(x_r\, y_s)$ ziehen wir die Parallele zur z-Axe bis zu ihrem Schnitt mit der Fläche; dieser Schnittpunkt wird über der xy-Ebene in einer Höhe

$$z_{rs} = f(x_r, y_s)$$

liegen, wenn $z = f(x, y)$ die Gleichung der Fläche ist.

Die Grenze der Summe der Volumina aller rechtwinkligen Parallelepipeda von einer Basis, wie $\delta_r \delta_s'$, und Höhe, wie z_{rs}, ist, wenn die Intervalle δ, δ' an Grösse unbegrenzt abnehmen, dasjenige, was das zwischen der Fläche und der xy-Ebene gelegene Volumen genannt wird.

Dieses Volumen hat den analytischen Ausdruck

$$V = \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

worin das Doppelintegral über das ganze von der Curve φ begrenzte Ebenenstück zu erstrecken ist. Vergl. *Repertorium*, 1, S. 160.

Ein beliebiges von Flächen eingeschlossenes Volumen kann immer aus derartigen Volumina zusammengesetzt werden, d. h. solchen, die von Theilen der Flächen und der xy-Ebene begrenzt werden.

Wir wollen das in der einen Richtung unbegrenzte rechtwinklige Parallelepipedon construiren, welches das Rechteck $\delta_r \delta_s'$ zur Basis hat; seine Seitenflächen werden auf der Fläche ein krummliniges Vierseit ausschneiden, innerhalb dessen sich der Punkt von der Höhe $z_{r,s}$ befindet.

Wir legen durch diesen Punkt die Tangentialebene und lassen sie durch die Seitenflächen des Parallelepipedons begrenzt sein; *die Grenze der Summe der Flächeninhalte aller auf diese Art in den verschiedenen Tangentialebenen gebildeten Parallelogramme ist, wenn die δ_r, δ_s' unbegrenzt kleiner werden, der Inhalt der Fläche.*

Ihr analytischer Ausdruck lautet

$$I = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy;$$

dabei ist das Doppelintegral, wie oben, über das ganze von der Curve φ begrenzte Ebenenstück zu erstrecken.

Bis vor Kurzem wurde der Inhalt der Flächen in den angesehensten Lehrbüchern (siehe z. B. Serret, *Diff.- u. Integr.-Rechn.*) auf andere Art definirt, nämlich als die Grenze der Summe der Seitenflächen von Polyedern, die dreieckige Seitenflächen haben und in die Fläche eingeschrieben sind. H. A. Schwarz zeigte, dass diese Definition in gewissen Fällen illusorisch oder ungenau werden kann; *Werke*, Bd. 2, p. 309; siehe auch die 2. Ausg. des *Cours d'analyse* von Hermite, Paris 1883, p. 35, 36, in welchem die Bemerkung von Schwarz zuerst veröffentlicht wurde.

Ist z Rotationsaxe der gegebenen Fläche, deren Gleichung alsdann

$$z = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

lautet, so ist das Volumen zwischen zwei zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen, welche die Fläche in zwei Parallelkreisen mit den Radien r_1, r_2 schneiden:

$$V = \pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 F'(r)\, dr$$

und der Flächeninhalt des zwischen den beiden Parallelkreisen mit den Radien r_1, r_2 enthaltenen Flächenstücks wird durch die Formel

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \sqrt{1 + F'^2(r)}\, dr$$

ausgedrückt.

Der Flächeninhalt der Kugelcalotte, d. h. des kleineren der beiden Theile der Kugeloberfläche, die von einem beliebigen auf der Kugel gezogenen Kreis vom Radius r bestimmt werden, ist

$$2\pi R\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right),$$

worin R den Radius der Kugel bezeichnet.

Lässt man eine Ellipse mit den Halbaxen a und b, $(a > b)$ um die grössere Axe rotiren, so entsteht ein Rotationsellipsoid.

Der Flächeninhalt des Theils eines solchen Ellipsoids, welcher von zwei Ebenen bestimmt wird, die auf der Rotationsaxe senkrecht stehen und von denen die eine durch das Centrum geht und von der anderen um die Grösse r absteht, ist

$$\pi \frac{b}{a} \left\{ r\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} r \right\},$$

worin

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{ ist.}$$

Der Flächeninhalt des halben Ellipsoids ist

$$\pi b^2 + \frac{\pi a b}{e} \arcsin e.$$

Das von einem Ellipsoid mit drei ungleichen Axen umschlossene Volumen ist

$$\tfrac{4}{3}\pi a b c,$$

wenn a, b, c die drei Halbaxen bezeichnen.

Das von einem einschaligen Hyperboloid und zwei der Kehlellipse parallelen Ebenen begrenzte Volumen ist, wenn diese Ebenen um die Grössen $\pm c$ *von der Kehlellipse abstehen:*

$$\tfrac{8}{3}\pi a b c,$$

wobei a, b die Halbaxen der Kehlellipse sind.

Das von einem elliptischen Paraboloid und einer auf der Axe senkrechten Ebene eingeschlossene Volumen ist der Hälfte des Volumens des Cylinders gleich, der dieselbe Basis und Höhe hat.

Der Flächeninhalt eines Torus (vergl. Kap. 12, § 7), *welcher durch einen Kreis erzeugt wird, dessen Radius R ist, und der um eine in seiner Ebene liegende und von seinem Mittelpunkt um die Grösse a abstehende Gerade rotirt, ist*

$$4\pi^2 a R,$$

und das von derselben Fläche eingeschlossene Volumen:

$$2\pi^2 a R^2.$$

Flächeninhalte und Volumina für Polarcoordinaten. Es seien ϱ (der Radiusvector) und θ (die Amplitude) die *Polar*coordinaten (vergl. S. 20) eines Punkts einer gegebenen Plancurve, P_1, P_2 zwei Punkte der Curve und O der Pol des Coordinatensystems; der zwischen P_1 und P_2 gelegene Theil der Curve sei derart, dass jede beliebige durch O gehende und innerhalb des Winkels P_1OP_2 liegende Gerade ihn nur in einem Punkt trifft. Man zerlege den Winkel P_1OP_2 in n Theile $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; der Curvenbogen von P_1 bis P_2 wird alsdann durch die Schenkel der Theilwinkel in n Theile zerlegt; in jedem dieser n Theile (z. B. in dem Theil, der dem Winkel ω_r entspricht) wähle man einen beliebigen Punkt, dessen Radiusvector ϱ_r sei und beschreibe den Kreisbogen vom Centrum O und Radius ϱ_r, der von den Schenkeln des Winkels ω_r begrenzt wird. *Die Grenze der Summe der Flächeninhalte aller Kreisausschnitte, wie desjenigen, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{2}\varrho_r^2\omega_r$ ist*), bestimmt den Inhalt der zwischen der Curve und den beiden durch P_1, P_2 gehenden Endradienvectoren enthaltenen Fläche.*

Der analytische Ausdruck für diesen Flächeninhalt ist:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho^2 d\theta,$$

worin θ_1, θ_2 die Amplituden der Punkte P_1, P_2 bedeuten und angenommen ist, dass ϱ mittelst der Gleichung der Curve als Function von θ ausgedrückt sei.

Diese Definition des Flächeninhalts stimmt mit der früher gegebenen in der Art überein, dass, wenn der Inhalt einer Fläche erst auf die eben erläuterte Weise aus Flächeninhalten für Polarcoordinaten und dann aus solchen zusammengesetzt wird, wie sie im Anfang des Paragraphen besprochen wurden, die mit Hülfe der beiden entsprechenden Formeln gefundenen Resultate identisch sind.

Auf analoge Art kann man bei den Volumina verfahren. Wir wollen einen Theil einer Fläche betrachten, deren Punkte die Grössen ϱ, θ, φ zu Polarcoordinaten haben. Vergl. S. 35.

Man betrachte den Kegel mit *nicht ebener* Basis, dessen Spitze in dem Pol O liegt und dessen Basis der gegebene Theil der Fläche ist, und nehme an, dieser Theil sei so be-

*) Hier, wie in allen ähnlichen Fällen, verstehen wir unter ω_r auch die Zahl, welche die Länge des zu dem Centriwinkel ω_r gehörigen Kreisbogens auf einem Kreis mit dem Radius 1 misst.

schaffen, dass jede durch O gehende und im Innern des Kegels liegende Gerade ihn immer nur in *einem* Punkt treffe. Wir wollen nun den an der Spitze des Kegels von dem Kegelmantel umschlossenen Raum den körperlichen Winkel oder kurz den Winkel an der Spitze des Kegels nennen. Diesen Winkel zerlegen wir in eine Anzahl körperlicher Theilwinkel, von denen jeder aus der Fläche ein Stück ausschneiden wird, und nehmen auf diesem Stück einen Punkt P_{rs} an, dessen Radiusvector ϱ_{rs} sei. Wir bilden nun den Kegel, der zum Winkel an der Spitze den körperlichen Theilwinkel hat, innerhalb dessen sich der Punkt P_{rs} befindet, und zur Basis einen Theil der Kugeloberfläche, die aus dem Centrum O mit dem Radius ϱ_{rs} beschrieben wird. *Die Grenze der Summe der Volumina aller dieser Kegel definirt, wenn die körperlichen Theilwinkel, in welche der totale, der Fläche zugehörige, an dem Pol O liegende körperliche Winkel zerlegt wurde, unbegrenzt abnehmen, das zwischen der Fläche und dem Punkt O enthaltene Volumen.* Es möge *Polarvolumen* heissen.

Der analytische Ausdruck für dieses Volumen ist:

$$V = \tfrac{1}{3}\iint \varrho^3 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi;$$

dabei ist das Doppelintegral auf die Gesammtheit aller Werthe θ, φ auszudehnen, welche Punkten des betrachteten Theils der Fläche entsprechen.

Selbstverständlich gilt auch hier die Bemerkung, dass diese neue Definition des Volumens mit der früheren nicht in Widerspruch steht, und dass, wenn man das Polarvolumen mittelst der früheren Formeln berechnet, indem man es in Summen und Differenzen von Volumina der früher betrachteten Art zerlegt und dann die dieser letzteren Art von Volumina entsprechenden Formeln anwendet, die beiden Resultate identisch sein müssen.

Wir geben schliesslich die Formeln an, welche für die Bogenlänge von Plan- und Raumcurven und für die Inhalte beliebiger Flächen bei Polarcoordinaten gelten. *Sie lauten:*

$$\textit{Bogenlänge der Plancurve} = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \sqrt{1 + \varrho^2 \left(\frac{d\theta}{d\varrho}\right)^2},$$

Bogenlänge der Raumcurve =

$$= \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \sqrt{1 + \varrho^2 \left(\frac{d\theta}{d\varrho}\right)^2 + \varrho^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2},$$

Inhalt von Flächen =

$$=\iint \varrho\, d\theta\, d\varphi \sqrt{\left\{\varrho^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \theta}\right)^2\right\} \sin^2\theta + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

§ 4. Krümmung von Plan- und Raumcurven. Torsion. Natürliche Gleichungen.

Der Winkel, den die Tangenten in zwei benachbarten Punkten P, P' einer Plan- oder Raumcurve miteinander bilden und welcher der Null zustrebt, wenn die beiden Berührungspunkte sich einander nähern, heisst *Contingenzwinkel.* Wir nehmen an, dieser Winkel werde durch den mit dem Radius 1 beschriebenen Kreisbogen gemessen, der zu einem dem Contingenzwinkel gleichen Centriwinkel gehört. Das Mass dieses Kreisbogens werde mit θ bezeichnet.

Wenn die Länge des von zwei benachbarten Punkten begrenzten Bogens s genannt wird, so versteht man unter *Krümmung der Plan- oder Raumcurve in einem Punkt P die Grenze des Verhältnisses*

$$\frac{\theta}{s},$$

falls P' dem Punkt P zustrebt; das Verhältniss selbst pflegt man *die mittlere Krümmung des Bogens s* zu nennen.

Betrachtet man θ als Function von s, *so kann man die Krümmung auch als Derivirte von θ nach s ausdrücken.*

Der reciproke Werth der Krümmung heisst der *Krümmungsradius.*

Handelt es sich um eine Plancurve, deren Gleichung

$$y = f(x)$$

ist, so wird die Krümmung durch die Formel

$$C = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ausgedrückt; lauten dagegen die Gleichungen der Plancurve

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$

so ist

$$C = \frac{1}{R} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn $t = s$ (dem Curvenbogen) ist, so erhält man

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}} = -\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}},$$

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}.$$

In Polarcordinaten ϱ, θ ist, wenn die Gleichung der Curve $\varrho = \varphi(\theta)$ lautet und ϱ', ϱ'' die erste bez. zweite Derivirte von ϱ nach θ sind:

$$\frac{1}{R} = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

In dem Fall einer ***Raumcurve*** *wird die Krümmung durch*

$$C = \frac{1}{R} =$$

$$= \frac{1}{ds^3}\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}$$

ausgedrückt, oder, wenn s die unabhängige Variable ist, durch

$$C = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Wenn von einem Punkt im Raum die Parallelen zu allen Tangenten an eine gegebene *Raum*curve gezogen werden und diese Parallelen durch eine Kugel begrenzt werden, deren Centrum der feste Punkt des Raums ist, so wird auf diese Art auf der Kugel eine *sphärische Curve* entstehen, die *das sphärische Bild der gegebenen Raumcurve* heisst.

Zieht man von einem Punkt der gegebenen Curve aus die Parallele zu der in dem entsprechenden Punkt an das sphärische Bild gelegten Tangente, so erhält man *die Hauptnormale zu der gegebenen Raumcurve.*

Die Gleichungen der Hauptnormalen lauten:

$$\frac{X - x}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{Y - y}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{Z - z}{d\frac{dz}{ds}},$$

und ihre Richtungscosinus sind:

$$\cos\xi = R\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},$$

$$\cos\eta = R\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},$$

$$\cos\zeta = R\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

wenn R den Krümmungsradius bezeichnet.

Wir werden unter *positiver Richtung der Normalen* einer *ebenen* Curve in P oder der Hauptnormalen einer *Raum*curve in P diejenige der beiden Richtungen der Normalen verstehen, welche so beschaffen ist, dass man, von P in ihrem Sinn ausgehend, Punkte trifft, die auf derselben Seite der Tangente in P, oder auf derselben Seite der senkrecht zur Hauptnormalen durch P gelegten Ebene liegen, wie die dem Punkt P unendlich nahen Punkte der Curve.

Unter der *positiven Richtung der Tangente* an die ebene Curve in P verstehen wir ferner diejenige der beiden Richtungen der Tangente, welche mit der positiven Richtung der y-Axe zusammenfällt, wenn man die Curve in ihrer eigenen Ebene so verschiebt, dass sich die positive Richtung der x-Axe mit der positiven Richtung der Normalen deckt.

Der Punkt auf der positiven Richtung der Normalen zur Plancurve oder der Hauptnormalen zur Raumcurve, der von P um eine Grösse gleich R (dem Krümmungsradius) absteht, heisst *der dem Punkt P entsprechende Krümmungsmittelpunkt.*

Bei einer Raumcurve heisst die durch den Krümmungsmittelpunkt senkrecht zur Tangente und Hauptnormalen gezogene Gerade *Krümmungsaxe, Polarlinie* und die ihr parallele durch den Punkt P der Curve gehende Gerade *Binormale* (nach Saint-Venant, *Mém. sur les lignes courbes non planes, Journ. de l'Éc. pol.,* 18, p. 17).

Der Krümmungsmittelpunkt ist bei Plancurven die Grenzlage des Schnittpunkts der Normalen in P mit der Normalen in einem dem Punkt P unendlich nahen Punkt.

Die Krümmungsaxe (Polare) ist bei Raumcurven die Grenzlage der Schnittgeraden der Normalebene zur Curve in P mit der Normalebene in einem dem Punkt P unendlich nahen Punkt.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind im Fall einer ebenen Curve

$$x_1 = x + R\frac{dy}{ds},$$

$$y_1 = y - R\frac{dx}{ds};$$

diese Formeln gelten jedoch nur dann, wenn die obigen Vereinbarungen über die positiven Richtungen der Tangente und Normalen vorher getroffen worden sind, und wenn man sich R als eine ihrem Wesen nach positive Grösse denkt.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts im Fall einer gewundenen Curve sind

$$x_1 = x \pm R^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},$$

$$y_1 = y \pm R^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},$$

$$z_1 = z \pm R^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

wobei das Vorzeichen durch die Vereinbarungen bestimmt wird, die über die *positive Richtung* der Tangente an die gewundene Curve noch zu treffen sind.

Die Gleichungen der Krümmungsaxe lauten:

$$\frac{X - x_1}{\cos\lambda} = \frac{Y - y_1}{\cos\mu} = \frac{Z - z_1}{\cos\nu},$$

worin λ, μ, ν die Richtungswinkel der Krümmungsaxe bezeichnen und durch

$$\cos\lambda = R\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3},$$

$$\cos\mu = R\frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{ds^3},$$

$$\cos\nu = R\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}$$

bestimmt werden.

Die durch die Tangente und die Hauptnormale einer Curve doppelter Krümmung gehende Ebene heisst *Schmiegungsebene (Krümmungsebene, Osculationsebene); ihre Gleichung lautet:*

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Die Schmiegungsebene ist die Grenzlage der Ebene, welche durch einen Punkt der Curve und zwei andere Punkte der Curve geht, wenn diese beiden anderen Punkte sich auf beliebige Weise dem ersteren unbegrenzt nähern.

Die zweite Krümmung (Schmiegung, Flexion, Torsion oder *Windung)* steht in Beziehung zu der *Deviation der Krümmungsaxe* bei dem Uebergang von einem Punkt der Curve zu dem folgenden (dem *Schmiegungswinkel, Torsions-, Flexions-* oder *Windungswinkel*), wie die gewöhnliche Krümmung (die auch *die erste Krümmung* genannt wird) in Beziehung zu der *Deviation der Tangente* (dem *Contingenzwinkel*) steht.

Bezeichnet man mit τ den Torsionswinkel, d. h. den Winkel zwischen den beiden Krümmungsaxen, die zweien unendlich nahen Punkten der Curve entsprechen oder besser denjenigen Bogen eines Kreises vom Radius 1, der zu einem diesem Winkel gleichen Centriwinkel gehört, so heisst die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{\tau}{s}$$

die *Torsion* oder *Schmiegung in einem Punkt der Raumcurve.*

Ihr analytischer Ausdruck ist

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2},$$

worin λ, μ, ν die Richtungswinkel der Krümmungsaxe bedeuten, und T der Torsionshalbmesser heisst.

In der Theorie der Raumcurven (gewundenen Curven, Curven doppelter Krümmung) sind von grosser Bedeutung die sogenannten *Frenet'schen oder Serret'schen Formeln*, welche Ausdrücke für die Differentiale der neun Cosinus

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (die Richtungscosinus der Tangente),
$\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ (die Richtungscosinus der Hauptnormalen),
$\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ (die Richtungscosinus der Krümmungsaxe)

liefern.

Sie lauten:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{1}{R}\cos\xi\,,$$
$$\frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{1}{R}\cos\eta\,,$$
$$\frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{1}{R}\cos\zeta\,;$$

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{1}{T}\cos\xi\,,$$
$$\frac{d\cos\mu}{ds} = \frac{1}{T}\cos\eta\,,$$
$$\frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{1}{T}\cos\zeta\,;$$

$$\frac{d\cos\xi}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\alpha - \frac{1}{T}\cos\lambda\,,$$
$$\frac{d\cos\eta}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\beta - \frac{1}{T}\cos\mu\,,$$
$$\frac{d\cos\zeta}{ds} = -\frac{1}{R}\cos\gamma - \frac{1}{T}\cos\nu\,.$$

Die analytischen Beziehungen, welche zwischen der Krümmung und dem Bogen einer Plancurve bez. der Krümmung, Torsion und dem Bogen einer Raumcurve bestehen, werden *die natürlichen Gleichungen* der Curve, *equazioni intrinsiche, intrinsic equations* genannt, weil sie zwar die Form, aber nicht die Lage der Curve in der Ebene bez. im Raum bestimmen.

Sind die natürlichen Gleichungen

$$R = R(s), \quad T = T(s)$$

einer Raumcurve beliebig gegeben, so existirt immer die ihnen entsprechende Curve, und das Problem, die Curve zu bestimmen, reducirt sich auf die Integration einer Gleichung vom Riccati'schen Typus; vergl. *Repert.* Bd. 1, p. 173. (Darboux).

Die Curve, bei welcher das Verhältniss der beiden Krümmungen constant bleibt, ist eine Schraubenlinie, Schneckenlinie oder Helix (Curven, die auf einem Cylinder aufgetragen sind und dessen Erzeugende unter constantem Winkel schneiden); sind im Besonderen die beiden Krümmungen constant, so ist der Cylinder ein Kreiscylinder. Puiseux, *Crelle,* 7; Bertrand, ib., 8.

Die natürliche Gleichung des Kegelschnitts lautet:

$$s = \frac{1}{3} \int \frac{dR}{\sqrt{-1 + AR^{\frac{2}{3}} - BR^{\frac{4}{3}}}},$$

worin A, B *zwei Constante bezeichnen.*

Die natürlichen Gleichungen der Parabel und der gleichseitigen Hyperbel sind

$$s = \frac{1}{3} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}},$$

$$\text{bez. } s = \frac{1}{3} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}},$$

worin p *und* a *die Parameter der Parabel bez. der gleichseitigen Hyperbel bedeuten.*

Eine der natürlichen Gleichungen einer sphärischen (auf einer Kugel liegenden) Curve lautet:

$$\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T \frac{dR}{ds}\right) = 0.$$

Die Curven, für welche eine der *natürlichen* Gleichungen eine *lineare Relation* zwischen den beiden Krümmungen ist, heissen *Bertrand'sche Curven. Crelle,* 15.

Sie haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass ihre Hauptnormalen auch die Hauptnormalen einer zweiten Curve sind, die der ersten conjugirt genannt wird. Siehe auch Bonnet, *Journ. de l'Éc. pol.*, 32, 1848; Serret, *Crelle,* 16; *Compt. Rend.*, 1877; Cesàro, *Riv. di mat.,* 2; *Mathesis*, 2; etc.

Die Ersten, welche sich ex professo mit der Theorie der gewundenen Curven beschäftigten, waren besonders Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure,* Paris 1731; Tinseau, *Mém. des Sav. étr.,* 9, 1781; Monge, ib., 10, 1785; *Journ. de l'Éc. pol.,* 2, 1799; Lancret, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 1, 1806; 2, 1811; Jacobi, *Crelle,* 14, 16; Saint-Venant, *Journ. de l'Éc. pol.,* 1845.

Die berühmten Formeln von Frenet und Serret wurden fast gleichzeitig von diesen beiden Autoren entdeckt. *Crelle*, 17, 1852 und 16, 1851*).

Mit der sogenannten *natürlichen Geometrie der Curven*, d. h. dem Studium der Curven mittelst der natürlichen Gleichungen befassten sich speciell Hoppe in zahlreichen Arbeiten, *Crelle*, 60, 63; *Arch. der Math.*, 1880, 85, 89, etc.; Lie, *Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlängen durch beliebige Relationen verknüpft sind*, Christiania, *Vid. Selsk. Forhandl.*, 1882; siehe auch seine *Vorles. über cont. Gruppen, etc.*, Leipzig, 1893; ein neueres Buch ist von Cesàro. *Geom. intrinsica*, Napoli, 1896 (die deutsche Uebersetzung von Kowalewski ist bei B. G. Teubner in Leipzig 1901 erschienen), welches ausschliesslich diese Richtung verfolgt.

Die Hauptwerke über die Infinitesimaltheorie der Raumcurven sind von Schell, *Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung*, Leipzig, 2. Aufl. 1898; P. Serret, *Théor. nouv. etc.*, Paris 1860; Joachimsthal, *Anw. der Diff. und Int. etc.*, 3. Aufl., bearb. von Natani, Leipzig 1890; Scheffers, G., *Anw. der Diff. und Int. etc.*, Bd. 1, Leipzig 1900 (vergl. das Namenregister); dazu kommen die Arbeiten über *Differentialgeometrie*, die wir in den nächsten Paragraphen citiren werden.

§ 5. Berührungen von Curven und Flächen.

Wenn $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ die Gleichungen zweier *ebener* Curven sind, so sagt man, die Curven berühren sich in dem Punkt mit der Abscisse $x = x_0$ *in der* i^{ten} *Ordnung oder* $(i+1)$-*punktig*, wenn für $x = x_0$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \varphi(x_0), \\ f'(x_0) &= \varphi'(x_0), \\ f''(x_0) &= \varphi''(x_0), \\ &\cdots\cdots \\ f^i(x_0) &= \varphi^i(x_0) \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Wenn i eine gerade Zahl ist, so berühren sich die beiden Curven in diesem Punkt und schneiden sich zugleich in ihm; ist i dagegen ungerade, so schneiden sich die beiden Curven nicht.

Wenn zwei Curven f, φ in einem Punkt eine Berührung

*) Der in dem *Crelle'schen Journal* später als der Serret'sche zum Abdruck gekommene Frenet'sche Aufsatz war schon im Jahr 1847 der Toulouser Facultät als Doctordissertation präsentirt worden.

i^{ter} *Ordnung haben, so berührt eine dritte Curve* ψ, *welche mit* f *eine Berührung von der Ordnung* $k < i$ *hat, auch die andere* φ *in derselben Ordnung* k.

Eine Curve, die in einem Punkt mit einer anderen festen Curve eine Berührung i^{ter} *Ordnung hat, kann man als die Grenzlage einer beweglichen Curve ansehen, die durch* $i+1$ *Punkte der festen Curve geht, wenn diese* $i+1$ *Punkte sich unbegrenzt einander nähern.*

Von einer Curve, deren Gleichung i unbestimmte Constanten enthält, sagt man, sie *osculire* eine andere feste Curve, wenn sie mit ihr in einem Punkt eine Berührung der grössten Ordnung hat, die für sie überhaupt bei Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Constanten möglich ist; *im Allgemeinen ist diese höchste Ordnung die* $(i-1)^{\text{te}}$; *in speciellen Fällen kann sie diese Grenze überschreiten.*

Der eine Curve in einem Punkt *osculirende Kreis* ist der Kreis, welcher mit der Curve in diesem Punkt eine Berührung von wenigstens der 2^{ten} Ordnung hat.

Der eine Curve in einem Punkt osculirende Kreis ist der durch diesen Punkt gehende Kreis, dessen Centrum im Krümmungsmittelpunkt liegt (der Krümmungskreis).

Wenn der osculirende Kreis mit der Curve in einem Punkt eine Berührung ungerader Ordnung (also von höherer als der zweiten Ordnung) hat, so ist der Krümmungshalbmesser in diesem Punkt ein Maximum oder Minimum.

Es sei eine Fläche und ihre Normale in einem Punkt P gegeben; es sei ferner eine durch den Punkt P der Fläche gehende Raumcurve gegeben; man stelle die Projection der Curve auf die Fläche her, indem man die projicirenden Geraden parallel zur Normalen auf die Fläche zieht. Man sagt dann, *die Curve und die Fläche haben in dem Punkt* P *eine Berührung* i^{ter} *Ordnung,* wenn die Curve und ihre so gebildete Projection sich in P in der i^{ten} Ordnung berühren.

Von einer Fläche, deren Gleichung i willkürliche Parameter enthält, sagt man, sie *osculire* eine gegebene Curve in einem Punkt, wenn sie mit ihr eine Berührung der grössten, mit der Anzahl der willkürlichen Parameter verträglichen Ordnung hat. *Diese Ordnung ist wenigstens die* $(i-1)^{\text{te}}$.

Eine durch einen Punkt P der Raumcurve gehende Ebene *osculirt* die Curve in P, wenn sie mit ihr in P eine Berührung von wenigstens der 2^{ten} Ordnung hat. Siehe § 4.

Die *osculirende Kugel* ist die Kugel, welche eine Raumcurve in einem Punkt wenigstens in der *dritten* Ordnung berührt.

§ 6. Enveloppen von Curven und Flächen. Abwickelbare Flächen.

Wenn die Gleichung $f=0$ einer Curve (oder einer Fläche) einen unbestimmten Parameter a enthält und man diesen stetig variiren lässt, so entsteht auf diese Art ein einfach unendliches System von Curven (oder Flächen). Betrachtet man nun einen bestimmten Werth von a und dann einen variirten Werth

$$a+\varDelta a,$$

so kann der Schnitt der entsprechenden beiden Curven (oder Flächen), wenn $\varDelta a$ sich der Null nähert, im Allgemeinen einer Grenzlage zustreben. Die Gesammtheit aller dieser Grenzlagen kann eine Curve (oder Fläche) bilden, welche dann *die Einhüllende* oder *Enveloppe des gegebenen Systems von Curven (oder Flächen)* heisst, während jede einzelne Curve (oder Fläche) des Systems *Eingehüllte* oder *Umhüllte* genannt wird. In dem Fall von Flächen wird die Grenzlage der Schnittcurve zweier Nachbarflächen des Systems *Charakteristik* genannt. Monge.

Um die Gleichung der Enveloppe zu erhalten, hat man den Parameter a aus der gegebenen Gleichung und aus derjenigen zu eliminiren, die sich ergiebt, wenn ihre Derivirte nach a gleich Null gesetzt wird $\left(f=0,\ \frac{\partial f}{\partial a}=0\right)$.

Die Einhüllende berührt alle Eingehüllten längs den entsprechenden Charakteristiken.

Die auf einer Eingehüllten liegende Charakteristik schneidet die benachbarte Eingehüllte in gewissen Punkten, die Grenzlagen zustreben können, wenn die beiden Eingehüllten sich einander unbegrenzt nähern; die Gesammtheit dieser Grenzlagen bildet im Allgemeinen eine der Enveloppe angehörige Curve, welche *die Rückkehrkante (Cuspidalcurve) der Enveloppe* genannt wird.

Jede Charakteristik berührt die Rückkehrkante.

Die Gleichungen der Rückkehrkante erhält man durch Elimination von a aus

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}=0.$$

Die Enveloppe eines einfach unendlichen Systems von *Ebenen* ist eine Fläche, die *Developpable oder abwickelbare Fläche* genannt wird.

Die abwickelbare Fläche ist *Osculationsdeveloppable* ihrer Rückkehrkante.

Bezeichnet man mit r, s, t die aus der Gleichung der Fläche abgeleiteten zweiten Derivirten von z nach x und y, *so ist für jede developpable Fläche*

$$rt - s^2 = 0.$$

Die *abwickelbaren* Flächen haben ihren Namen von der Eigenschaft, dass man sie auf eine Ebene ohne Falten und Brüche ausbreiten (abwickeln) kann.

Die Developpable ist der Ort der Tangenten an eine Raumcurve, die Rückkehrkante der Fläche ist, und diese Tangenten sind die Charakteristiken der Developpablen.

Die Berührungsebenen der Developpablen sind Osculationsebenen der Rückkehrkante.

Die Enveloppe der Normalebenen einer Raumcurve wird *Polardeveloppable (Fläche der Normalebenen oder der Krümmungsaxen) der gewundenen Curve* genannt.

Die Charakteristiken der Polardeveloppablen sind die Krümmungsaxen (Polarlinien) der gegebenen Curve.

Die Coordinaten eines Punkts der Rückkehrkante der Polardeveloppablen sind

$$x_0 = x + R\cos\xi - T\frac{dR}{ds}\cos\lambda,$$

$$y_0 = y + R\cos\eta - T\frac{dR}{ds}\cos\mu,$$

$$z_0 = z + R\cos\zeta - T\frac{dR}{ds}\cos\nu.$$

Die Rückkehrkante der Polardeveloppablen einer gewundenen Curve ist der Ort der Mittelpunkte der in den Punkten der Curve die Fläche osculirenden Kugeln, der Schmiegungskugeln.

Die Enveloppe der auf der Hauptnormalen senkrecht stehenden Berührungsebenen an eine Raumcurve (nach Lancret, *Mém. sur les courbes à double courbure, Mém. prés. par div. sav. à l'Ac. de Paris*, 1, p. 420: der *rectificirenden Ebenen*) ist die sogenannte *rectificirende developpable Fläche der Raumcurve.*

Breitet man die rectificirende Developpable einer gegebenen Raumcurve auf eine Ebene aus, so transformirt sich diese Curve (die auf der Fläche liegt) in eine Gerade.

§ 7. Evoluten und Evolventen.

Wenn wir uns denken, es sei um eine gegebene ebene oder gewundene Curve ein biegsamer aber nicht dehnbarer Faden gelegt, und wenn wir diesen von der Curve so abwickeln, dass er immer gespannt bleibt und daher die Curve immer berührt, so beschreibt ein beliebiger Punkt des Fadens eine Curve, welche *Evolvente* (auch zum Unterschied von einer anderen Art von Abwickelungscurven *Filarevolvente*) der gegebenen Curve genannt wird, während die letztere die *Evolute (Filarevolute)* der Evolvente heisst.

Die Tangente an die Evolute steht immer auf der Tangente an die Evolvente senkrecht, insbesondere ist die Tangente an die Evolvente parallel zur Hauptnormalen der Evolute.

Ist eine beliebige gewundene oder ebene Curve als Evolvente gegeben, so sind die Coordinaten eines Punkts der Evolute:

$$x' = x + R\cos\xi + R\,\mathrm{tg}\,(\tau + k)\cos\lambda\,,$$
$$y' = y + R\cos\eta + R\,\mathrm{tg}\,(\tau + k)\cos\mu\,,$$
$$z' = z + R\cos\zeta + R\,\mathrm{tg}\,(\tau + k)\cos\nu\,,$$

worin

$$\tau = \int \frac{ds}{T}$$

ist und k eine willkürliche Constante bedeutet. Es existiren mithin unendlich viele Evoluten einer gegebenen ebenen oder gewundenen Curve. Ist die Curve eben, so wird $\tau = $ Const. Der Winkel, den die Tangente an die Evolute mit der Hauptnormalen der Evolvente bildet, ist gleich $\tau + k$.

Wenn die Curve eben ist und $\tau + k = 0$ gesetzt wird. erhält man von den unendlich vielen Evoluten die ebene Evolute.

Die unendlich vielen Evoluten einer Curve liegen sämmtlich auf der Polardeveloppablen der Evolvente und sind insbesondere sämmtlich geodätische Linien (siehe weiter unten) *dieser Fläche.*

Wenn die Evolvente eine Raumcurve ist, so sind alle ihre Evoluten Raumcurven.

Ist dagegen die Evolvente eine Plancurve, so ist eine Evolute eben, die übrigen sind gewunden. In diesem Fall ist diese einzige ebene Evolute der Ort de[illegible]mittelpunkte der

Evolvente und die übrigen sind Schraubenlinien des Cylinders, der diesen Ort zur Basis hat.

Die von demselben Punkt der Evolvente ausgehenden Tangenten an zwei verschiedene Evoluten bilden einen constanten Winkel miteinander.

Von *den Evolutenflächen einer gegebenen Fläche* wird weiter unten in § 13 die Rede sein.

Aus der oben angegebenen Construction der Evolvente ergiebt sich sofort:

Es giebt unendlich viele Evolventen einer gegebenen Curve.

Die Evolute einer ebenen Curve untersuchte zuerst Huyghens, *Horologium oscillatorium*, Paris 1673; er kam bei dem Versuch, ein isochrones Pendel zu construiren, auf den Gedanken, den Isochronismus der Cycloide (vergl. Kap. 17, § 12) zu benutzen und den Faden des Pendels über zwei Halbevoluten dieser Curve zu legen; daraus entsprang dann die Idee, die Evoluten im Allgemeinen zu studiren. Später hat sich mit ihnen auch Newton in seiner *Method of fluxions etc.*, London, 1736 beschäftigt.

§ 8. Krummlinige Coordinaten. Linienelement der Flächen. Fundamentaldifferentialformen der Flächen. Conforme Abbildung. Sphärische Abbildung.

Wenn eine Fläche durch die drei Gleichungen

$$x = \varphi(u, v),$$
$$y = \psi(u, v),$$
$$z = \chi(u, v)$$

definirt ist, in welchen u, v zwei willkürliche Parameter bedeuten, so stellen die Linien, für welche $u =$ Const. oder $v =$ Const. ist, zwei Systeme von auf der Fläche liegenden Linien dar, die man *Parameterlinien* nennt. Die Grössen u und v heissen die *krummlinigen Coordinaten* des Schnittpunkts der beiden Parameterlinien u, v. Der unendlich kleine Abstand zweier der Fläche angehöriger Punkte mit den Coordinaten

$$u, v,$$
$$\text{bez. } u + du, v + dv$$

heisst *Linienelement der Fläche. Sein Quadrat ist*

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2,$$

worin

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$\textit{und} \quad EG - F^2 > 0$$

ist.

Bezeichnet man mit (ux), (uy), ... die Richtungswinkel der Tangenten an die Parameterlinien $v = \text{Const.}$, $u = \text{Const.}$, so gelten die Formeln

$$\cos(ux) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos(vx) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\cos(uy) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos(vy) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\cos(uz) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \cos(vz) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

und der Winkel Ω, den die Parameterlinien miteinander bilden, ergibt sich aus:

$$\cos\Omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

$$\sin\Omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die beiden Linien $u = \text{Const.}$ und $v = \text{Const.}$ senkrecht aufeinander stehen, ist $F = 0$.

Der Inhalt des von den vier Parameterlinien u, $u + du$, v, $v + dv$ auf der Fläche gebildeten unendlich kleinen Vierecks, des Flächenelements, ist

$$\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Bezeichnet man mit X, Y, Z die Richtungscosinus der Flächennormalen, so erhält man die Formeln:

$$X = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Die Differentialform

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

heisst *die erste Fundamentaldifferentialform der Fläche* und die Differentialform

$$\varphi = -\sum dx dX = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2$$

die zweite Fundamentaldifferentialform der Fläche.

Die D haben die Werthe

$$D = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad D' = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad D'' = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

wobei das Symbol $\sum$ angibt, dass man die Summe der drei Werthe bilden soll, welche sich durch Vertauschung von x, X mit y, Y bez. z, Z ergeben.

Zwischen den Coefficienten E, F, G, D, D', D'' bestehen drei Relationen, die in dem Fall, in welchem die Parameterlinien senkrecht auf einander stehen, also $F = 0$ ist, folgendermassen lauten:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{D}{E} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{D''}{G} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{D'^2 - DD''}{\sqrt{EG}} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right).$$

Ueber die Form dieser Relationen *in dem allgemeinen Fall* und in *Christoffel'schen* Symbolen siehe Bianchi, *Geom. diff.*,

p. 90, 91, deutsch von Lukat, *Vorlesungen über Differentialgeometrie,* Leipzig, 1899 p. 66 u. ff.

Die letzte Gleichung entspricht einer Formel von Gauss, *Disqu. circa superficies curvas* etc., *Comment. Gott.*, 6, 1826 = *Werke*, 4; die beiden anderen wurden in ähnlicher Gestalt zuerst von Mainardi, *Giorn. dell' Ist. Lomb.*, 9, 1857, p. 395 entdeckt und später von Codazzi, *Ann. di mat.*, (2), 2, 1868 wieder aufgefunden. Sie führen den Namen *Codazzi'sche Formeln.*

Sind zwei quadratische Differentialformen

$$f = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$\varphi = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

gegeben, von denen die erste definit sei, d. h. ein constantes Vorzeichen habe (in welchem Fall $EG - F^2 > 0$ sein muss), so ist es, damit eine Fläche existire, für welche sie die erste und zweite Differentialform sind, nothwendig und ausreichend, dass die drei obigen (selbstverständlich die für den allgemeinen Fall geltenden) Formeln erfüllt seien; in diesem Fall existirt nur eine einzige solche Fläche, die ihrer Gestalt nach, aber nicht ihrer Lage im Raum nach bestimmt ist; um die Gleichung der Fläche zu erhalten, muss eine Gleichung vom Riccati'schen Typus (*Repert.*, Bd. 1, p. 173) *integrirt werden.*

Wenn speciell in der ersten Fundamentaldifferentialform einer Fläche

$$E = G, \quad F = 0$$

ist, so wird das System von Parameterlinien *orthogonal isotherm* genannt und u, v heissen *isometrische Parameter.*

Die isothermen Systeme theilen die Fläche in unendlich kleine Quadrate.

Die Linien u, v mögen ein *isothermes System mit isometrischen Parametern* bilden, d. h. die erste Differentialform habe die Gestalt

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2).$$

Nun ist es klar, dass, wenn

$$u = \Phi(u')$$
$$v = \Psi(v')$$

gesetzt wird, worin Φ, Ψ zwei willkürliche Functionen sind, die Parameterlinien $u =$ Const., $v =$ Const. nicht wesentlich verändert werden, d. h., die $u' = $ Const., $v' = $ Const. sind die nämlichen, wie $u = $ Const., $v = $ Const.; alsdann tritt jedoch die Differentialform in den Coordinaten u', v' nicht mehr unter der *isometrischen Form* auf; sie erhält die Gestalt:

$$ds^2 = E\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)^2 du'^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v'}\right)^2 dv'^2\right\},$$

worin die Coefficienten von du'^2 und dv'^2 nicht, wie früher, einander gleich sind, wenn auch das Coordinatensystem, da es sich nicht geändert hat, als *isotherm* anzusehen ist.

Wir sind daher genöthigt, einen Unterschied in Bezug auf den oben definirten Begriff zu machen.

Ein System (u, v) soll einfach *isotherm* heissen, wenn die Bedingungen

$$F = 0, \quad \frac{E}{G} = \frac{U}{V}$$

erfüllt sind, worin U und V Functionen von u allein, bez. von v allein sind; es soll dagegen *isotherm mit isometrischen Parametern* genannt werden, wenn überdies $E = G$ ist.

Jedem einfach isothermen System lässt sich stets eine isometrische Form geben.

Man kann immer auf unendlich viele Arten eine solche Vertauschung der Variablen (u, v) mit Variablen (u', v') vornehmen, dass das neue System isotherm wird.

Ist auf der Fläche ein isothermes System (u, v) gegeben, so erhält man jedes andere isotherme System (u', v'), wenn man annimmt, die complexe Variable $u' + iv'$ sei eine beliebige Function der complexen Variablen $u + iv$, d. h.

$$u' + iv' = \Phi(u + iv)$$

setzt, worin Φ das Symbol für eine willkürliche Function ist.

*Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die Linien $\varphi = $ Const. mit ihren orthogonalen Trajectorien ein isothermes System bilden, besteht darin, dass das Verhältniss zwischen dem ersten und zweiten Differentialparameter von φ**) *eine Function von φ allein sei.*

*) Die allgemeine Definition des ersten und zweiten Differentialparameters einer Function φ ist im *Repert.* 1, p. 218, 219 gegeben. Sie werden mit den Symbolen $\Delta_1\varphi$ und $\Delta_2\varphi$ bezeichnet und sind in unserem Fall

Auf jeder Rotationsfläche bilden die Meridiane und die Parallelkreise ein isothermes System.

Wenn das Linienelement einer Fläche sich auf die Form $(U+V)(du^2+dv^2)$ reduciren lässt, worin U und V Function von u allein bez. von v allein sind, so sagt man, *die Fläche sei vom Liouville'schen Typus.*

Zu den Liouville'schen Flächen gehören die Flächen 2^{ten} Grads und die Rotationsflächen.

Neuere Arbeiten über die Liouville'schen Flächen sind von **Königs**, *Compt. Rend.*, 1889; **Stäckel**, *Math. Ann.*, 35; **Ricci**, *Rend. Acc. Lincei*, 1893.

Wir wollen annehmen, es sei ein *isothermes* Coordinatensystem (u, v) auf der Fläche gegeben und dieses sei auf die isometrische Form reducirt, so dass also

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

ist, und wollen u, v als die orthogonalen Cartesischen Coordinaten eines Punkts einer Ebene interpretiren. Jedem Punkt der Fläche wird dann ein Punkt der Ebene entsprechen; *wir erhalten somit die Abbildung eines Theils der Fläche auf die Ebene.*

Eine solche Abbildung ist conform (isogonal, winkeltreu), d. h. die sich entsprechenden Winkel sind gleich. Vergl. *Repert.* 1, p. 350.

Im Allgemeinen seien u, v *isometrische* Coordinaten auf der Fläche oder einem Theil der Fläche; *um die allgemeinste conforme Abbildung dieser Fläche auf eine Ebene mit den Cartesischen Coordinaten x, y zu erhalten, braucht man nur anzunehmen, die complexe Variable $u + iv$ sei eine willkürliche Function der complexen Variablen $x + iy$ oder auch der Variablen $x - iy$; in dem ersten Fall sind die sich entsprechenden Winkel gleich und gleichgerichtet, in dem zweiten Fall gleich und entgegengesetzt gerichtet.*

$$\Delta_1\varphi = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\}.$$

Wenn man dann eine zweite Fläche oder einen zweiten Theil der Fläche hat, auf welchem u', v' die *isometrischen* Coordinaten sind, *so genügt, um die allgemeinste conforme Abbildung der einen Fläche auf die andere zu erhalten, die Annahme, die complexe Variable $u + iv$ sei eine willkürliche Function einer der beiden Variablen $u' + iv'$ oder $u' - iv'$.* Vergl. darüber auch *Repert.* 1, p. 396, 397.

Eine Abbildung eines Flächengebiets auf die Kugel bekommt man, wenn den Punkten der Fläche die Punkte einer Kugel so zugeordnet werden, dass die beiden Flächen in den entsprechenden Punkten *parallele Normalen* haben; ins Besondere, wenn von dem Mittelpunkt einer Kugel Halbmesser parallel zur positiven Richtung der Normalen in den verschiedenen Punkten der Fläche gezogen werden. Die Endpunkte dieser Halbmesser sind alsdann die den Punkten der Fläche entsprechenden Punkte der Kugel. Diese Abbildung pflegt *die Gauss'sche sphärische Abbildung* genannt zu werden.

Eine solche Abbildung ist im Allgemeinen nicht conform; sie ist es nur für die Flächen, deren mittlere Krümmung Null ist (*die Minimalflächen*, siehe weiter unten, § 12), *und für die Kugel.*

Die Coefficienten e, f, g der (*in Coordinaten u, v ausgedrückten*) *Differentialform, welche das Quadrat des Linienelements der abbildenden Kugel angibt, sind durch die Formeln*

$$e = -(KE + HD),$$
$$f = -(KF + HD'),$$
$$g = -(KG + HD'')$$

gegeben, in welchen

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}$$

ist*).

Die Differentialform

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

pflegt man *die dritte Differentialform in Bezug auf die Fläche* zu nennen.

Die Eigenschaften der sphärischen Abbildung, welche die

---

*) Ueber die Bedeutung von K und H siehe weiter unten § 10.

Krümmungslinien, die Asymptotenlinien etc. betreffen, werden in den folgenden Paragraphen besprochen.

Die ältesten Arbeiten über die Differentialgeometrie der Flächen sind Euler und Meusnier zu verdanken, welche die ersten Untersuchungen über die Krümmung der Flächen anstellten, *Mém. de Berlin,* 1760; *Mém. Sav. Étr.*, 1785. Grundlegend für diese Theorie waren dann die späteren berühmten Werke von Monge, *Application de l'analyse à la Géométrie,* Paris 1807—1809 (vergl. die von Liouville 1850 mit vortrefflichen Zusätzen ausgestattete Ausgabe) und von Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comment. Gott.* 6, 1826; *Werke,* 4, deutsche von A. Wangerin besorgte Ausgabe mit Anmerkungen in Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften, N. 57. Wir citiren hier die übrigen Arbeiten nicht besonders — das wird an der betr. Stelle geschehen — wir wollen nur noch angeben, dass als die neuesten und umfangreichsten Bücher über Differentialgeometrie ins Besondere die Werke von Darboux, *Théor. générale des surfaces,* 4 Bände, Paris 1887—1896 und von Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale,* Pisa 1894, deutsch von Max Lukat, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Leipzig 1899 zu erwähnen sind.

In den modernen Werken werden für die Rechnungen die sogenannten Christoffel'schen Symbole, *Crelle,* 70 benutzt, die wir zur grösseren Bequemlichkeit für den Leser hier zusammenstellen:

a) Symbole 1ter Art:

$$\begin{bmatrix}1\,1\\1\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},\qquad \begin{bmatrix}1\,2\\1\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\begin{bmatrix}1\,1\\2\end{bmatrix}=\frac{\partial F}{\partial u}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\qquad \begin{bmatrix}2\,2\\1\end{bmatrix}=\frac{\partial F}{\partial v}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\begin{bmatrix}1\,2\\2\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\qquad \begin{bmatrix}2\,2\\2\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

b) Symbole 2ter Art:

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}=\frac{G\dfrac{\partial E}{\partial u}+F\dfrac{\partial E}{\partial v}-2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2(EG-F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}=\frac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u}+2E\dfrac{\partial F}{\partial u}-E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)},$$

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{ {12 \atop 2} \right\} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{ {22 \atop 1} \right\} = \frac{-F\dfrac{\partial G}{\partial v} + 2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{ {22 \atop 2} \right\} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)}.$$

Die Derivirten der Coefficienten D, D', D'' der zweiten Differentialform werden durch die D selbst und die Christoffel'schen Symbole mit Hülfe von Formeln ausgedrückt, die Weingarten aufgefunden hat. Siehe Bianchi, *Differentialgeom.*, deutsche Ausg. p. 123.

Aus dem, was wir in diesem Paragraphen ausgeführt haben, geht hervor, dass die Studien über das Linienelement der Flächen und über die krummlinigen Coordinaten in enger Beziehung zu den Untersuchungen über die quadratischen Differentialformen, die Differentialparameter etc. stehen. Wir verweisen deshalb in Bezug auf die betreffende Literatur auf *Repert.*, 1, Kap. 9, § 4. Wir wollen hier nur noch hervorheben, dass die Aufsätze Beltrami's, *Giorn. di Batt.*, 2; *Ann. di mat.*, (1), 1, 1867; *Mem. Acc. Bologna,* 1869; *Math. Ann.*, 1 grundlegend für diese Studien gewesen sind. Siehe auch Ricci, *Lezioni sulla teoria delle superficie,* Verona-Padova 1898.

§ 9. Auf den Flächen gezogene Linien. Krümmungslinien. Conjugirte Tangenten. Geodätische Linien. Asymptotenlinien.

Eine auf einer Fläche gezogene Curve heisst *Krümmungslinie,* wenn die durch die Punkte der Curve gehenden Flächennormalen eine Curve doppelter Krümmung berühren, d. h. eine abwickelbare Fläche bilden.

Die Krümmungslinien bilden ein doppeltes Orthogonalsystem, d. h.:

durch jeden Punkt einer Fläche gehen immer zwei aufeinander senkrechte Krümmungslinien.

Längs jeder Krümmungslinie muss die Proportion

$$dx : dy : dz = dX : dY : dZ$$

bestehen, wenn mit X, Y, Z die Cosinus der Winkel bezeichnet werden, welche die positive Richtung der Flächennormalen mit den Axen bildet.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien ist

$$(FD'' - GD')dv^2 + (ED'' - GD)du\,dv + (ED' - FD)du^2 = 0.$$

worin D, D', D'' die ihnen in § 8 beigelegten Werthe haben.

Sie kann auch geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'dv, & D'du + D''dv \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn $z = f(x, y)$ die Gleichung der Fläche ist, und mit p, q die ersten Derivirten, mit r, s, t die zweiten Derivirten von z nach x und y bezeichnet werden, *so lautet die Differentialgleichung der Krümmungslinien:*

$$\{(1 + p^2)s - pqr\}dx^2 + \{(1 + p^2)t - (1 + q^2)r\}\,dx\,dy + \\ + \{pqt - (1 + q^2)s\}\,dy^2 = 0.$$

Auf der Kugel und auf der Ebene ist jede Linie Krümmungslinie.

Die Krümmungslinien einer Developpablen sind die Erzeugenden und die auf diesen senkrechten Trajectorien.

Wenn zwei Flächen sich längs einer Linie schneiden, die für beide Krümmungslinie ist, so schneiden sie sich unter constantem Winkel.

Wenn umgekehrt zwei Flächen sich unter constantem Winkel schneiden und ihr Schnitt für die eine Fläche eine Krümmungslinie ist, so muss er es auch für die andere sein.

Bei der Gauss'schen sphärischen Abbildung ist das einzige Liniensystem der Fläche, welches orthogonal bleibt, das System der Krümmungslinien.

Man nennt *Gesimsflächen* oder *modanirte Flächen* (nach Monge *„moulures"*, it. *superficie modanate*) Flächen, welche so beschaffen sind, dass die Krümmungslinien eines Systems in Ebenen liegen, die auf der Fläche senkrecht stehen.

Die Gesimsfläche wird durch die Bewegung einer ebenen Linie erzeugt, deren Ebene, ohne zu gleiten, auf einer abwickelbaren Fläche rollt.

Wenn man durch einen Punkt einer Fläche die beiden Krümmungslinien zieht, in diesem Punkt die Tangenten an sie legt und die Normale auf die Fläche errichtet, so schneidet die durch die Normale und jede der beiden Tangenten gehende Ebene die Fläche in einer Curve, die *Hauptnormalschnitt in diesem Punkt* genannt wird.

Daraus folgt, dass in jedem Punkt einer Fläche zwei Hauptnormalschnitte existiren, die sich rechtwinklig schneiden.

Die Krümmungsradien (in diesem Punkt) r_1, r_2 dieser beiden Hauptnormalschnitte heissen *die Hauptkrümmungsradien der Fläche* und die Krümmungsmittelpunkte dieser Normalschnitte sind *die beiden Krümmungscentren der Fläche* in diesem Punkt. Liegen die letzteren auf entgegengesetzten Seiten bezügl. des Punkts der Fläche, so sind die Hauptkrümmungsradien natürlich mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen.

Wenn die Liniencoordinaten u, v die Krümmungslinien der Fläche sind, so gelten die Beziehungen

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}, \quad F = 0,$$

worin r_1, r_2 die Krümmungsradien der die Linien $v =$ Const. bez. $u =$ Const. berührenden Normalschnitte sind.

Die Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(DD'' - D'^2)r^2 + (ED'' + GD - 2FD')r_1 + (EG - F^2) = 0.$$

Der Krümmungsradius R eines beliebigen Normalschnitts der Fläche lässt sich durch r_1, r_2 mit Hülfe der Euler'schen Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\sin^2\theta}{r_1}$$

ausdrücken, in der θ den Winkel bezeichnet, den die Ebene des Schnitts mit der Ebene des Hauptnormalschnitts bildet, welchem der Krümmungsradius r_2 entspricht.

Mittelst dieser Formel können die Krümmungsradien der Normalschnitte immer durch die Hauptkrümmungsradien ausgedrückt werden.

Das folgende Theorem dient dazu, die Krümmungsradien einer beliebigen auf einer Fläche gezogenen Linie als Function der Krümmungsradien der Normalschnitte darzustellen.

Der Krümmungsradius einer beliebigen auf einer Fläche gezogenen Curve ist gleich dem Krümmungsradius des die Curve *berührenden Normalschnitts, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den die Ebene des Normalschnitts mit der Osculationsebene der Curve bildet. Theorem Meusnier's.*

Wenn r_1 und r_2 dasselbe Vorzeichen haben, so heisst der entsprechende Punkt der Fläche *elliptischer Punkt*; ist $r_1 = r_2$, so wird er *Kreis- oder Nabelpunkt* genannt, haben dagegen r_1 und r_2 verschiedene Vorzeichen, so heisst er *hyperbolischer* und wenn einer der beiden Radien unendlich gross wird, *parabolischer Punkt.*

Im Fall des elliptischen Punkts liegt die ganze Fläche in der Umgebung des Punkts auf derselben Seite der Berührungsebene; in der Umgebung eines hyperbolischen Punkts dagegen liegt die Fläche zum Theil auf der einen, zum Theil auf der andern Seite der Berührungsebene.

Ist $DD'' - D'^2$ grösser als Null, so ist der Punkt elliptisch, ist dieselbe Grösse dagegen kleiner als Null, hyperbolisch.

Diese Unterscheidung der Punkte in elliptische, parabolische und hyperbolische entspricht der Eintheilung in Kap. 9 § 1, S. 205 für Punkte algebraischer Flächen. *Als Dupin'sche Indicatrix* (siehe ebenda) *kann man den Kegelschnitt ansehen, dessen Gleichung*

$$\frac{\xi^2}{r_1} + \frac{\eta^2}{r_2} = 1$$

lautet, der in der Berührungsebene an die Fläche liegt, und dessen Coordinatenaxen ξ und η bez. mit den Richtungen der Tangenten an die beiden durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinien zusammenfallen.

Das Quadrat eines gegen die η-Axe um den Winkel θ geneigten Halbmessers ϱ dieser Ellipse ist durch

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\theta}{r_2} + \frac{\sin^2\theta}{r_1}$$

gegeben. Vergleicht man diese Formel mit der Euler'schen, so ergibt sich $\varrho^2 = R$, d. h.: *Das Quadrat eines Halbmessers der Dupin'schen Indicatrix ist dem Krümmungsradius des durch den entsprechenden Durchmesser gelegten Normalschnitts gleich.* Dieses Theorem ist von Dupin, *Développements de Géom.*, Paris 1813; es lässt sich als eine geometrische Interpretation der Euler'schen Formel ansehen; daher kommt auch der Name *Dupin'sche Indicatrix.*

Zwei [illegible] Durchmesser (siehe S. 86) der Dupinschen Ind[illegible] *zwei conjugirte Tangenten* an die Fläche genannt. Ein doppeltes System von Linien auf der Fläche heisst *conjugirt,* wenn in jedem Punkt der Fläche die Tangenten an die beiden Linien, die durch ihn gehen, conjugirt sind.

Bezeichnet man mit θ, θ' die Winkel zwischen den beiden conjugirten Tangenten und der Krümmungslinie v, so besteht die Relation

$$\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\theta' = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Bei einem conjugirten System muss immer $D' = 0$ *sein,* und, *ist* $D' = 0$, *so ist das Liniensystem* (u, v) *conjugirt.*

Bei der sphärischen Abbildung von Gauss (vergl. § 8) *bleibt der Winkel zweier conjugirter Richtungen entweder erhalten oder er wird in seinen Supplementwinkel verwandelt, je nachdem der Punkt der Fläche hyperbolisch oder elliptisch ist.*

Der folgende Satz kann auch als eine neue Definition conjugirter Tangenten gelten.

Zwei Tangenten an eine Fläche in einem Punkt P sind conjugirt, wenn sich durch P auf der Fläche eine Berührungslinie an eine von ihnen so ziehen lässt, dass die der Fläche längs dieser Linie umschriebene Developpable zur Erzeugenden die andere Tangente hat.

Das System der Krümmungslinien ist das einzige, welches gleichzeitig orthogonal und conjugirt ist.

Die Asymptotenlinien (Inflexions- oder Haupttangentencurven) sind solche auf der Fläche gezogenen Linien, deren Osculationsebene in jedem Punkt mit der Berührungsebene an die Fläche zusammenfällt.

Die Asymptotenlinien bilden ein doppeltes System; durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei von ihnen, die im Allgemeinen nicht senkrecht aufeinander stehen. In jedem Punkt einer Asymptotencurve fällt die Tangente mit der zu ihr conjugirten zusammen.

Die Tangenten an die beiden Asymptotencurven fallen in jedem Punkt mit den Asymptoten der Dupin'schen Indicatrix zusammen.

Jede Asymptotencurve muss der Relation genügen:

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0.$$

Wenn man, wie gewöhnlich, mit p, q; r, s, t die der Gleichung der Fläche entnommenen ersten und zweiten Derivirten von z nach x und y bezeichnet, *so lautet die Differentialgleichung der Asymptotenlinien*

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Die Asymptotenlinien sind nur in den hyperbolischen Punkten der Fläche reell, in den elliptischen sind sie imaginär.

Auf einer abwickelbaren Fläche fallen die beiden Systeme asymptotischer Linien (mit den Erzeugenden der Fläche) zusammen.

In jedem Punkt einer Asymptotenlinie ist das Quadrat der zweiten Krümmung (Torsion) entgegengesetzt gleich der totalen Krümmung der Fläche (siehe § 10) *in demselben Punkt:*

$$\frac{1}{T^2} = -\frac{1}{r_1 r_2}, \quad \textit{Theorem von Enneper.}$$

Daher auch:

In jedem Punkt der Fläche haben die beiden Asymptotenlinien, die durch ihn gehen, dem absoluten Werth nach gleiche 2^te Krümmung.

Bei projectiven Transformationen bleiben die conjugirten Systeme und die Asymptotenlinien und bei Transformationen durch reciproke Radienvectoren die Krümmungslinien erhalten. Darboux.

Bei der sphärischen Abbildung von Gauss werden die Richtungen der Asymptotenlinien um einen rechten Winkel gedreht.

Wir wollen annehmen, auf der Bildkugel seien u', v' die Linien, welche die Bilder der *Asymptoten*linien auf einer Fläche sind, und wollen mit $\left\{ {12 \atop 1} \right\}'$, $\left\{ {12 \atop 2} \right\}'$ *die Christoffel'schen Symbole* (vergl. § 8) in Bezug auf das Linienelement der Kugel bezeichnen; *man erhält dann die einfache Relation*

$$\frac{\partial}{\partial u'} \left\{ {12 \atop 1} \right\}' = \frac{\partial}{\partial v'} \left\{ {12 \atop 2} \right\}'.$$

Wenn eine Fläche auf das System ihrer Asymptotenlinien bezogen wird, so nimmt das Quadrat des Linienelements die Form

$$\varrho^2 (e\,du^2 - 2f\,du\,dv + g\,dv^2)$$

an, worin $\varrho^2 = -r_1 r_2$ *ist, und* e, f, g *die Coefficienten der dritten Fundamentaldifferentialform bedeuten* (vergl. § 8).

Bei einer Regelfläche (vergl. Kap. 13, § 6) *sind die Asymptotenlinien eines Systems die Erzeugenden selbst.*

Das anharmonische Verhältniss der vier Punkte, in welchen eine veränderliche Erzeugende einer Regelfläche vier feste Asymp-

totenlinien des anderen Systems schneidet, ist constant. Theorem von Paul Serret, Théorie des courbes, 1860.

Wenn man von einer Linie L, die auf einer Fläche durch den Punkt P gezogen ist, die orthogonale Projection auf die Berührungsebene in P herstellt, so wird die Krümmung dieser Projection in P *die geodätische oder Tangential- oder Abwickelungskrümmung* der auf der Fläche gezogenen Linie *in dem Punkt* P genannt und der Krümmungsmittelpunkt der Projection von L auf die Berührungsebene heisst *der geodätische Krümmungsmittelpunkt der Linie L in P.*

Die geodätische Krümmung einer auf einer Fläche gezogenen Linie L ist der gewöhnlichen Krümmung der ebenen Linie gleich, in welche L sich verwandelt, wenn die der Fläche längs der Linie L umschriebene Developpable auf eine Ebene abgewickelt wird. Daher kommt der Name *Abwickelungskrümmung.*

Wenn ein beliebiges System u, v von Parameterlinien und eine beliebige Linie, deren Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ lautet, auf der Fläche gegeben sind, so ist die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_\varphi}$ dieser Linie φ in einem Punkt:

$$\frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial u} - E\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}} \right] \right\}.$$

Man pflegt diese Formel *die Bonnet'sche* zu nennen.

Der Radius der geodätischen Krümmung eines Parallelkreises der Rotationsfläche ist demjenigen Theil der Tangente an den Meridian gleich, welcher zwischen dem Berührungspunkt und der Rotationsaxe liegt.

Die auf einer Fläche gezogene Linie, welche die kürzeste Verbindung zweier beliebiger, hinreichend naher Punkte der Fläche ist, heisst *geodätische Linie der Fläche.*

Die Hauptnormale in jedem Punkt einer geodätischen Linie fällt mit der Flächennormalen zusammen. Auch diese Eigenschaft kann als Definition der geodätischen Linien angesehen werden.

Geodätische Linien sind diejenigen, für welche die geodätische Krümmung in jedem Punkt Null ist.

Eine geodätische Linie ist im Allgemeinen individualisirt, wenn zwei ihrer Punkte bestimmt sind, mithin auch, wenn ein Punkt, durch den sie gehen soll, und die Richtung ihrer Tangente in diesem Punkt gegeben sind.

Die geodätische (oder tangentiale) Krümmung einer Linie L in einem Punkt lässt sich auch auf die folgende Art definiren (sie führt von dieser Definition ihren Namen):

Man betrachte zwei unendlich nahe Punkte P, P' auf der Curve L und die geodätischen Tangenten in P, P'; die Grenze des Verhältnisses des Winkels, den diese Tangenten miteinander bilden, zu dem Bogen PP' von L, wenn P' sich unbegrenzt P nähert, ist die geodätische Krümmung der Linie L in P. Auf diese Weise ist die Definition der geodätischen Krümmung die natürliche Erweiterung der Definition der Krümmung ebener Linien.

Man hat Beltrami, *Giorn. di Batt.*, 2 ein Theorem zu verdanken, *mit dessen Hülfe sich der geodätische Krümmungsmittelpunkt einer Linie in einem Punkt bestimmen lässt:*

Man zeichnet auf der Fläche ein System von ∞^1 geodätischen Linien g und eine Linie l auf, deren Tangenten mit den g conjugirt sind; die Tangenten an die g in den Punkten der Linie l erzeugen eine Developpable mit einer Rückkehrkante s. Jedem Punkt von l entspricht so ein Punkt von s, indem man einem Punkt P von l den Punkt M zuordnet, in welchem die durch P gehende Erzeugende der Developpablen die Rückkehrkante berührt.

Der Punkt M ist der geodätische Krümmungsmittelpunkt in P der Linie, welche durch P geht und auf der geodätischen, ebenfalls durch P gehenden Linie senkrecht steht.

Die Differentialgleichung der geodätischen Linie lautet (Gauss):

$$\sqrt{EG-F^2}\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\left\{\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right\} + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{\partial F}{\partial u}du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv,$$

worin θ den Winkel bezeichnet, den die geodätische Linie mit den Linien $u =$ Const. *bildet, also*

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right),$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\frac{dv}{ds} \quad \textit{ist.}$$

Wenn die Linien u, v senkrecht aufeinander stehen, so wird

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}du - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}dv.$$

In dem Fall, in welchem das System der Linien u, v orthogonal isotherm ist, lautet die Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$\sqrt{E}\,d\theta = \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}du - \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u}dv.$$

Für eine Fläche vom Liouville'schen Typus (vergl. § 8), *deren Linienelement sich also auf die Form*

$$[\alpha(u) + \beta(v)](du^2 + dv^2)$$

reduciren lässt, ist die Gleichung der geodätischen Linien

$$\int\frac{du}{\sqrt{\alpha(u) - a}} \mp \int\frac{dv}{\sqrt{\beta(v) + a}} = b,$$

worin a und b zwei Integrationsconstante bedeuten. Wie man sieht, kann in diesem Fall die Gleichung der geodätischen Linien unmittelbar integrirt werden.

Bei den Developpablen lässt sich die Differentialgleichung der geodätischen Linien mittelst zweier Quadraturen integriren.

In jedem Punkt einer auf einer Rotationsfläche) gezogenen geodätischen Linie ist das Product aus dem Radius des betreffenden Parallelkreises mit dem Sinus des Neigungswinkels der geodätischen Linie gegen den betreffenden Meridian constant. Theorem von Clairaut.*

Wenn eine Krümmungslinie geodätisch ist, so muss sie eben sein, und jede ebene geodätische Linie ist eine Krümmungslinie.

---

*) Die Rotationsflächen sind, wie schon in § 8 gesagt wurde, Flächen vom Liouville'schen Typus.

Die auf den geodätischen Linien durch zwei zu ihnen orthogonale Trajectorien abgeschnittenen Bogen sind von gleicher Länge. Die orthogonalen Trajectorien einer einfach unendlichen Schar von geodätischen Linien heissen daher *geodätische Parallelen.*

Geodätischer Abstand zweier Punkte heisst die Länge des durch sie gehenden geodätischen Bogens.

Eine auf der Fläche gezogene Linie, deren Punkte denselben geodätischen Abstand von einem festen Punkt der Fläche haben, heisst *ein geodätischer Kreis.*

Eine Linie, deren Punkte solche geodätische Abstände von zwei festen Punkten haben, dass entweder ihre Summen oder ihre Unterschiede constant sind, heisst *eine geodätische Ellipse* bez. *Hyperbel.*

Geodätisches Dreieck wird das von drei geodätischen Curvenbogen gebildete Dreieck genannt.

Nennt man mit Gauss *totale Krümmung eines durch geschlossene Curven begrenzten Theils der Fläche* den Werth des über diesen Theil der Fläche erstreckten Doppelintegrals

$$\iint K\, d\sigma,$$

worin K das sogenannte *Krümmungsmass der Fläche* in jedem Punkt (vergl. § 10) bezeichnet und $d\sigma$ das Flächenelement ist, so erhält man das Theorem (von Gauss):

Die totale Krümmung eines geodätischen Dreiecks ist dem Ueberschuss der Summe seiner drei Winkel über zwei Rechte gleich. Daher für $K =$ Const.:

Auf einer Fläche von constanter Krümmung ist der Flächeninhalt eines jeden geodätischen Dreiecks dem Ueberschuss der Summe seiner drei Winkel über zwei Rechte proportional. Siehe das analoge Theorem von Albert Girard für die sphärischen Dreiecke weiter oben S. 62.

Dieser Satz wurde von Schering, *Gött. Nachr.*, 1867 verallgemeinert.

Ueber die Geometrie der geodätischen Dreiecke vergl. Christoffel, *Berl. Abh.*, 1868; Weingarten, *Berl. Ber.*, 1882; v. Mangoldt, *Crelle,* 94.

Geodätische Torsion (zweite Krümmung) einer auf der Fläche gezogenen Linie L in einem Punkt wird nach Bonnet die Torsion der geodätischen, die Curve L in diesem Punkt berührenden Linie genannt.

Die geodätische Torsion einer Linie fällt mit der gewöhnlichen Torsion für alle Linien und nur für die Linien zusam-

men, deren Hauptnormale unter constantem Winkel gegen die Fläche geneigt ist, speciell für die geodätischen und Asymptotenlinien.

Nennt man $\frac{1}{T_u}, \frac{1}{T_v}$ die geodätischen Torsionen der Parameterlinien u, v, so ist

$$\frac{1}{T_u} = \frac{GD' - FD''}{G\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\frac{1}{T_v} = \frac{FD - ED'}{E\sqrt{EG - F^2}}.$$

Die Relation zwischen der geodätischen Torsion $\frac{1}{T_l}$ *und der absoluten* $\frac{1}{T}$ *einer beliebigen Linie* l *ist*

$$\frac{1}{T_l} = \frac{1}{T} + \frac{d\omega}{ds},$$

worin ω *den Winkel zwischen der Hauptnormalen der Linie* l *und der Normalen zur Fläche bezeichnet und* s *der Bogen der Linie* l *ist.*

Krümmungslinien sind diejenigen, deren geodätische Torsion in jedem Punkt Null ist.

Wir haben an einem anderen Ort (Kap. 13, § 6) *die Strictionslinien einer Regelfläche* definirt; wir fügen jetzt hinzu:

Für jeden Punkt der Strictionslinie einer Regelfläche ist die geodätische Krümmung der zu den Erzeugenden senkrechten Trajectorien Null.

Ueber die geodätischen Linien des Ellipsoids gelten die folgenden Theoreme:

Jede von einem Nabelpunkt des Ellipsoids ausgehende geodätische Linie geht durch den diametral gegenüberliegenden Nabelpunkt.

Zwei gegenüberliegende Nabelpunkte lassen sich durch unendlich viele geodätische Bogen verbinden, die sämmtlich dieselbe Länge haben (wie bei der Kugel).

Verbindet man einen Punkt M *eines Ellipsoids durch geodätische Linien mit zwei sich nicht gegenüberliegenden Nabelpunkten, so halbiren die Richtungen der durch* M *gehenden Krümmungslinien die Winkel der beiden geodätischen Linien.*

Für jede auf einem Ellipsoid gezogene geodätische Linie ist das Product constant, welches sich ergibt, wenn der Abstand des Mittelpunkts von der Berührungsebene in einem Punkt der geodätischen Linie mit der Länge des Durchmessers multiplicirt wird, welcher der in demselben Punkt an die geodätische Linie gelegten Tangente parallel ist.

Mit der Untersuchung der Krümmungslinien hat Monge den Anfang gemacht, l. c., siehe oben § 8; Dupin, *Développ. de géom.*, Paris 1813, verdankt man die Forschungen über die *Asymptotenlinien* und die *conjugirten Richtungen*, wie auch die Einführung der *Indicatrix*, die seinen Namen trägt.

Ueber die Krümmungslinien folgten dann zahlreiche Arbeiten, die von verschiedenem Standpunkt ausgehen: Brioschi, *Ann. di scienze mat. e fis. di Tortolini*, 4, 1853; Ribaucour, *Compt. Rend.*, 1872; Darboux, ib., 1877, 1881; etc.

Von den durch einen Nabelpunkt gehenden Krümmungslinien handelten Cayley, *Phil. Mag.*, 1863; *Quart. Journ.*, 11, 1870; Frost, ib., 10; Hoppe, *Archiv für Math.*, 70, 1883. Zahlreich waren die Studien über die Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien: von Serret, *Crelle*, 18; Bonnet, *Journ. de l'Éc. pol.*, 33, 1853; Dini, *Ann. di mat.*, (2), 1; *Mem. Soc. italiana dei XL*, 3, 1869, etc.; Enneper, *Crelle*, 94 und von vielen Anderen.

Mit den geodätischen Linien befasste sich Gauss; Legendre nannte sie *des lignes minimes*; den Namen *geodätische Linien* bekamen sie von Liouville. Die ältesten Arbeiten über diese Linien sind ausser von Gauss von Steiner, *Berl. Ber.*, 1839; Jacobi, *Crelle*, 19, der die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid untersuchte; Minding, *Crelle*, 20; Liouville (siehe die *Appl. de l'Analyse à la Géom.* von Monge, Paris 1850, von Liouville besorgte Ausg.); Brioschi, *Ann. di scienze mat. e fis. di Tort.*, 4; Beltrami, *Rend. Ist. Lomb.* 1868; etc. Neuere Arbeiten sind von Weingarten, *Berl. Ber.*, 1882; Brill, *Münch. Abh.*, 1883; Ricci, *Atti Ist. Veneto*, 1893, 1894. Ueber die Geschichte der geodätischen Linien siehe Stäckel, *Leipz. Ber.*, 1893. Die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid werden auch in Bd. 2. Kap. 6 der *Fonct. ellipt.*, Paris 1888 von Halphen behandelt.

§ 10. Krümmungen der Flächen. Aufeinander abwickelbare Flächen.

Die Ausdrücke

$$K = \frac{1}{r_1 r_2},$$

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

heissen *die totale Krümmung (curvatura integra) von Gauss* bez. *die mittlere Krümmung* der Fläche in dem betrachteten Punkt.

Es gelten die Formeln

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}.$$

Ein anderes Krümmungsmass für Flächen wurde von Casorati, *Acta math.*, 14 (siehe auch Catalan, ib., 15) eingeführt und wird durch

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) \text{ dargestellt.}$$

Das Krümmungsmass K lässt sich durch eine Formel ausdrücken, in welche nur die Coefficienten der ersten Differentialform eingehen:

$$K = \frac{1}{2(EG - F^2)} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{E\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial G}{\partial u}\right] + \right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial E}{\partial v} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{F}{E\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial E}{\partial u}\right]\right\} \text{ (Gauss).}$$

Wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$z = f(x, y)$$

gegeben ist und

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

gesetzt wird, so erhält man die Formeln:

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$$H = \frac{2pqs - (1 + p^2)t - (1 + q^2)r}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Krümmungsmass K ist positiv in den elliptischen, negativ in den hyperbolischen, Null in den parabolischen Punkten.

Für eine Regelfläche ist K immer entweder negativ oder Null.

Wenn das Krümmungsmass längs einer Erzeugenden nicht Null ist, so ist es seinem absoluten Werth nach im Centralpunkt (siehe Kap. 13, § 6) *am grössten und nimmt ab, je weiter man sich auf der Erzeugenden von diesem Punkt entfernt.*

Eine Fläche, deren Krümmung K in allen Punkten Null ist, muss eine Developpable sein und umgekehrt.

Die Krümmung K von Gauss lässt sich durch die geodätischen Krümmungen $\frac{1}{\varrho_u}$, $\frac{1}{\varrho_v}$ *der beiden Parameterlinien mit Hülfe der Liouville'schen Formel, Journ. de Liouv., 16, ausdrücken:*

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{G}}{\varrho_u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E}}{\varrho_v} \right\},$$

worin Ω den Winkel zwischen den beiden Parameterlinien bezeichnet.

Die totale Krümmung einer Fläche lässt sich auch definiren als *der reciproke Werth der Grenze des Verhältnisses des unendlich kleinen Flächenelements zu dem diesem Element bei der sphärischen Abbildung entsprechenden sphärischen Element.*

Wenn sich zwischen den Punkten zweier Flächen eine solche Correspondenz feststellen lässt, dass die einander entsprechenden Linienelemente gleich werden, so heissen die beiden Flächen *aufeinander abwickelbar.*

Wenn zwei Flächen aufeinander abwickelbar sind, so kann man eine von ihnen (oder einen Theil einer von ihnen) durch Biegung allein ohne Faltung und ohne Dehnung auf die andere ausbreiten.

Die totale Krümmung einer Fläche in jedem Punkt ändert sich nicht, wenn die Fläche beliebig verbogen wird; oder, was dasselbe ist, *zwei aufeinander abwickelbare Flächen haben in den entsprechenden Punkten gleiche totale Krümmungen.* Man pflegt daher zu sagen, die Krümmung K sei eine *Biegungsinvariante.*

Durch Biegung der Fläche ändert sich die geodätische Krümmung einer beliebigen auf der Fläche gezogenen Linie nicht; speciell werden daher die geodätischen Linien der Fläche in die geodätischen Linien der transformirten Fläche verwandelt.

Die Gleichheit der totalen Krümmung der beiden Flächen in jedem Paar sich entsprechender Punkte *reicht nicht hin, damit die beiden Flächen aufeinander abwickelbar seien;* sie reicht aber dann hin, wenn in jedem Punkt der beiden Flächen die Krümmung constant ist; d. h.:

Zwei Flächen mit derselben constanten totalen Krümmung sind immer auf unendlich viele Arten aufeinander abwickelbar. Daraus folgt:

Eine developpable Fläche (deren Krümmung also Null ist) lässt sich immer auf die Ebene und eine Fläche mit constanter positiver Krümmung stets auf eine Kugel abwickeln.

Jede Fläche mit constanter Krümmung lässt ∞^3 Verbiegungen in sich zu.

Jede Fläche, die ∞^1 stetige Verbiegungen in sich zulässt, kann auf eine Rotationsfläche abgewickelt werden.

Helicoide heissen Flächen, die durch eine ebene oder gewundene Linie erzeugt werden, wenn diese um eine Axe rotirt, die ihrerseits gleichzeitig in sich selbst derart fortgleitet, dass das Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten, der Rotations- und Translationsgeschwindigkeit, constant bleibt.

Jedes Helicoid lässt sich immer auf eine Rotationsfläche abwickeln; die Schraubenlinien (Helixe) breiten sich dabei auf die Parallelkreise aus. Theorem von Bour.

Wenn man auf einer biegsamen Fläche eine Curve festhält, so kann die Fläche nur dann deformirt werden, wenn diese Curve eine asymptotische Linie ist.

Es ist möglich, eine Fläche auf zwei verschiedene Arten so zu deformiren, dass eine ihrer Curven C eine willkürliche Form Γ annimmt, wenn nur die erste Krümmung von Γ in jedem Punkt grösser als die geodätische Krümmung von C in dem entsprechenden Punkt ist.

Eine Fläche lässt sich auf unendlich viele Arten so verbiegen, dass eine beliebige auf ihr gezogene Linie Krümmungslinie der deformirten Fläche wird.

Es ist unmöglich, eine Fläche F derart zu deformiren, dass die asymptotischen Linien auch asymptotisch auf der deformirten Fläche bleiben, es sei denn, dass F eine Regelfläche ist und die in Betracht kommenden Asymptotenlinien nicht ihre geradlinigen Erzeugenden sind. Vergl. § 9.

Wenn zwei Regelflächen, welche nicht durch Deformation derselben Fläche 2^{ten} Grads entstanden sind, sich aufeinander abwickeln lassen, so müssen sich die Erzeugenden der einen bei der Deformation auf die der anderen legen. Theorem von Bonnet.

Leitungskegel einer Regelfläche wird der Kegel genannt, welcher durch die von einem Punkt aus parallel zu den Erzeugenden der Fläche gezogenen Geraden gebildet wird.

Jede Regelfläche lässt sich immer so deformiren, dass der Leitungskegel eine beliebige Form annimmt.

Eine Regelfläche kann immer so verbogen werden, dass eine beliebig auf ihr gezogene Linie Asymptotenlinie wird.

Bei der Deformation der Regelfläche lässt es sich immer so einrichten, dass eine ihrer geodätischen Linien sich in eine Gerade verwandelt.

Es ist auf ∞^1 Arten möglich, eine Regelfläche derart zu deformiren, dass eine beliebige auf ihr gelegene Curve eine ebene Linie wird.

Die einzigen Regelflächen, die auf Rotationsflächen abgewickelt werden können, sind die Deformirten des Regelhelicoids mit Minimalflächeninhalt *) (siehe weiter unten) *und des Rotationshyperboloids.*

Mit der Krümmung der Flächen hatten sich schon Euler und Meusnier beschäftigt; die Lösung des Problems gelang aber erst Gauss in § 8 der citirten *Disquisitiones* etc. Gauss ist auch die Entdeckung zu verdanken, dass sich die Krümmung K bei dem Verbiegen der Flächen nicht ändert. Zu den ersten wichtigen Arbeiten über die Applicabilität der Flächen gehören: Minding, *Crelle,* 19; Bour, *Ann. de l'Éc. pol.,* 59, 1861; Bonnet, ib., 61, 62; Codazzi, *Mém. prés. par divers savants à l'Ac. de Paris,* 27; etc.

---

*) Dieses Helicoid kann durch eine Gerade erzeugt werden, welche gleichförmig um eine zu ihr senkrechte Axe rotirt, während diese Axe gleichförmig in sich selbst fortgleitet.

Andere Arbeiten sind von Weingarten, *Crelle,* 59, 100; Ribaucour, *Compt. Rend.*, 70; Dini, *Giorn. di Batt.*, 2; etc.

Einer der ersten Versuche über die Biegung der Regelflächen ist von Minding, *Crelle,* 18; grundlegend ist der Aufsatz von Beltrami, *Ann. di mat.*, (1), 7, 1865.

Modernere, auf einer neuen Methode beruhende Forschungen von Weingarten über die Applicabilität der Flächen sind in den *Compt. Rend.*, 112, p. 607, 706 und *Acta math.*, 20 enthalten; eine Darlegung dieser neuen Methode Weingarten's findet man bei Darboux, *Théorie des surfaces,* Paris 1887—1896, 4, p. 308.

§ 11. Flächen von constanter totaler Krümmung. Pseudosphärische Flächen.

Eine Fläche mit constanter negativer Krümmung $K = -\frac{1}{R^2}$ pflegt man *eine pseudosphärische Fläche vom Radius R* zu nennen. *Oricyclus* heisst eine auf einer pseudosphärischen Fläche gezogene Curve, deren geodätische Krümmung constant und gleich $\frac{1}{R}$ ist.

Das Linienelement einer jeden Fläche von constanter positiver Krümmung $K = \frac{1}{R^2}$ *lässt sich auf die Form*

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\frac{u}{R}\,dv^2$$

reduciren.

Das Linienelement einer jeden Fläche von constanter negativer Krümmung $K = -\frac{1}{R^2}$ lässt sich auf eine der folgenden drei Formen zurückführen:

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2\frac{u}{R}\,dv^2, \qquad \text{(der hyperbolische Typus)},$$

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}\,dv^2, \qquad \text{(parabolischer Typus)},$$

$$ds^2 = du^2 + R^2\sinh^2\frac{u}{R}\,dv^2, \qquad \text{(elliptischer Typus)}.$$

Bei der ersten Form sind die auf einer bestimmten geodätischen Linie L senkrecht stehenden geodätischen Linien

($v =$ Const.) und ihre orthogonalen Trajectorien ($u =$ Const.) die krummlinigen Coordinaten*).

Bei der zweiten Form sind die Linien $v =$ Const. die geodätischen auf einer Linie L (Oricyclus) von constanter geodätischer Krümmung $\frac{1}{R}$ senkrecht stehenden Linien und ihre orthogonalen Trajectorien die Linien $u =$ Const.

Für die dritte Form endlich sind die Linien $v =$ Const. die von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien und ihre orthogonalen Trajectorien die Linien $u =$ Const.

Dem Linienelement einer jeden auf ihre Krümmungslinien bezogenen Fläche von constanter positiver Krümmung gleich 1 kann man die Form geben:

$$ds^2 = \sinh^2 \omega \, du^2 + \cosh^2 \omega \, dv^2,$$

worin ω der Relation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = - \sinh \omega \cosh \omega$$

genügen muss.

Das Linienelement einer jeden auf ihre Krümmungslinien bezogenen pseudosphärischen Fläche lässt sich in die Form

$$ds^2 = \cos^2 \omega \, du^2 + \sin^2 \omega \, dv^2$$

bringen, worin ω durch

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \sin \omega \cos \omega$$

gegeben ist.

Auf einer Fläche von constanter Krümmung existirt immer ein Coordinatensystem von der Beschaffenheit, dass die geodätischen Linien sich durch lineare Gleichungen zwischen den Coordinaten ausdrücken lassen und umgekehrt hat eine Fläche constante Krümmung, wenn die geodätischen Linien auf ihr sich durch lineare Gleichungen darstellen lassen. Theorem von Beltrami. Dieses Theorem lässt sich auf die mehrdimensionalen Räume ausdehnen. Vergl. Kap. 20, § 3.

Wir wollen nun *die pseudosphärischen Rotationsflächen* betrachten. Ihr auf die Meridiane und Parallelkreise bezogenes Linienelement ergibt sich aus:

---

*) Ein ähnliches Coordinatensystem wird auch zu Grund gelegt, um das Linienelement der Flächen mit constanter *positiver* Krümmung auf die weiter oben angegebene Form zu reduciren.

$$ds^2 = du^2 + \left\{ c e^{\frac{u}{R}} + c' e^{-\frac{u}{R}} \right\}^2 dv^2.$$

Je nachdem die Constanten c, c' dasselbe oder verschiedene Vorzeichen haben, oder eine von ihnen Null ist, *erhält man drei Typen von pseudosphärischen Rotationsflächen.* Diese drei Typen werden nach dem Typus der Form benannt, welche das auf die Meridiane und Parallelkreise als Coordinaten bezogene Linienelement annimmt.

1. *Der hyperbolische Typus. Die Constanten c, c' haben dasselbe Vorzeichen; das auf die Meridiane und Parallelkreise bezogene Linienelement ist durch*

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 \cosh^2 \frac{u}{R}\, dv^2 \quad \textit{gegeben.}$$

Diese Fläche wird durch die Curve

$$x = \lambda \cosh \frac{u}{R}, \quad y = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \sinh^2 \frac{u}{R}}\, du$$

bei ihrer Rotation um die y-Axe erzeugt.

2. *Der parabolische Typus. Eine der Constanten c, c' ist Null. Das auf die Meridiane und Parallelkreise bezogene Linienelement ergibt sich aus:*

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}\, dv^2.$$

Die Fläche entsteht durch Rotation der Curve (der Tractrix)

$$x = e^{\frac{u}{R}}, \quad y = \int \sqrt{1 - \frac{1}{R^2} e^{\frac{2u}{R}}}\, du$$

um die y-Axe.

Diese Tractrix besitzt die Eigenschaft, dass der Theil ihrer Tangente, der zwischen dem Berührungspunkt und der y-Axe (die eine Asymptote ist) liegt, constant (gleich R) bleibt. Siehe Kap. 17, § 14.

Die Fläche von diesem Typus heisst *Pseudosphäre.*

3. *Der elliptische Typus. Die beiden Constanten c, c' haben verschiedene Vorzeichen. Das auf die Meridiane und Parallelkreise bezogene Linienelement ist durch*

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 \sinh^2 \frac{u}{R}\, dv^2 \quad \textit{gegeben.}$$

Die Fläche wird durch die Rotation der Curve

$$x = \lambda \sinh \frac{u}{R}, \quad y = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \cosh^2 \frac{u}{R}}\, du$$

um die y-Axe erzeugt.

Die Asymptotenlinien einer pseudosphärischen Fläche haben in jedem Punkt constante Torsion. Enneper.

In jedem krummlinigen Vierseit, das von vier Asymptotenlinien einer pseudosphärischen Fläche begrenzt wird, sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich. Dini.

Von pseudosphärischen Flächen sind bemerkenswerth die Dini'schen, *Compt. Rend.*, 1865 und die Enneper'schen, *Gött. Nachr.*, 1868; von den letzteren ist die von Bianchi, *Diss.*, Pisa 1879; *Math. Ann.*, 16 studirte Fläche ein specieller Fall.

Unter den Flächen constanter *positiver* Krümmung ist die ebenfalls von Enneper untersuchte Fläche hervorzuheben, von welcher die Kuen'sche, *Münch. Ber.*, 1884 ein besonderer Fall ist.

Alle diese Flächen von constanter negativer oder positiver Krümmung haben die Eigenschaft gemeinschaftlich, dass sie ein System ebener Krümmungslinien besitzen.

Die Coordinaten eines Punkts der Enneper'schen Flächen lassen sich durch elliptische Functionen zweier Parameter ausdrücken; für die übrigen ebenerwähnten Flächen genügen dagegen die Kreisfunctionen.

Die pseudosphärische Fläche von Dini wird durch eine Tractrix erzeugt, die sich schraubenförmig um ihre Asymptote bewegt; siehe oben. *Sie ist daher ein Helicoid.*

Das eine System ihrer Krümmungslinien wird durch die Meridiane (die Tractrix) gebildet; das andere besteht aus Curven, die auf Kugeln beschrieben sind, deren Centrum auf der Axe liegt; diese Kugeln schneiden das Helicoid rechtwinklig.

Gegeben sei eine pseudosphärische Fläche vom Radius R; betrachtet man auf ihr ein System geodätischer Parallelen und schneidet auf jeder Tangente an diese geodätischen Linien vom Berührungspunkt aus ein Segment von der Länge = R ab, so ist der Ort der Endpunkte aller dieser Segmente eine neue pseudosphärische Fläche mit demselben Radius. Die gegebene und die neue Fläche bilden die beiden Schalen der Evolute einer Fläche, deren Normalen die eben beschriebenen Tangenten sind. Bianchi

Mit Hülfe dieses Theorems lassen sich aus einer pseudosphärischen Fläche unendlich viele andere ableiten; die in dem Satz enthaltene Transformation pflegt man *complementär* zu nennen (Bianchi); sie ist der specielle Fall einer allgemeineren, die Baecklund*'sche Transformation* genannt wird, *Lunds Univ. Årsskrift,* 19, 1883; *Math. Ann.,* 9, 19.

Wenn man die vorstehend besprochene Transformation auf eine Pseudosphäre (die von einer Tractrix erzeugte Rotationsfläche) anwendet, so ergibt sich die von Bianchi untersuchte Fläche; diese ist, wie schon gesagt wurde, der specielle Fall anderer von Enneper untersuchter Flächen, *welche dadurch ausgezeichnet sind, dass sie, wie das Dini'sche Helicoid, ein System ebener Krümmungslinien besitzen.*

Die Coordinaten eines Punkts der in Rede stehenden Fläche lassen sich als Funktionen zweier Parameter u, v mittelst der Formeln

$$x = 2R\frac{\sin u}{1+v^2\sin^2 u}(\cos v + v\sin v),$$

$$y = 2R\frac{\sin u}{1+v^2\sin^2 u}(\sin v + v\cos v),$$

$$z = R\left\{\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u + \frac{2\cos u}{1+v^2\sin^2 u}\right\} \quad \textit{ausdrücken.}$$

Die Fläche hat eine Doppelcurve.

Gipsmodelle dieser Fläche, wie auch des Dini'schen Helicoids befinden sich in der von L. Brill in Darmstadt herausgegebenen Sammlung, die jetzt, wie schon oben erwähnt wurde, in den Besitz der Firma Schilling in Halle übergegangen ist. Aus dieser Sammlung kann man auch Modelle der eben besprochenen Enneper'schen und Kuen'schen Flächen mit constanter positiver Krümmung beziehen.

Wie man eine sphärische Trigonometrie hat, so lässt sich auch eine *pseudosphärische* aufstellen, indem man *geodätische Bogen* an Stelle der *grössten Kreise* betrachtet.

Im Allgemeinen lässt sich sagen:

Die trigonometrischen Formeln in Bezug auf ein pseudosphärisches geodätisches Dreieck werden aus den Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie auf die Art abgeleitet, dass man den Radius R der Kugel mit $R\sqrt{-1}$ *vertauscht.* Diese Bemerkung machte zuerst Minding, *Crelle,* 19, 20.

[illegible] der Lobatschewsky'schen, nicht-euklidischen [illegible] (vergl. Kap. 21, § 2) finden thatsächlich ihre Interpretation auf den pseudosphärischen Flächen. Siehe darüber Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, Giorn. di Batt., 6, 1868. Vergl. auch die Darstellung in Klein's autographirten Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie.

Ueber die Flächen mit constanter Krümmung geben wir ausser den schon citirten Arbeiten noch an: Beltrami, Ann. di mat. (1), 7; Dini, Giorn. di Batt., 3; Bianchi, Math. Ann. 16; Giorn. di Batt., 20; Rend. Acc. Lincei, 1892, 1899; Lie, Archiv für Math., Kristiania 1879—81; Hazzidakis, Crelle, 88; Weingarten, ib., 94, 95; Darboux, Compt. Rend, [illegible] Ann. de l'Éc. norm., 1890; Guichard, ib., id.; etc. [illegible] erst kürzlich erschienene Arbeit über die Theorie der Flächen mit constanter Krümmung, die von der neuen Weingarten'schen Methode der Applicabilitätstheorie (siehe das Citat [illegible]) ausgeht, ist von Bianchi, Ann. di mat., (3), 2. Ueber die Transformationen der Flächen von constanter Krümmung sehe man ausser dem Aufsatz von Hazzidakis [illegible] l. c. auch die neueren Forschungen von Bianchi, Rend. [illegible] 1899 nach.

§ 12. Flächen von constanter mittlerer Krümmung. Minimalflächen.

Die beiden einer Fläche S von constanter positiver Krümmung $K = \frac{1}{R^2}$ parallelen Flächen, die von S um die Grössen $\pm R$ abstehen, sind von constanter mittlerer Krümmung $H = \pm \frac{1}{R}$.

(Bonnet.)

Umgekehrt giebt es zu jeder Fläche von constanter mittlerer Krümmung $\pm \frac{1}{R}$ eine ihr parallele im Abstand R von ihr liegende Fläche von constanter absoluter Krümmung $\frac{1}{R^2}$.

Betrachtet man die auf derselben Normalen liegenden Punkte der drei Flächen als einander zugeordnet, so ist die [illegible] Flächen von constanter mittlerer Krümmung einer [illegible] winkeltreu, und die Abbildung einer [illegible] Krümmung auf [illegible] *dieser beiden Flächen auf S derart, dass zweien auf dieser einen Fläche senkrechten Richtungen jedesmal zwei conjugirte Richtungen auf S entsprechen.* Siehe Chini, *Giorn. di Batt.*, 27, 1889.

Das Linienelement jeder Fläche von constanter mittlerer Krümmung $\pm \frac{1}{R}$ *nimmt, wenn es auf die Krümmungslinien u, v der Fläche bezogen wird, die Gestalt*

$$ds^2 = R^2 e^{\pm 2\theta} (du^2 + dv^2)$$

an, worin θ *der Relation*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = - \sinh\theta \cosh\theta \text{ genügt.}$$

Daher:

Die Krümmungslinien einer jeden Fläche constanter mittlerer Krümmung bilden ein isothermes System.

Jede Fläche constanter mittlerer Krümmung lässt sich unter Beibehaltung derselben mittleren Krümmung derart deformiren, dass die neuen Krümmungslinien die Trajectorien der früheren sind und einen constanten Winkel mit ihnen bilden. Bonnet.

Die Rotationsflächen von constanter mittlerer Krümmung erhält man nach dem Theorem Bonnet's (S. 496) aus der zu einer Rotationsfläche deformirten Kugel vom Radius R, indem man auf den Normalen auf der einen und der anderen Seite Längen gleich R abschneidet.

Man erhält so zwei Typen von Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung, welche *Unduloid* bez. *Nodoid* genannt werden.

Zur Definition der *Meridiancurve* dieser Flächen dient der folgende elegante Satz Delaunay's:

Die Meridiancurven des Unduloids und Nodoids sind Plancurven, welche von dem Brennpunkt einer Ellipse oder einer Hyperbel beschrieben werden, die auf einer Geraden rollen ohne zu gleiten. Diese Gerade ist dann die Rotationsaxe.

Lässt man dagegen eine Plancurve, welche von dem Brennpunkt einer Parabel beschrieben wird, die auf einer Geraden rollt ohne zu gleiten, um diese Gerade rotiren, so hat die so erzeugte Rotationsfläche eine mittlere Krümmung, die auch constant, aber Null ist. Sie ist mithin, wie aus dem Folgenden hervorgeht, eine Minimalfläche und heisst Catenoid.

Minimalflächen oder ***Elassoide*** **heissen solche Flächen, die unter allen durch dieselbe Begrenzung umschlossenen und unendlich wenig von ihnen verschiedenen Flächen den kleinsten Flächeninhalt haben.**

Bezeichnet man mit p, q, r, s, t die der Gleichung $z = f(x, y)$ der Fläche entnommenen partiellen Derivirten und setzt

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$
$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

so lautet die partielle Differentialgleichung der Minimalflächen

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0$$

oder

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0. \quad \text{(Lagrange).}$$

Bei den Minimalflächen sind die Hauptkrümmungsradien in jedem Punkt einander gleich und von verschiedenem Vorzeichen, d. h. also, die mittlere Krümmung H ist Null. Umgekehrt ist jede Fläche, deren mittlere Krümmung Null ist, eine Minimalfläche.

Die sphärische Abbildung einer Minimalfläche ist winkeltreu. Bonnet.

Die einzige reelle abwickelbare Minimalfläche ist die Ebene.

Auf jeder Minimalfläche bilden die Asymptotenlinien ein doppeltes orthogonales System und die Krümmungslinien ein doppeltes orthogonales isothermes System.

Die Coordinaten der Punkte einer Minimalfläche lassen sich aus den Formeln von Weierstrass

$$x = \text{dem reellen Theil von} \int (1 - \tau^2) F(\tau) d\tau,$$
$$y = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \int i(1 + \tau^2) F(\tau) d\tau,$$
$$z = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \int 2\tau F(\tau) d\tau \quad \textit{berechnen},$$

worin $F(\tau)$ eine beliebige Function der complexen Variablen τ bedeutet; jedem F entspricht eine bestimmte Minimalfläche und umgekehrt.

Werden mit τ_1, $F_1(\tau_1)$ die in Bezug auf die Variablen τ bez. $F(\tau)$ conjugirt complexen Variablen bezeichnet, so ergibt sich das Linienelement der Minimalfläche aus

$$ds^2 = (1 + \tau\tau_1)^2 F(\tau) F_1(\tau_1) d\tau d\tau_1$$

und der positive Hauptkrümmungsradius ist

$$r_2 = \tfrac{1}{2}(1+\tau\tau_1)^2\sqrt{F(\tau)\,F_1(\tau_1)}\,.$$

Den Weierstrass'schen Formeln kann man auch die Gestalt geben:

$x =$ dem reellen Theil von $\{(1-\tau^2)\varphi''(\tau)+2\tau\varphi'(\tau)-2\varphi(\tau)\}$,
$y =$ " " " " $\{i(1+\tau^2)\varphi''(\tau)-2i\tau\varphi'(\tau)-2i\varphi(\tau)\}$,
$z =$ " " " " $\{2\tau\varphi''(\tau)-2\varphi'(\tau)\}$,

worin die Function $\varphi(\tau)$ ihrerseits wieder eine willkürliche Function ist.

Alle algebraischen Minimalflächen ergeben sich aus diesen Formeln, wenn man voraussetzt, $\varphi(\tau)$ sei eine algebraische Function von τ.

Wenn zwei Minimalflächen aufeinander abwickelbar sind, so muss die der einen Fläche entsprechende Function F der mit der Exponentialgrösse $e^{i\alpha}$ multiplicirten Funktion F in Bezug auf die andere Fläche gleich sein, wobei unter α eine willkürliche reelle Constante verstanden wird. Auf diese Art erhält man die allgemeinsten Deformationen einer Minimalfläche, bei welchen sie ihren Charakter als solche beibehält.

Zwei so erhaltene Minimalflächen heissen *associirt.*

Setzt man $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so werden die beiden Minimalflächen *in Bezug auf die Applicabilität conjugirt genannt.* Bonnet.

Die auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen, die mithin auf unendlich viele Arten auf sich selbst abwickelbar sind, erhält man aus den Weierstrass'schen Formeln, wenn

$$F(\tau) = C\tau^k$$

gesetzt wird; darin ist k eine reelle und C eine beliebige Constante.

Für $k = -2$ sind die Flächen Helicoide.

Die einzige Minimalregelfläche ist das durch die Gleichung

$$z = m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

dargestellte Helicoid, das *Minimalregelhelicoid* genannt wird. *Theorem von Meusnier.*

Die Fläche, deren Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2} = m \cosh \frac{z}{m}$$

lautet, ist eine Minimalfläche, welche Catenoid (alisseide) *) *heisst; sie ist die Rotationsfläche, auf welche das Regelhelicoid des vorigen Theorems sich abwickeln lässt; sie ist die einzige Minimalrotationsfläche.*

Setzt man in den Weierstrass'schen Formeln

$$F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4},$$

so ergibt sich eine algebraische Minimalfläche, die *Henneberg-sche Minimalfläche* genannt wird; *sie ist eine einseitige Fläche* (siehe Kap. 18, § 1) *von der* 5^{ten} *Classe und der* 15^{ten} *Ordnung.*

Bezeichnet man mit $F_0(\tau)$ die Function, welche man aus $F(\tau)$ durch Vertauschung aller Coefficienten mit ihren conjugirten erhält und ist $F(\tau)$ eine derartige Function, dass

$$F(\tau) = -\frac{1}{\tau^4} F_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

wird, *so sind die so erhaltenen Flächen im Allgemeinen einseitig.*

Wird

$$F(\tau) = 3$$

gesetzt, so erhält man die Fläche, deren Punkte die Coordinaten haben:

$$\begin{aligned} x &= 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \quad (\tau = \alpha + i\beta), \\ y &= \beta^3 - 3\beta - 3\alpha^2\beta, \\ z &= 3(\alpha^2 - \beta^2). \end{aligned}$$

Diese Minimalfläche heisst *Enneper'sche Fläche. Sie ist* 9^{ter} *Ordnung; ihre Krümmungslinien sind cubische Plancurven vom Geschlecht Null und ihre Asymptotenlinien*

$$\alpha - \beta = \text{Const.}, \quad \alpha + \beta = \text{Const.}$$

sind cubische Raumcurven.

Die Enneper'sche Fläche lässt sich auf eine Rotationsfläche abwickeln.

Sie ist die Umhüllende der Ebenen, welche auf den Verbindungsgeraden der Punkte zweier Parabeln, die denselben Brennpunkt haben, in deren Mittelpunkt senkrecht stehen. Darboux.

Alle der Enneper'schen associirten (vergl. S. 499) *Flächen haben dieselbe Gestalt, wie die Enneper'sche Fläche.*

Setzt man

---

*) Die Construction der Meridiancurve des Catenoids wurde weiter oben S. 497 angegeben.

$$F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}},$$

so ergibt sich die sogenannte *Schwarz'sche Minimalfläche,* die von dem windschiefen aus den beiden Paaren sich gegenüberliegender Kanten eines regelmässigen Tetraeders gebildeten Vierseit begrenzt wird.

Diese Fläche löst für einen speciellen Fall das sogenannte *Plateau'sche Problem* auf, das darin besteht, für eine gegebene geschlossene Umgrenzung eine von diesem Umfang begrenzte Minimalfläche zu construiren, die in ihrem Inneren keine singulären Punkte enthält.

Experimentell löste Plateau das Problem, indem er einen Metalldraht von der Form des vorgeschriebenen Umfangs in eine etwas klebrige Flüssigkeit, z. B. in Glycerin, tauchte; die äusserst dünne Flüssigkeitsscheibe, die an der Umgrenzung haften bleibt, ist nach den Principien der Mechanik genau wie eine Minimalfläche geformt.

Von Minimalflächen ist schliesslich noch die sogenannte *Scherk'sche Translationsfläche* anzuführen, welche sich ergibt, wenn man diejenigen Lösungen der Differentialgleichung der Minimalflächen aufsucht, welche die Form

$$z = \varphi(x) + \varphi(y)$$

haben.

Ihre Gleichung lautet

$$z = \frac{1}{a}\{\log\cos(ax) - \log\cos(ay)\}, \quad \textit{Crelle}, \ 13, \ 1835.$$

Wenn bei einer Minimalfläche die Krümmungslinien des einen Systems eben sind, so müssen auch die des anderen Systems eben sein.

Jede auf einer Minimalfläche liegende Gerade ist Symmetrieaxe der Fläche.

Wenn eine Ebene die Minimalfläche in jedem ihrer Schnittpunkte orthogonal schneidet, so ist sie Symmetrieebene für die Fläche.

Wenn man von einem ganz speciellen von Euler, *Methodus inveniendi* etc., 1744 behandelten Fall absieht, war Lagrange, *Misc. Taur.*, 2 der Erste, der die Minimalflächen studirte und die Variationsrechnung auf sie anwandte.

Die Differentialgleichung der Minimalflächen wurde dann von Meusnier, Monge, Legendre, Ampère untersucht.

Andere bemerkenswerthe Arbeiten sind von Poisson, *Crelle*, 8; Scherk, l. c.; Steiner, *Berl. Ber.*, 1840, der ein Theorem über die den Minimalflächen *parallelen* Flächen fand; Bonnet, *Compt. Rend.*, 1853; Enneper, *Zeitschr. für Math.*, 9, 1864; Weierstrass, *Berl. Ber.*, 1866; Riemann, *Gött. Abh.*, 13, 1867; Beltrami, *Mem. Acc. di Bologna*, 1868; H. A. Schwarz, *Berl. Ber.*, 1872; *Crelle*, 80 und eine grosse Reihe weiterer Arbeiten, gesammelte math. Werke, Berlin 1890, Bd. 1; Lie, *Math. Ann.*, 14, 15; etc.

Weitere historische Angaben und eine erschöpfende Behandlung des Gegenstands findet man bei Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Paris 1889, 1, eine historische Uebersicht auch in dem citirten Aufsatz von Beltrami.

In der von L. Brill besorgten Sammlung befinden sich zahlreiche Gipsmodelle von Minimalflächen.

Mit den Flächen von constanter mittlerer Krümmung befassten sich speciell Delaunay, *Crelle*, 6; Sturm, ib., id.; Jellet, ib., 18; Dini, *Ann. di mat.*, (2) 7; etc.

§ 13. Evolutenflächen. Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch eine constante Relation verbunden sind.

Der Ort der beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte für die Punkte einer Fläche, vergl. § 9, heisst *Evolutenfläche* der gegebenen und diese selbst *Evolvente*.

Mittlere Evolute wird ferner die Fläche genannt, die von den Ebenen umhüllt wird, welche auf den Normalen zur gegebenen Fläche in den Mittelpunkten des die beiden Krümmungsmittelpunkte verbindenden Segments senkrecht stehen. Ribaucour.

Jede der beiden Schalen der Evolute lässt sich auch als der Ort der Rückkehrkante derjenigen Developpablen ansehen, welche von den Lothen gebildet werden, die längs der Punkte einer Krümmungslinie eines jeden der beiden Systeme auf die Fläche errichtet werden.

Diese Rückkehrkanten sind geodätische Linien der Evolutenfläche.

Auf der Evolutenfläche bilden die den Krümmungslinien der *gegebenen Fläche entsprechenden Linien ein conjugirtes System.* Vergl. § 9.

Bei einer Fläche, die so beschaffen ist, dass eine constante Relation zwischen ihren Hauptkrümmungsradien besteht, entsprechen sich die Asymptotenlinien auf den beiden Schalen der Evolute und umgekehrt.

Für solche Flächen) ist das Product der totalen Krümmungen in den entsprechenden Punkten der beiden Schalen der Evolute gleich* $\frac{1}{(r_1 - r_2)^4}$, *worin* r_1, r_2 *die beiden Krümmungsradien der gegebenen Fläche in jedem Punkt sind.* Halphen.

Speciell: *Bei den Flächen constanter Krümmung* K *und nur bei ihnen entsprechen die Asymptotenlinien auf den beiden Schalen der Evolute nicht nur einander, sondern auch den Asymptotenlinien der Fläche.*

Auf den beiden Schalen der Evolute von Flächen, für deren Krümmungsradien die Relation $r_1 - r_2 =$ Const. *besteht, und nur auf ihnen, entsprechen sich die Krümmungslinien.*

Jede Schale der Evolute einer Fläche, deren Krümmungsradien durch eine Relation verbunden sind, lässt sich auf eine Rotationsfläche abwickeln; und umgekehrt: Mit Ausnahme der (auf die Catenoide abwickelbaren) Regelflächen, die der Ort der Hauptnormalen der Curven von constanter Torsion sind, lässt sich jede andere auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche als eine Schale der Evolute einer Fläche ansehen, zwischen deren Krümmungsradien eine Relation besteht. Theorem von Weingarten.

Jede Schale der Evolute einer pseudosphärischen Fläche ist auf ein Catenoid abwickelbar.

Die Flächen, deren mittlere Evolute sich auf einen Punkt reducirt, wurden von Appell, *Amer. Journ.*, 10 studirt und die Flächen, deren Krümmungsradien der Gleichung

$$r_1 + r_2 = \mu \delta$$

genügen, worin μ eine Constante bezeichnet und δ der Abstand des Coordinatenanfangs von der Berührungsebene ist, wurden von Goursat untersucht, *Amer. Journ.*, 10.

Die mittlere Evolute einer Goursat'schen Fläche ist wieder eine Goursat'sche Fläche.

---

*) Manche Autoren nennen sie die Flächen W. Siehe S. 504.

Mit den Flächen, deren Hauptkrümmungsradien an eine constante Relation gebunden sind, beschäftigten sich Weingarten, *Crelle*, 62, 103, nach welchem sie von einigen Autoren die Flächen W genannt wurden (vergl. S. 503, Anm.), dann Beltrami, *Ann. di mat.*, (1), 7; Dini, ib., id.; Halphen, *Bull. Soc. math.*, 4; Lie, *Bull. des sciences math.*, 4; etc.

Beltrami und Dini bewiesen gleichzeitig, dass die einzigen windschiefen Regelflächen, zwischen deren Hauptkrümmungsradien eine constante Relation besteht, die Regelhelicoide sind. Uebrigens besitzen alle Regelhelicoide diese Eigenschaft.

Lipschitz, *Acta math.*, 10; *Compt. Rend.*, 1887 und Lilienthal, *Acta math.*, 11 behandelten den Fall, in welchem die *Differenz* zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien constant ist.

Die *Röhrenflächen* sind als solche, für welche einer der Krümmungsradien constant bleibt, ein specieller Fall der Flächen W. Offenbar sind die Minimalflächen und die Flächen constanter (absoluter oder mittlerer) Krümmung weitere specielle Fälle.

§ 14. Dreifache Orthogonalflächensysteme.

Wir wollen annehmen, es liegen drei Systeme von je ∞^1 Flächen vor von der Beschaffenheit, dass durch jeden Punkt eines gewissen Bereichs des Raums eine einzige Fläche von jedem der drei Systeme geht. Ordnet man jede Fläche eines jeden der drei Systeme den Werthen dreier Parameter $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ eindeutig zu, so kann man die letzteren als *krummlinige Coordinaten* der Punkte des Raums auffassen. Die drei Systeme von Flächen bilden, was man ein *dreifaches Flächensystem* nennt.

Sind x, y, z die Cartesischen Coordinaten der Punkte des Raums und

$$\varrho_1 = f_1(x, y, z),$$
$$\varrho_2 = f_2(x, y, z),$$
$$\varrho_3 = f_3(x, y, z)$$

die nach den Parametern ϱ aufgelösten Gleichungen der drei Flächen, so kann man sich die x, y, z durch die ϱ ausgedrückt denken, und eine Relation zwischen den ϱ entspricht der Gleichung einer Fläche in krummlinigen Coordinaten ϱ.

Das in krummlinigen Coordinaten ausgedrückte Quadrat des Abstands zweier unendlich naher Punkte des Raums ist alsdann:

$$ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2 + \\ + 2h_{12}\, d\varrho_1\, d\varrho_2 + 2h_{13}\, d\varrho_1\, d\varrho_3 + 2h_{23}\, d\varrho_2\, d\varrho_3,$$

worin

$$H_i^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_i}\right)^2,$$

$$h_{ij} = \sum \frac{\partial x}{\partial \varrho_i}\frac{\partial x}{\partial \varrho_j}$$

ist und unter dem Symbol $\sum$ verstanden wird, dass die Summe der drei Terme gebildet werden soll, die man durch Vertauschung von x mit y und z erhält.

Dieser Abstand heisst das *Linienelement des Raums.*

Wenn $h_{12} = h_{23} = h_{13} = 0$ ist, so steht jede der Flächen eines Systems auf jeder Fläche der beiden anderen Systeme senkrecht und umgekehrt; in diesem Fall heisst das dreifache System *dreifaches Orthogonalsystem.*

Grundlegend für die dreifachen orthogonalen Systeme ist das Dupin'sche Theorem:

In jedem dreifachen Orthogonalsystem ist die Schnittlinie zweier Flächen von verschiedenen Systemen eine Krümmungslinie beider Flächen.

Ferner, vollständiger:

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit man zweien aufeinander senkrechten Flächensystemen ein drittes zu beiden orthogonales System beiordnen könne, besteht darin, dass die beiden ersteren sich längs Krümmungslinien schneiden. Darboux, *Ann. de l'Éc. norm.,* 1866.

Jedes System von ∞^1 Kugeln oder Ebenen gehört zu unendlich vielen dreifachen Orthogonalsystemen.

Jedes System von parallelen Flächen gehört einem dreifachen Orthogonalsystem an; die Flächen der beiden übrigen Systeme sind die Developpablen, die durch die Normalen längs der Krümmungslinien der gegebenen Fläche erzeugt werden.

Bei dem dreifachen Orthogonalsystem bestehen zwischen den H, als Functionen der ϱ, die sechs sogenannten Lamé'schen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial \varrho_j \partial \varrho_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_j}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k} + \frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial \varrho_k}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k}\right) + \frac{1}{H_j^2}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_j}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_j} = 0.$$

... *...knen die H genügen müssen, sind ... damit man ein dreifaches Ortho- ... sie erfüllt sind, so existirt ein und ...onalsystem, welches ihnen entspricht.*

...mation des Raums durch reciproke Ra- ... dreifache Orthogonalsystem in ein anderes ...stem übergeführt.

...sten und am meisten studirten Systeme ... dreifache Orthogonalsystem der *confocalen* ...

... *drei Flächenschaaren* $(a^2 > b^2 > c^2)$:

$$\dots + \frac{z^2}{c^2+\varrho_1} = 1, \quad (-c^2 < \varrho_1 < +\infty),$$

$$\dots + \frac{z^2}{c^2+\varrho_2} = 1, \quad (-b^2 < \varrho_2 < -c^2),$$

$$\dots + \frac{z^2}{c^2+\varrho_3} = 1, \quad (-a^2 < \varrho_3 < -b^2),$$

... *lauter Ellipsoide, die zweite einschalige Hyper-* ... *dritte zweischalige Hyperboloide enthält.* Siehe ...

...Coordinaten, welche einem solchen dreifachen Ortho- ... entsprechen, pflegt man *elliptische Coordinaten* zu ...

... *des Linienelements in elliptischen Coordina-* ...

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left\{\frac{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1-\varrho_3)}{(a^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_1)(c^2+\varrho_1)}\,d\varrho_1^2 + \right.$$
$$+ \frac{(\varrho_2-\varrho_3)(\varrho_2-\varrho_1)}{(a^2+\varrho_2)(b^2+\varrho_2)(c^2+\varrho_2)}\,d\varrho_2^2 +$$
$$\left. + \frac{(\varrho_3-\varrho_1)(\varrho_3-\varrho_2)}{(a^2+\varrho_3)(b^2+\varrho_3)(c^2+\varrho_3)}\,d\varrho_3^2\right\}.$$

Die Theorie der krummlinigen Coordinaten im Raum wurde ... für den speciellen Fall elliptischer Coordinaten von Lamé, ... *prés. par divers savants à l'Académie de Paris,* 5, 1833; ... 2 und später von demselben Autor für den allgemeinen Fall orthogonaler Coordinaten eingeführt, *Crelle*, 5, 16; *Leçons sur les coordonnées curvilignes* Paris 1859. Vergl. auch C. G.

J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik,* herausg. von A. Clebsch, 1866.

Andere Arbeiten sind von Aoust, *Crelle,* 58; *Ann. di mat.,* (1), 6; (2), 2, 3, 5; Brioschi, ib., (2), 1; Codazzi, *Ann. di scienze mat. e fis. di Tortolini,* 8, 1857; *Ann. di mat.,* (2), 1, 2, 4, 5; Darboux, *Ann. de l'Éc. norm.,* 1866, 1878; Roberts, *Crelle,* 62; etc.

Neuer sind die Aufsätze von Bianchi, *Giorn. di Batt.,* 21, 22; *Ann. di mat.,* (2), 13, 14, 18, 19; *Rend. Acc. Lincei,* 1885, 1886, 1890; *Mem. Acc. Lincei,* 1887; etc. In diesen Arbeiten werden die Orthogonalsysteme, welche ein System pseudosphärischer Flächen (oder auch von Flächen constanter positiver Krümmung) von demselben Radius enthalten, nach Weingarten, der zuerst ihre Existenz erkannte, *Weingarten'sche dreifache Systeme* genannt.

Eine wichtige Classe dieser Systeme entdeckte im Jahr 1870 Ribaucour, *Compt. Rend.,* 70. Ueber das Fundamentaltheorem Weingarten's in Bezug auf diese Systeme berichtete zuerst Bianchi, *Rend. Acc. Lincei,* 25. Febr. 1885, 15. März 1885.

Ein neues Buch von Darboux, *Leçons sur les systèmes orthog.,* etc., Paris 1898 ist ausschliesslich der Theorie der *dreifachen Systeme* und der krummlinigen Coordinaten im Raum gewidmet.

§ 15. Liniencongruenzen.

Wir haben schon an einer anderen Stelle (Kap. 14) *die Liniencongruenzen im Raum,* die auch *Strahlensysteme* genannt werden, d. h. die Gesammtheiten von ∞^2 Geraden oder *Strahlen* des Raums, definirt.

Diese Theorie, welche in enger Beziehung zur Flächentheorie steht, wurde nicht nur vom Standpunkt der *Liniengeometrie* aus, sondern eingehend auch unter Zugrundelegung der *Infinitesimalgeometrie* studirt, wobei man sich die Congruenz beliebig (algebraisch oder nicht) vorstellte.

Wir wollen uns nun denken, die Congruenz werde durch eine Fläche geschnitten, und als Ausgangspunkt sei auf einem Strahl der Congruenz einer der Punkte angenommen, in denen dieser Strahl die Fläche trifft.

Es seien x, y, z die Coordinaten dieses Punkts und X, Y, Z die Richtungscosinus des Strahls.

Wir wählen ein krummliniges Coordinatensystem u, v auf der Fläche, setzen*):

$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = e,$$
$$\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = F, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = f,$$
$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = G, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = f',$$
$$\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = g$$

und führen *die beiden Fundamentaldifferentialformen*

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = ds_1^2 = \sum(dX)^2,$$
$$e\,du^2 + (f + f')du\,dv + g\,dv^2 = \sum dx\,dX$$

ein, von denen die erste das Quadrat des Linienelements der *sphärischen Abbildung der Congruenz* darstellt, d. h. derjenigen Curve, die man auf einer Kugel vom Radius 1 erhält, wenn von dem Centrum der Kugel Radien parallel zu den Strahlen der Congruenz gezogen werden, und die Schnittpunkte dieser Radien mit der Kugelfläche als den Strahlen der Congruenz entsprechend angesehen werden.

Bezeichnet man mit dp den kleinsten (unendlich kleinen) Abstand eines Strahls (u, v) der Congruenz von einem anderen ihm unendlich nahen $(u + du,\ v + dv)$, *so ist*

$$dp = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}\,ds_1}\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ e\,du + f\,dv, & f'du + g\,dv \end{vmatrix},$$

und, wenn r die Abscisse des Fusspunkts dieses kleinsten Abstands auf dem Strahl (u, v) bedeutet:

$$r = -\frac{e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Auf jedem Strahl bez. für jeden Strahl der Congruenz sind *die beiden Grenzpunkte, die beiden Brennpunkte (Focalpunkte), der Central- oder Mittelpunkt, die beiden Hauptebenen, die beiden Focalebenen* etc. zu unterscheiden, über deren Definition wir auf Kap. 14 verweisen.

---

*) Die Symbole Σ sollen sich über die drei Buchstaben x, y, z bez. X, Y, Z auf leicht verständliche Art erstrecken.

Die Abscissen r_1, r_2 der beiden Grenzpunkte sind durch die Wurzeln der Gleichung

$$(EG - F^2)r^2 + \{gE - (f + f')F + eG\}r + \\ + eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = 0,$$

und die Abscissen ϱ_1, ϱ_2 der beiden Brennpunkte durch

$$(EG - F^2)\varrho^2 + \{gE - (f+f')F + eG\}\varrho + eg - ff' = 0$$

gegeben.

Nennt man ω den Winkel, den der kleinste Abstand dp des Strahls (u, v) von dem Strahl $(u + du, v + dv)$ mit dem Loth bildet, dessen Fusspunkt in den Grenzpunkt fällt, so ist

$$r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega, \quad \textit{(die Hamilton'sche Formel).}$$

Wird mit $2d$ der Abstand der beiden Grenzpunkte und mit 2δ der Abstand der beiden Brennpunkte von einander bezeichnet, so erhält man

$$d^2 - \delta^2 = \frac{(f - f')^2}{4(EG - F^2)}.$$

Wenn unter γ der Winkel verstanden wird, den die Focalebenen miteinander bilden, so ist

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{d^2 - \delta^2}}{d}, \quad \sin\gamma = \frac{\delta}{d}.$$

Durch einen Punkt P eines Strahls l der Congruenz legen wir eine Ebene Π senkrecht zum Strahl und ziehen in Π um P eine unendlich kleine Curve c, die eine Fläche vom Inhalt A umschliesse. Auf der Bildkugel bestimmen dann die Radien, welche den von den Punkten von c ausgehenden Strahlen entsprechen, eine unendlich kleine geschlossene sphärische Curve c' mit einer Fläche vom Inhalt A'.

Die Grenze des Verhältnisses $\frac{A'}{A}$ heisst *das Dichtigkeitsmass der Congruenz im Punkt P.*

Das Dichtigkeitsmass der Congruenz in dem auf einem Strahl l liegenden Punkt P ist dem reciproken Werth des Products aus den Abständen der beiden auf l liegenden Brennpunkte von P gleich.

Das kleine Bündel von Strahlen, die von der Peripherie der Curve c ausgehen, heisst *ein unendlich dünnes Strahlenbündel* und die Gerade l seine *Axe.*

Schneidet man es mit der durch P gehenden und auf dem Fundamentalstrahl l senkrechten Ebene, so erhält man als Schnitt die Curve c; schneidet man es mit einer anderen zur ersten parallelen Ebene, die durch den Punkt P_1 von l geht, so ergiebt sich ein zweiter Schnitt c_1; *die Flächeninhalte der von diesen beiden Curven umschlossenen Ebenenstücke verhalten sich umgekehrt wie die Dichtigkeitsmasse in den betreffenden Punkten P und P_1.*

Wenn mit r die Abscisse des auf dem Strahl l liegenden Punkts P bezeichnet wird, *so ist das Dichtigkeitsmass in P*

$$\frac{EG-F^2}{(EG-F^2)r^2+\{gE-(f+f')F+eG\}r+eg-ff'}.$$

Das Dichtigkeitsmass ist immer reell; wenn auch die Brennpunkte reell sind, so ist das Dichtigkeitsmass für die Punkte, welche ausserhalb des Segments liegen, das die Brennpunkte verbindet, positiv, für die Punkte im Inneren des Segments negativ, in den Brennpunkten unendlich gross und hat den grössten negativen Werth in dem Mittelpunkt des Strahls; sind dagegen die Brennpunkte imaginär, so ist das Dichtigkeitsmass immer positiv und erreicht sein Maximum in dem Mittelpunkt des Strahls.

Ist eine Strahlencongruenz gegeben, so sind fünf Flächen von Bedeutung, die mit der Congruenz bemerkenswerthe Beziehungen haben; es sind die Flächen, die von den beiden Grenzpunkten, den beiden Brennpunkten und dem Mittelpunkt erzeugt werden. Sie heissen bezüglich *Grenzflächen, Focalflächen* und *Mittelfläche.*

Die Strahlen der Congruenz sind die den beiden Focalflächen gemeinsamen Tangenten.

Regelflächen einer Congruenz heissen die Flächen, deren Erzeugende Strahlen der Congruenz sind und *Hauptregelflächen der Congruenz* diejenigen, deren Strictionslinien mit dem Ort der Grenzpunkte der als Strahlen der Congruenz angehörigen Erzeugenden zusammenfallen.

Es gibt zwei Systeme von Hauptregelflächen.

Unter den Regelflächen der Congruenz existiren unendlich viele Developpable; insbesondere gibt es zwei Systeme solcher Developpablen.

Normalencongruenzen werden diejenigen genannt, deren Strahlen senkrecht auf derselben Fläche stehen.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit man eine Normalencongruenz habe, besteht darin, dass die Brennpunkte mit den Grenzpunkten zusammenfallen, oder die Focalebenen senkrecht aufeinander stehen.

Bei einer Normalencongruenz fallen die beiden Focalflächen mit den beiden Schalen der Evolute der zur Congruenz senkrechten Fläche zusammen, und das Dichtigkeitsmass in den Punkten dieser senkrechten Fläche fällt mit der totalen Krümmung derselben zusammen.

Wenn eine Normalencongruenz von Lichtstrahlen eine beliebige Anzahl von Reflexionen und Refractionen erleidet, so bleibt sie immer eine Normalencongruenz. Theorem von Malus-Dupin. Siehe auch Kap. 17, § 3 über die Kaustiken oder Brennlinien.

Mit diesem berühmten Theorem ist ein Satz von Beltrami, *Ricerche di analisi* etc., *Giorn. di Batt.*, 2, 3 verwandt, der aussagt:

Wenn man sich denkt, von den Punkten einer Fläche S gehen die Strahlen l einer Normalencongruenz aus, und zu dieser Congruenz sei die Normalfläche construirt, welche die Strahlen l in Punkten P schneidet, und wenn dann die Fläche S derart deformirt wird, dass die Strahlen der Congruenz unveränderlich mit ihr verbunden bleiben, so ist auch die neue so erhaltene Congruenz wieder Normalencongruenz und die zu ihr orthogonale Fläche ist der Ort der neuen Lagen der Punkte P.

Nach dem Malus-Dupin'schen Theorem ist die *Normalität* ein *Merkmal* der geradlinigen Congruenzen, das bei beliebig vielen Refractionen *invariant* bleibt. Levi-Civita, *Rend. Acc. Lincei,* 1900, p. 185 und 237 hat bewiesen, *dass es das einzige invariante Merkmal ist.*

Wenn in einer Strahlencongruenz der Abstand der Brennpunkte und zugleich der Abstand der Grenzpunkte constant bleiben, so sind die beiden Brennflächen pseudosphärische Flächen, deren Radius dem Abstand der Grenzpunkte gleich ist. Bianchi, *Ann. di mat.*, (2), 15.

Diese Congruenzen nannte *Bianchi pseudosphärische.*

Eine Congruenz, für welche

$$e : \frac{f + f'}{2} : g = E : F : G$$

ist, heisst *eine Ribaucour'sche isotrope Congruenz.*

Eine Fläche, welche von den Ebenen eingehüllt wird, die auf den Strahlen einer isotropen Congruenz in deren Mittelpunkten senkrecht stehen, ist eine Minimalfläche. Ribaucour.

Zugleich mit der Theorie der Flächen wurden von Monge und seinen Schülern die von den Normalen einer Fläche gebildeten Congruenzen studirt. Das oben angegebene von Malus gefundene Theorem über diese Normalencongruenzen bezog sich anfangs nur auf ein System von Strahlen, die von einem Punkt ausgehen. *Journ. de l'Éc. pol.,* cahier 14, 1808. Es wurde später von Dupin vervollständigt und erhielt so die Fassung, in der wir es gebracht haben. *Applic. de géom. etc. pour faire suite aux Développ. de géom.,* Paris 1822.

Die Congruenzen im Allgemeinen wurden dann von verschiedenen Autoren untersucht, von Gergonne, Quetelet und besonders auch von Hamilton, *Irish Trans.,* 15, 16, 17, 1828—1837; später wurde ihre Theorie von Kummer, *Crelle,* 57, 1860; *Berl. Monatsber.,* 1859—60 wieder aufgenommen und mit grossem Erfolg weiter entwickelt.

Diesen Arbeiten schliessen sich zahlreiche andere an. Die neuesten sind von Weingarten, *Crelle,* 98; Bianchi, l. c., Guichard, *Ann. de l'Éc. norm.,* (3), 6; *Compt. Rend.,* 1890, 1892; etc. Vergl. auch das wiederholt citirte Werk von Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale,* Pisa 1894, deutsch von Lukat, *Vorlesungen über Differentialgeometrie,* Leipzig 1899.

Kapitel XVII.

Metrisch specialisirte Haupterzeugungsarten und Transformationen von Curven und Flächen. Die Geometrie specieller Curven.

§ 1. Inverse und Desarguesische Curven und Flächen. Transformation durch reciproke Radienvectoren. Desarguesische Transformation.

Auf S. 159 wurde schon gesagt, dass sich die *Transformation durch reciproke Radienvectoren* oder die *Inversion* als specieller Fall einer birationalen quadratischen Transformation ergibt, wenn von den drei Fundamentalpunkten der Transformation zwei in die beiden Kreispunkte der Ebene und der dritte in den Anfangspunkt der *Cartesischen* Coordinaten verlegt werden.

Geometrisch lässt sich diese Transformation auf die folgende Art definiren:

Es sei in der Ebene ein Kreis vom Radius R gegeben, dessen Centrum im Coordinatenanfang O liege; einem Punkt der Ebene, dessen Radiusvector r und Argument φ ist, wird der Punkt vom Argument φ und Radiusvector $\frac{R^2}{r}$ zugeordnet. Der Radius R heisst *der Modul der Inversion* und der Punkt *O der Pol* oder *das Centrum der Inversion.*

Wenn man dieselbe Operation statt in der Ebene im Raum vornimmt und eine Kugel vom Radius R zu Grund legt, so erhält man *die Transformation durch reciproke Radienvectoren im Raum.*

Eine Curve oder Fläche wird auf diese Art in eine andere Curve oder Fläche übergeführt, welche die *Inverse der gegebenen* heisst.

Dem Punkt O entspricht die unendlich ferne Gerade bez. die unendlich ferne Ebene.

Die einzigen Punkte, die sich selbst entsprechen, sind die Punkte des Kreisees bz. der Kugel.

Einer durch den Pol O gehenden Geraden entspricht diese Gerade selbst.

Einer beliebigen Geraden entspricht ein durch O gehender Kreis. In dem Fall der ebenen Transformation ist die gegebene Gerade die Radicalaxe des Kreises vom Centrum O und des Kreises, der durch O geht.

Einem beliebigen Kreis entspricht ein anderer Kreis, der mit dem Fundamentalkreis (im Fall der ebenen Transformation) dieselbe Radicalaxe, wie der gegebene Kreis, gemeinschaftlich hat. Die Ausdehnung dieser Sätze auf die Transformation im Raum kann man leicht selbst ausführen.

Eine sehr wichtige Eigenschaft dieser Transformation besteht darin, *dass sie conform (isogonal, winkeltreu) ist, d. h. dass durch sie die Winkel nicht verändert werden.*

Bemerkenswerth ist das Theorem:

Die Normale zu einer Curve in einem Punkt P und die Normale zu ihrer inversen Curve in dem entsprechenden Punkt Q schneiden sich in einem Punkt des in dem Mittelpunkt von PQ auf PQ errichteten Loths.

Eine Curve oder Fläche, welche die Eigenschaft hat, sich mittelst einer besonderen Transformation durch reciproke Radienvectoren in sich selbst zu verwandeln, pflegt man *anallagmatisch* zu nennen.

Die anallagmatischen doppelt gekrümmten Curven 4^{ter} Ordnung hat Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces* etc., Paris (1873), 2. Aufl., 1896 *Cykliken* (cycliques) genannt. Sie sind die Schnitte einer Kugel mit einer Fläche 2^{ten} Grads.

Die anallagmatischen Flächen 4^{ter} Ordnung sind die *Cycliden.* Vergl. Kap. 12, § 7.

Moutard hat nachgewiesen, *dass jede anallagmatische Curve die Enveloppe einer Reihe von Kreisen ist, die auf einem festen Kreis senkrecht stehen, dessen Mittelpunkt im Centrum der Inversion liegt, und dessen Radius der Modul der Inversion ist.* Siehe die Citate in Kap. 12, § 7.

Nach dem Namen Desargues pflegt man *Desarguesische Transformation* (fr. *Transf. Arguésienne*, it. *trasf. Arguesiana*) die quadratische Transformation zu nennen, welche metrisch durch die folgende geometrische Construction specialisirt wird.

Es sei ein Fundamentaldreieck ABC gegeben; man erhält den einem Punkt P entsprechenden Punkt, wenn P mit den drei Ecken verbunden wird und dann die zu AP, BP, CP in Bezug auf die Halbirungsgeraden der drei Dreieckswinkel symmetrischen Geraden gezogen werden. Der Schnittpunkt dieser drei Geraden ist der dem Punkt P entsprechende Punkt.

Die so transformirte Curve heisst die *Desarguesische der gegebenen Curve.*

Der dem Dreieck ABC umschriebene Kreis ist die Desarguesische Curve der unendlich fernen Geraden der Ebene. Die Desarguesische Curve eines Durchmessers dieses Kreises ist eine gleichseitige Hyperbel.

Diese Transformation wurde untersucht von Cayley, *Journ. de Liouv.*, 1849; Mathieu, *Nouv. Ann.*, 1865, p. 393, 481, 529; Saltel, *Mém. de l'Ac. de Belg.*, 1872; etc.

Sie verdankt dem letzten Autor ihre Benennung; sie wurde schon von Steiner und Magnus studirt.

§ 2. Fusspunktcurven bez. -flächen ebener Curven und Flächen. Radiale Curven ebener Curven.

Fusspunktcurve (Pedalcurve, franz. *podaire, pedale)* oder auch speciell *positive* oder *directe Fusspunktcurve eines Punkts P in Bezug auf eine ebene Curve C* ist der geometrische Ort der Fusspunkte der von dem gegebenen Punkt, dem *Pol* oder *Centrum,* auf die Tangenten an die Curve C gefällten Lothe.

Die gegebene Curve heisst dagegen *negative* oder *inverse Fusspunktcurve* in Bezug auf die eben definirte Fusspunktcurve.

Aehnliche Definitionen gelten für die *Fusspunktflächen einer Fläche.*

Die Normale in einem Punkt der Fusspunktcurve geht durch den Mittelpunkt des Segments, welches den Pol mit dem entsprechenden Punkt der Curve C verbindet.

Die Fusspunktcurve einer Curve C vom Pol P aus ist die durch reciproke Radienvectoren transformirte Curve (d. h. die *Inverse*) *der reciproken Polarcurve von C in Bezug auf einen beliebigen von dem Centrum P aus beschriebenen Kreis.*

Nennt man s', ϱ' den Bogen und den Krümmungsradius der Fusspunktcurve und s, ϱ diejenigen der gegebenen Curve, r den Abstand des Punktes P von den Punkten Q der gegebenen Curve, θ den Winkel, den PQ mit der Tangente in Q bildet, *so erhält man die natürliche Gleichung der Fusspunktcurve durch Elimination von s aus*

$$s' = \int \frac{r}{\varrho}\, ds, \quad \text{und} \quad \varrho' = \frac{r^2}{2r - \varrho \sin\theta}.$$

Das folgende Theorem von Steiner, *Crelle*, 21 über die Fusspunktcurven ist bemerkenswerth:

Wenn man von einer geschlossenen Curve C ohne Wendungen die Fusspunktcurve in Bezug auf einen beliebigen Punkt P construirt, sich dann die nämliche Curve C starr mit P verbunden denkt und sie auf einer Geraden so rollen lässt, dass P eine sogenannte cycloidenartige Curve oder Roulette beschreibt (vergl. § 6), *so ist der Bogen der letzteren dem entsprechenden Bogen der Fusspunktcurve gleich, und der Inhalt der von der Roulette und der Geraden begrenzten Fläche ist doppelt so gross als der Inhalt der von der Fusspunktcurve eingeschlossenen Fläche.*

Ferner:

Wenn man die Fusspunktcurve in Bezug auf den Pol P auf der von dem Punkt P auf die eben angegebene Art beschriebenen Roulette rollen lässt, so ist der Ort des Punkts P eine Gerade. Theorem von Habich.

Die Inverse des Radiusvectors einer ebenen Curve C ist der Differenz zwischen den Inversen der Krümmungsradien der Fusspunktcurve und der Roulette der Curve C gleich, wenn die Fusspunktcurve den Anfangspunkt der Radienvectoren zum Pol hat und die Roulette durch den nämlichen mit der Curve C starr verbundenen Punkt bei dem Rollen von C auf einer Geraden erzeugt wird.

Vergl. P. Franck, *Ueber die Flächeninhalte und Bogenlängen von Fusspunktcurven und Rollcurven, Leipziger Diss.* 1899; Kowalewski, *Ueber Fusspunktcurven von Ovalen mit Mittelpunkt, Leipz. Ber.*, 1901.

Eine Beziehung zwischen der Fusspunktcurve und der Brennlinie findet man in § 3.

Die *radiale Curve* einer ebenen Curve C ist der geometrische Ort der Endpunkte der von einem festen Punkt ausgehenden Segmente, welche dieselbe Länge und Richtung haben, wie die Krümmungsradien der Curve C. Tucker.

Die radiale Curve des Kegelschnitts

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hat, wenn der Anfangspunkt der Segmente mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt, die Gleichung:

$$(a^2x^2 \pm b^2y^2)^3 = a^4b^4(x^2 + y^2)^2, \quad \text{Tucker.}$$

Die radiale Curve einer algebraischen Curve n^{ter} *Ordnung ist im Allgemeinen eine algebraische Curve* $3n(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung.* Loria.

Die radiale Curve einer rationalen Curve n^{ter} *Ordnung ist im Allgemeinen von der Ordnung* $6(n-1)$. Loria.

Von Literatur geben wir an:

Tucker, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1, 1865; *Quart. Journ. of Math.*, 18, 1882; Loria, *Periodico di Mat.*, t. 17, 1901; *Rend. Palermo,* t. 16, 1902.

§ 3. Kaustische Curven und Flächen.

Wenn von einem Punkt in endlichem oder unendlich grossem Abstand, dem *leuchtenden Punkt,* Strahlen ausgehen und auf eine ebene Curve, die *Dirimante,* franz. *dirimante,* it. *curva dirimente* einfallend, von dieser *reflectirt* oder *gebrochen**) werden, so nennt man die Enveloppe der so reflectirten bez. gebrochenen Strahlen die *Brennlinien* oder *Kaustiken* der Curve. Diese werden daher in *Kaustiken durch Reflexion (Katakaustiken* oder *katoptrische Kaustiken)* und *Kaustiken durch Refraction* (*Diakaustiken* oder *dioptrische Kaustiken*) unterschieden.

Man kann den Begriff der Kaustiken erweitern, wenn man sich denkt, die einfallenden Strahlen gehen, anstatt von einem Punkt, allgemeiner in normaler Richtung von einer gegebenen Curve aus, d. h. sie bilden ein sogenanntes *Normalensystem.* Ferner lassen sich selbstverständlich diese Unter-

*) Wenn ein in einen Punkt P einer Curve einfallender Strahl gegeben ist, so heisst, wie man aus den Elementen der Physik weiss, durch die Curve *reflectirt* derjenige Strahl, der mit der Normalen zur Curve in P denselben Winkel bildet, wie der Einfallstrahl; *gebrochen* heisst dagegen der Strahl, wenn das Verhältniss der Sinus der Winkel, welche der Einfallstrahl und der gebrochene Strahl mit der Normalen zur Curve in P machen, constant ist. Dieses constante Verhältniss wird *Brechungsexponent* genannt.

suchungen auf den Raum ausdehnen, indem man sich ein doppelt unendliches System einfallender Strahlen (die von einem Punkt oder normal von einer Fläche ausgehen) vorstellt, d. h. eine sogenannte *Normalencongruenz* einfallender Strahlen (vergl. Kap. 16), alsdann eine beliebige zweite Fläche annimmt und den Ort der Schnittpunkte der von dieser zweiten Fläche reflectirten oder gebrochenen einander unendlich nahen Strahlen betrachtet.

Das Theorem von Malus-Dupin über die normalen Strahlencongruenzen (Kap. 16, § 15) enthält als speciellen Fall offenbar den folgenden:

Ist in der Ebene ein Normalensystem (d. h. sind die Normalen einer Curve) gegeben, so ergibt sich nach einer beliebigen Anzahl von Reflexionen oder Refractionen immer wieder ein Normalensystem, d. h. es wird immer eine Curve existiren, welche diese reflectirten oder gebrochenen Strahlen zu Normalen hat.

Auf diese Art stellen sich die ebenen Brennlinien als die Evoluten gewisser Curven dar, die Quetelet *secundäre Brennlinien oder antikaustische Linien* nannte.

Es gelten nun die folgenden allgemeinen Sätze von Gergonne:

I. *Die Brennlinie durch Reflexion eines ebenen Normalensystems ist die Evolute der Enveloppe aller Kreise, deren Mittelpunkte auf der reflectirenden Curve liegen, und welche die Curve berühren, auf der die einfallenden Strahlen senkrecht stehen.*

II. *Die Brennlinie durch Refraction eines ebenen Normalensystems ist die Evolute der Curve, welche die Kreise umhüllt, deren Mittelpunkte auf der brechenden Curve liegen, und deren Halbmesser in dem Verhältniss* $\frac{1}{n}$ *zu dem Abstand der Mittelpunkte von der Curve stehen, auf welcher alle einfallenden Strahlen normal sind; dabei bezeichnet* n *den Brechungsexponenten.*

Für den Fall, dass die einfallenden Strahlen von einem Punkt P in *endlichem* Abstand ausgehen und als auf ihnen senkrechte Curve der Umfang eines Kreises vom Radius Null und mit dem Centrum in P gewählt wird, sind Theoreme vorhanden, die von Quetelet herrühren; für den Fall dagegen, dass P in endlicher oder unendlich grosser Entfernung liegt und als normale Curve der Umfang eines Kreises mit dem Centrum in P und beliebigem Halbmesser bez. eine auf der Richtung der einfallenden Strahlen senkrechte Gerade angenommen wird, hatten Gergonne und Sarrus schon zu einer Zeit Theoreme aufgefunden, als der erstere die oben angegebenen eleganten Sätze noch nicht aufgestellt hatte.

Erweiterungen dieser Theoreme auf *kaustische Flächen*, deren antikaustische Flächen sich auch hier wieder als Enveloppen von Kugeln ansehen lassen, findet man bei demselben Autor Gergonne in einer Arbeit, die in Bd. 15, p. 13, 307 der *Ann. de Gergonne* enthalten ist; wir halten es nicht für nöthig, darauf einzugehen.

Der Winkel, den die Tangente an die secundäre Brennlinie mit dem von dem leuchtenden Punkt aus gezogenen Radiusvector bildet, ist dem Winkel zwischen der Tangente an die reflectirende bez. brechende Curve und dem ebenfalls vom leuchtenden Punkt aus gezogenen Radiusvector gleich.

Der Winkel zwischen den Radienvectoren der secundären Brennlinie und der brechenden Curve ist dem Brechungswinkel gleich.

Die Fusspunktcurve einer gegebenen Curve von einem festen Punkt aus ist die secundäré Brennlinie durch Reflexion einer der gegebenen ähnlichen Curve, wenn der leuchtende Punkt in dem festen Punkt angenommen wird. Dandelin, *Mém. de l'Ac. de Belg.*, 4; Genocchi, *Ann. di Tortolini,* 6, p. 117; Emil Weyr, *Zeitschr. für Math.*, 1869, p. 376; *Wien. Ber.*, 1869, p. 169.

Tschirnhausen untersuchte zuerst die ebene Brennlinie, die von Parallelstrahlen erzeugt wird, welche durch einen Kreis reflectirt werden, *Acta Eruditorum*, 1682; die Commissare der Academie der Wissenschaften in Paris Cassini, Mariotte, De La Hire fanden jedoch, dass seine Untersuchungen Fehler enthielten. Spätere Arbeiten über die Brennlinien sind von Bernoulli, L'Hospital, etc.

Malus beschäftigte sich im Jahr 1810 zuerst mit der allgemeinen Theorie der Brennflächen und fand werthvolle Theoreme, denen er jedoch nicht die allgemeine Fassung zu geben vermochte, die sie später 1822 von Dupin, *Ann. de Gergonne,* 14, p. 129 erhielten.

Schon im Jahr 1815 hatte Gergonne, *Ann. de Gergonne,* 5, p. 283; 11, p. 229; 14, p. 1 die Existenz der Theoreme über die secundären Brennlinien für den Fall, in welchem die einfallenden Strahlen von einem Punkt ausgehen, für wahrscheinlich gehalten; Quetelet, ib., 15, p. 205 wies dann ihre Gültigkeit für den speciellen Fall eines Kreises als Dirimante nach und dehnte sie

Mém. de l'Ac. de Brux., 3, p. 89 auch auf den Fall ganz beliebiger Dirimanten aus.

In der Zwischenzeit studirte Sarrus den Fall *paralleler* Einfallstrahlen und Gergonne gab zuerst der von Quetelet gefundenen Construction eine allgemeinere Form und stellte dann die oben angeführten allgemeinsten Sätze für ein beliebiges *Normalensystem* einfallender Strahlen auf.

In der Arbeit von Gergonne auf p. 345 u. ff. in Bd. 15 der *Ann. de Gergonne* findet man eine Geschichte dieser Forschungen; es wird in ihr auch über das Resultat, zu dem Sarrus gekommen war, berichtet.

Andere Schriften über dasselbe Thema sind von Timmermans, *Corresp. math.*, 1, p. 336, über die antikaustischen Flächen von Cayley, *Lond. Phil. Trans.*, 147, p. 273, etc.

Eine Zusammenstellung der Literatur über die Kaustiken ist in dem *Intermédiaire des math.*, 1895, p. 321 enthalten.

§ 4. Parallele Curven und Flächen. Conchoide für Curven und Flächen.

Gegeben sei eine ebene Curve; eine ihr *parallele* Curve ist die Enveloppe der zu den Normalen der Curve senkrechten Geraden, die von der Curve in beiden Richtungen um eine feste Länge $\pm k$ abstehen.

So sind zwei parallele ebene Curven auch *gleichweit abstehend.*

Zwei parallele ebene Curven haben dieselben Krümmungsmittelpunkte.

Manchmal kommt es vor, dass die zu einer gegebenen parallele Curve in zwei Theile zerfällt, in den $a + k$ und den $a - k$ entsprechenden Theil, im Allgemeinen jedoch erhält man zwei Aeste derselben Curve.

Ueber die Theorie der Parallelcurven siehe Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. d. höh. eb. Curv.*, Leipzig 1882, § 118 u. ff.; Cesàro, *Geom. intrinseca*, p. 29, deutsch von Kowalewski, *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, Leipzig 1901; etc.

Offenbar lassen sich analog auch *parallele Flächen* definiren.

— —

Die sogenannten *Conchoiden, Muschellinien*, erhält man aus einer gegebenen Curve C auf die folgende Art: Es sei O ein Punkt der Ebene und P ein Punkt der Curve C; auf dem

Radiusvector OP trägt man auf der einen und der anderen Seite von P zwei Segmente von der Länge $\pm k$ ab. Der Ort der Endpunkte dieser Segmente bei dem Variiren von P ist alsdann die *Conchoide.*

Auf ähnliche Art werden *die Conchoiden für Flächen* definirt.

Die Construction der Normalen an die Conchoide lässt sich leicht ausführen; man braucht nur in O ein Loth auf den Radiusvector zu errichten und den Schnitt S dieses Loths mit der Normalen zur Curve C zu suchen: *die Normalen zur Conchoide in den beiden dem Punkt P entsprechenden Punkten gehen durch S.*

Mit anderen Worten:

Die Conchoide hat in jedem Punkt dieselbe polare Subnormale, wie die gegebene Curve C.

Ueber die Construction des Krümmungsmittelpunkts einer Conchoide siehe *l'Interm. des math.,* 1894, p. 155; 1895, p. 112, 224.

Eine *conchoidale (muschelförmige) Curve* ferner wird auf die folgende Art definirt:

Man habe drei Curven, f, φ, ψ; es wird eine Tangente an f gezogen, welche φ und ψ in zwei Punkten A und B schneidet; auf dieser Tangente werden von dem Berührungspunkt aus nach der einen und der anderen Seite zwei Strecken gleich AB abgetragen; der Ort der Endpunkte dieser Strecken ist die *conchoidale Curve.*

§ 5. Die Theilungscurven.

Theilungscurven sind der Ort des Schnitts A zweier Geraden, die *mit gleichförmigen Geschwindigkeiten* um zwei feste Punkte P, P' rotiren.

Wenn die beiden Rotationsgeschwindigkeiten in dem Verhältniss $\frac{n}{n'}$ stehen, wobei $n' < n$ vorausgesetzt wird, so steht der Supplementwinkel von $AP'P$ zu dem Winkel APP' in dem Verhältniss $\frac{n}{n'}$.

Die Theilungscurve geht $(n-1)$mal durch P, $(n'-1)$mal durch P' und n'mal durch die Kreispunkte der Ebene.

Für $n' = 1$ oder $n' = n - 1$ erhält man die sogenannten ***Unicursalcurven.***

Für $n' = 1$ und $n = 3$ ergibt sich die ***Maclaurin'sche Trisectrix*** (siehe § 9) *und* *für* $n' = 2$, $n = 3$ *die Pascal'sche Schnecke* oder *limaçon*, it. *lumaca* (vergl. § 11), *die man auch Sechstheilungscurve nennen kann.*

Der Name *Theilungscurve* kommt von ihrer Beziehung zu dem Problem der Winkeltheilung her; ist ins Besondere $n' = 1$, so können sie zur Theilung eines Winkels in n gleiche Theile benutzt werden.

Ueber diese Curven siehe Schoute, *Journ. des math. spéciales*, 1885.

§ 6. Cycloidale Curven oder Rouletten. Gleitcurven.

Sogenannte *cycloidale (cycloidenartige) Curven* oder nach einem französischen Wort *Rouletten (Rollcurven)* werden von einem Punkt der Ebene einer Curve erzeugt, welche auf einer anderen festen Curve, der *Basis der Roulette*, rollt, ohne zu gleiten.

Die sogenannten *Gleitcurven* (die Franzosen sagen *glissettes*) werden von einem Punkt der Ebene einer Curve erzeugt, welche sich, ihrer Gestalt nach unverändert bleibend, so bewegt, dass sie bei dieser Bewegung stets gegebene Curven berührt oder durch gegebene Punkte geht.

Wenn $x = yf(y)$ *die Gleichung der Gleitcurve darstellt, welche der Ort eines Punkts P der Ebene einer Curve C ist, die in beständiger Berührung mit einer festen Geraden in einem festen Punkt bleibt, so ist* $\frac{dy}{dx} = -f(y)$ *die Differentialgleichung der Roulette desselben Punkts P, wenn man die Curve C auf dieser Geraden rollen lässt.* Brocard, *Nouv. Corresp.*, 2, 1876, p. 377, 383.

Die Normale zur Roulette geht durch den Berührungspunkt M der festen mit der beweglichen Curve.

Den Krümmungsmittelpunkt der Roulette findet man auf die folgende Art: Man verbindet den Punkt P der Roulette mit dem Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Curve, verlängert diese Gerade, wenn nöthig, bis zu ihrem Schnitt R mit dem von M aus auf PM errichteten Loth. Verbindet man dann R mit dem Krümmungsmittelpunkt der festen Curve, so trifft diese Gerade PM in dem gesuchten Krümmungscentrum.

Eine andere Eigenschaft der Roulette, die in Beziehung zur Fusspunktcurve steht, wurde in § 2 besprochen.

Die erste Roulette, die studirt wurde, war die Curve, die von einem Punkt eines auf einer Geraden rollenden Kreises beschrieben wird; sie wurde von Blaise Pascal im Jahr 1659 untersucht und ist die eigentliche sogenannte *Cycloide*. Siehe § 12.

Von den *Rouletten* und den *Gleitcurven* handelt die sehr vollständige Monographie von Besant, *Notes on Roulettes and Glisettes*, Cambridge 1870; siehe auch verschiedene Artikel in den *Nouv. Ann.*, 1871 und die Angaben in dem neuen *lithographirten* Buch von Brocard, *Notes de bibliogr. des courbes géométriques*, Bar-le-Duc 1897.

§ 7. Rotationsflächen. Cylinder- Kegel- und Conoidflächen.

Die Gleichung der Rotationsflächen hat, wenn die z-Axe die Rotationsaxe ist, die Gestalt:

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

worin φ das Symbol für eine willkürliche Function ist.

Bezeichnet man mit p, q die beiden partiellen Derivirten 1^{ter} Ordnung von z nach x und y, *so lautet die partielle Differentialgleichung der Rotationsflächen:*

$$py - qx = 0.$$

Die Gleichung der Cylinderflächen hat die Form:

$$\varphi(x - az,\ y - bz) = 0$$

und ihre Differentialgleichung ist:

$$ap - bq = 1.$$

Die Gleichung der Kegelflächen lautet, wenn (x_0, y_0, z_0) die Coordinaten der Spitze des Kegels sind:

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0},\ \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0,$$

und ihre Differentialgleichung:

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0.$$

Conoidflächen werden durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, die eine feste Gerade stets schneidet und zu einer festen Ebene immer parallel bleibt.

Ist die gegebene Gerade die z-Axe und die feste Ebene die xy-Ebene, *so lautet die Differentialgleichung der Conoide:*

$$px + qy = 0,$$

und die Gleichung in endlichen Termen:

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Allgemeiner ist die Form der Differentialgleichung der Conoide:

$$p(az - x) + q(bz - y) = 0$$

und der Gleichung in endlichen Termen:

$$z = \varphi\left(\frac{y - bz}{x - az}\right).$$

§ 8. Kegelschnitte.

Wir haben früher in einem besonderen Kapitel (Kap. 3) geometrische und analytische Betrachtungen über die Kegelschnitte angestellt und fügen hier die folgenden metrischen Resultate hinzu, die speciell von ihrer infinitesimalen Geometrie abhängen.

Ihre natürliche Gleichung wurde in Kap. 16 angegeben.

Die Fusspunktcurve eines Kegelschnitts vom Brennpunkt aus ist ein Kreisumfang.

Der Krümmungsradius eines Punkts P einer Ellipse mit den Halbaxen a und b ist dem Cubus der (von P und der Hauptaxe begrenzten) Normalen proportional.

Die Evolute einer Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b)$$

lautet, hat die Gleichung

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Der Flächeninhalt der ganzen Ellipse ist πab und der ihrer Evolute $\frac{3}{8}\pi ab$.

Der Ellipsenbogen ist durch ein elliptisches Integral zweiter Gattung (siehe *Repert.* 1, S. 152)

$$s = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \quad \left(e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)$$

gegeben, worin φ die sogenannte (excentrische) Anomalie ist, d. h. der aus den Formeln

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b \cos\varphi$$

sich ergebende Winkel. Beschreibt man den zur Ellipse concentrischen Kreis mit dem Radius a, so ist φ der Winkel, den der Radiusvector desjenigen Punkts des Kreises, dessen Coordinaten x und $\frac{a}{b}\,y$ sind, mit y bildet; dabei sind x, y die Coordinaten des Punkts der Ellipse.

Der Perimeter der ganzen Ellipse lässt sich durch die Reihe

$$2\pi a\left\{1 - (\tfrac{1}{2}e)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}e^3\right)^2 - \cdots\right\}$$

ausdrücken.

Wenn ein Ellipsenbogen gegeben ist, so lässt sich ein zweiter von der Beschaffenheit finden, dass die Differenz der beiden Bogen rectificirbar ist (sich unmittelbar, d. h. mit Hülfe von Constructionen, die nur *Gerade* und *Kreise* erfordern, *durch das Segment einer Geraden ausdrücken lässt). Theorem von Fagnano,* (1682—1766), veröffentlicht 1716, abgedruckt in Fagnano's *Produzioni matematiche*, Bd. 2, p. 338, Pesaro 1750; vergl. M. Cantor's *Geschichte der Math.,* 3, p. 469.

Man betrachte nämlich zwei Punkte P, Q auf einem Ellipsenquadranten, deren Anomalien φ, ψ an die Relation

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a}$$

gebunden sind.

Bezeichnet man nun mit B bez. A die Endpunkte dieses Quadranten, zieht in P und Q die Tangenten an die Ellipse, fällt vom Centrum Lothe auf diese Tangenten und sind P_1, Q_1 die Fusspunkte dieser Lothe, *so ist die Differenz zwischen den Bogen PB und QA durch die Länge von PP_1 oder QQ_1 gegeben (diese beiden Längen sind gleich).*

Den Punkt Q hat, wenn P gegeben ist, Euler, *Nova Comm. Petr.,* 1761 auf die folgende Art construirt: Man zieht die Tangente in P bis zu ihrem Schnitt R mit der kleinen durch B gehenden Axe und trägt dann auf der Tangente die Länge $RPM = a$ ab; der Punkt des Quadranten, der dieselbe Abscisse, wie der Punkt M, hat, ist der gesuchte Punkt Q.

Siehe darüber die Noten 2 und 3 am Ende des Enneper'schen Buches, *Ellipt. Funkt.,* Halle 1890.

Der Bogen der Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

lautet, ergibt sich aus der Formel

$$a\left\{\frac{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{k\cos\varphi} - \frac{1}{k}\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{k'^2}{k}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right\},$$

worin φ *die oben definirte Anomalie bezeichnet und*

$$k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}, \quad k'^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2} \quad \textit{ist.}$$

Er wird also durch elliptische Integrale 1ter und 2ter Gattung ausgedrückt.

Auch für die Hyperbel fand Fagnano, l. c., p. 338, 339 ein Theorem über die Rectification der Summe gewisser zweier Bogen, von denen der eine nach Belieben gewählt werden kann.

Ein Satz von Landen, *Phil. Trans.*, 1775 über die Bogen der Hyperbel *drückt einen Hyperbelbogen durch zwei Ellipsenbogen aus.*

Die Grenze der Differenz zwischen der Länge der Asymptote von dem Centrum aus bis zu einem Punkt P′ und der Länge des Hyperbelbogens vom Scheitel aus bis zu dem Punkt P, der dieselbe Abscisse hat, wie P′ (wobei die Lage der Axen aus der obigen Gleichung hervorgeht), ist, wenn P sich in das Unendliche entfernt, eine bestimmte Grösse.

Weitere Untersuchungen über die Ellipsen- und Hyperbelbogen findet man ausser bei Legendre, *Traité des fonct. ellipt,* 3 Bde., Paris 1826—1832, Bd. 1, p. 46 auch bei Küpper, *Crelle*, 55, 63.

Man habe eine gleichseitige Hyperbel, deren auf die Asymptoten bezogene Gleichung

$$xy = m^2 \text{ sei.}$$

Der Inhalt der Fläche zwischen einem Curvenbogen und der Asymptote $y = 0$ *ist durch* $m^2 \log\frac{\beta}{\alpha}$ *gegeben, wenn unter* β, α *die Abstände der Endpunkte des Bogens von der anderen Asymptote* $x = 0$ *verstanden werden.*

Für $m = 1$ und $\alpha = 1$ ist der Inhalt der Fläche zwischen einem vom Scheitel aus gerechneten Curvenbogen und einer Asymptote dem natürlichen Logarithmus des Abstands des Endpunkts des Bogens von der anderen Asymptote gleich.

Ueber andere Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel siehe Milinowski, *Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte*, 2. Ausg., Leipzig 1896, worin die Geometrie der gleichseitigen Hyperbel auf elementare Art behandelt wird.

Der Krümmungsradius in einem Punkt der Parabel ist das Doppelte des zwischen dem Punkt und der Directrix liegenden Abschnitts der Normalen.

Die Evolute der eigentlichen Parabel ist eine semicubische Parabel, die auch Neil'sche Parabel genannt wird; wenn $y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel darstellt, so ist die Gleichung der Evolute

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3.$$

Der vom Scheitel aus gerechnete Parabelbogen ist

$$s = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{1}{2}p \log \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

§ 9. Cissoiden. Die Agnesi'sche Curve 3ter Ordnung oder Versiera. Die Maclaurin'sche Dreitheilungscurve (Trisectrix). Die Strophoide. Das Folium.

Die wichtigste *Cissoide* ist die Diokles'sche; sie führt ihren Namen nach dem Griechen Diokles, der im ersten Jahrhundert vor Christi Geburt lebte und sie zur Auflösung des Problems der *Verdoppelung des Cubus (des Delischen Problems)* zu benutzen dachte; siehe Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* 3 Bde., Leipzig 1892—1898, Bd. 1, p. 302—306. Dieser Curve bedienten sich auch die alten Mathematiker zur *Bestimmung der zwei mittleren Proportionalen.* Siehe Newton, *Arithmetica universalis,* Lugd. Batav. 1732, p. 231.

Die Curve wird auf die folgende Art erzeugt: Man habe einen festen rechten Winkel, von dem ein Schenkel OP eine bestimmte Länge $OP = a$ hat; von einem anderen beweglichen rechten Winkel gehe der eine Schenkel durch P, während der Endpunkt des anderen Schenkels von der festen Länge $2a$ auf dem zweiten Schenkel des ersten rechten Winkels läuft: *Der Ort des Mittelpunkts des Schenkels, dessen Länge* $2a$ *beträgt, ist die Cissoide.* Newton.

Die Gleichung der Curve lautet:

$$x^3 = y^2(2a - x).$$

Der Punkt $x = 0$ *ist eine Spitze; die Gerade* $x = 2a$ *eine Asymptote; die Curve ist von convexer Krümmung gegen die* x*-Axe. Sie ist eine circulare Curve, d. h. sie geht durch die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene.*

Die Cissoide kann auch auf eine andere Art construirt werden: Man beschreibe einen Kreis mit dem Radius a; AB sei einer seiner Durchmesser und BT die Tangente an den Kreis in B. Von A aus werden alle Geraden AMN gezogen, welche den Kreisumfang in M und die Tangente BT in N schneiden. Trägt man nun auf AN die Längen $AP = MN$ ab, *so ist der Ort der Punkte* P *die Cissoide.*

Der Inhalt der Fläche, die zwischen der Curve und ihrer Asymptote (d. h. also der Geraden BT*) liegt, ist dreimal so gross, als der Inhalt des Kreises, der zu ihrer Construction benutzt wurde.*

Die Cissoide ist die Fusspunktcurve (vergl. § 2) *einer Parabel in Bezug auf den Scheitel der Parabel.*

Es lassen sich auch *schiefe Cissoiden* auf ähnliche Art wie die Cissoide des Diokles mit Hülfe eines Kreises construiren; *nur wird anstatt eines Durchmessers eine Sehne des Kreises benutzt.*

Wird dann ferner statt eines Kreises ein Kegelschnitt genommen, so erhält man *die Cissoide von Zahradnik, Grunert's Arch.*, 56, p. 8; *Nouv. Corr. math.*, 1874—75, p. 86.

Die Cissoide ist immer *eine rationale Curve 3ter Ordnung.*

Es sei ein Kreis mit zwei aufeinander senkrechten Durchmessern gegeben. Von dem Endpunkt O des horizontalen Durchmessers wird eine Gerade gezogen, die den Umfang in A und den verticalen Durchmesser in B schneidet; durch die Punkte A, B werden dann Parallele zu den beiden Durchmessern gelegt, die sich in dem Punkt P treffen. Der Ort der Punkte P ist *die Curve 3ter Ordnung oder Versiera von Agnesi* (1748). *Sie ist eine cubische Curve mit einem Doppelpunkt im Unendlichen.*

Ihre Gleichung lautet

$$y^2 x + r^2(x - 2r) = 0;$$

dabei ist r der Radius des Kreises, der zu ihrer Construction benutzt wurde. Vergl. auch Schlömilch, *Uebungsb. z. Stud. der höh. Analysis,* Leipzig 1868, Thl. 1, p. 71 (neueste Aufl., ib., 1. Thl., 1887, 2. Thl., 1882).

Um die Tangente an die Curve in P zu construiren, lege man durch A eine Tangente an den Kreis, welche den verticalen Durchmesser in M schneidet, und trage nach der entgegengesetzten Richtung hin $AM' = AM$ ab, nehme dann von O aus auf der entgegengesetzten Seite von A auf der Geraden OAB die Strecke $OR = AB$, ziehe durch R eine horizontale Gerade bis zu ihrem Schnittpunkt S mit der durch A gehenden Verticalen und durch S die Parallele zu RM', die den horizontalen Durchmesser in K trifft. Die durch K gezogene Verticale schneidet die Tangente AM an den Kreis in einem Punkt T, der, mit P verbunden, die Tangente an die Curve liefert.

Die Tangente an den Kreis im Punkt O ist eine Asymptote der Curve.

Der Inhalt der zwischen der Curve und ihrer Asymptote liegenden Fläche ist das Vierfache des Inhalts des zur Construction der Curve dienenden Kreises.

Lässt man die Curve und den zu ihrer Construction benutzten Kreis um die Asymptote rotiren, so entstehen zwei Körper, von denen der erste ein doppelt so grosses Volumen hat, als der zweite.

Diese Curve wurde von Maria Gaetana Agnesi in ihren *Istituzioni analitiche,* Milano 1748 studirt. Viele Angaben auch über andere ähnliche Curven, die einige Autoren mit der Agnesi'schen Versiera verwechselt haben, findet man bei Loria, *Bibliotheca math.*, 1897, p. 7.

Die von G. de Longchamps in seinem *Essai sur la Géom. de la règle* etc., Paris 1890, p. 111 untersuchte Curve ist *nicht* die Versiera der Agnesi, sondern eine Curve, deren Ordinaten bezüglich doppelt so lang, als die der Versiera sind. G. Loria hat vorgeschlagen, sie *Pseudoversiera* zu nennen.

Die sogenannte *Maclaurin'sche Trisectrix oder Dreitheilungscurve* wird durch die Gleichung

$$x(x^2 + y^2) = \frac{r}{2}(y^2 - 3x^2) \text{ dargestellt.}$$

Sie wird auf die folgende Art construirt: Man habe einen Kreis vom Radius r und Centrum C mit einem horizontalen Durchmesser OCO' und einer Geraden, die im Mittelpunkt von OC auf OC senkrecht steht. Von dem Endpunkt O des Durchmessers ziehe man eine Gerade, die den Kreis in A und die verticale Gerade in B schneidet, und trage auf OAB in *entgegengesetzten* Richtungen $OP = AB$ ab; *der Ort der Punkte* P *ist die Dreitheilungscurve.*

Sie ist eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt in O.

Die in A an den Kreis gelegte Tangente schneidet die verticale Gerade in M; nimmt man in entgegengesetzten Richtungen $AT = AM$, *so ist* TP *die Tangente an die Curve.*

Die Curve ist eine Theilungscurve, vergl. § 5. Weitere Eigenschaften findet man in dem am Ende des § 6 citirten Werk von Brocard.

Ueber ihre *Rectification* durch elliptische Functionen siehe Longchamps, *Compt. Rend.*, 1887.

Wenn man bei der vorstehenden Construction annimmt, das auf dem horizontalen Durchmesser errichtete Loth gehe statt durch den Mittelpunkt von OC durch C (das Centrum), und im Uebrigen die Construction nicht ändert, so ergibt sich die sogenannte *rechtwinklige*, oder auch *logocyclische Strophoide, deren Gleichung*

$$r(x^2 - y^2) = x(x^2 + y^2) \quad \textit{lautet.}$$

Sie ist eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt in O. *Die Tangente wird ebenso construirt, wie bei der Dreitheilungscurve.*

Die Strophoide ist auch die Fusspunktcurve einer Parabel in Bezug auf den Schnitt der Directrix mit der Parabelaxe; der Scheitel der Parabel liegt in C *und die Directrix ist die den Kreis in* O *berührende Gerade.*

Wird C *rechtwinklig auf den Radiusvector* OP *projicirt, so fällt die Projection in den Mittelpunkt der Strecke* PB.

Wenn bei der obigen Construction der Strophoide angenommen wird, die durch C gehende Gerade stehe nicht senkrecht auf dem horizontalen Durchmesser, sondern sei schief zu ihm, so erhält man *die schiefe oder focale Strophoide von Quetelet,* die man auch als *die Fusspunktcurve einer Parabel in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Directrix* ansehen kann.

Ueber die Literatur, die Geschichte und weitere Eigenschaften dieser Curve siehe die Artikel von Tortolini in den *Nouv. Ann.*, 1861, p. 82, von Loria, *Boll. di Bibliogr. delle scienze mat.*, 1898, p. 1 und die Angaben in dem § 6 citirten Buch von Brocard; vergl. auch einen neueren Aufsatz von Schoute, *Crelle*, 99 und die Notizen in dem (in Paris erscheinenden) *Intermédiaire des math.* 1895, p. 425; 1896, p. 278.

Das Folium von Descartes (das Cartesische Blatt) ist eine weitere rationale Curve 3ter Ordnung, deren Gestalt der Dreitheilungscurve und der Strophoide äusserst ähnlich ist.

Sie hat

$$x^3 + y^3 = 3rxy$$

zur Gleichung, oder, wenn man die Axen um 45^0 dreht,

$$r(x^2 - y^2) = x(x^2 + 3y^2).$$

Um die Curve geometrisch zu erhalten, construire man die rechtwinklige Strophoide so, wie oben angegeben wurde, und nehme dann auf dem Radiusvector OPB den harmonisch mit O in Bezug auf das Segment PB conjugirten Punkt Q an; *der Ort der Punkte Q ist das Folium.*

Die Tangente in Q findet man, wenn, wie oben, die Tangente an die Strophoide in P gezogen und dann Q mit dem Punkt verbunden wird, in dem diese Tangente den verticalen Durchmesser trifft.

Die Curve wurde von Roberval studirt, der ihr irrthümlicher Weise die Form beilegte, von welcher sie den Namen hat. Auch Descartes beschäftigte sich mit ihr. Näheres findet man in dem citirten Buch von Brocard.

§ 10. Cassini'sche Ovale. Die Lemniscaten Bernoulli's und Gerono's. Die Watt'sche Curve.

Cassini'sche Ovale (Cassinoiden oder Cassini'sche Ellipsen, 1680) heissen die ebenen Curven, für die das Product aus den Abständen eines Curvenpunkts von zwei festen Punkten *(den Brennpunkten)* constant bleibt.

Ist $2a$ der Abstand der festen Punkte und b^2 das Product der Abstände eines Curvenpunkts, *so lautet die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten:*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4,$$

wenn die Brennpunktsaxe und das in dem Mittelpunkt der die Brennpunkte verbindenden Strecke errichtete Loth zu Coordinatenaxen genommen werden.

In Polarcoordinaten ϱ und φ lautet die Gleichung:

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\varphi = b^4 - a^4.$$

Die unendlich fernen imaginären Kreispunkte sind Doppelpunkte der Curve. Die Curve ist von der 8^ten^ Classe.

Der Krümmungsradius ist

$$R = \frac{2b^2\varrho^3}{3\varrho^4 - b^4 + a^4}.$$

Wenn $b < a$ ist, so besteht die Cassini'sche Curve aus zwei Ovalen, von denen jedes ausserhalb des anderen liegt; für $b = a$ ergibt sich die Lemniscate (siehe unten); für $a\sqrt{2} > b > a$ hat die Curve die Form einer an den Enden der kleinen Axe eingedrückten Ellipse; für $b > a\sqrt{2}$ besteht sie aus einem einzigen Oval.

Um die Tangente in einem Punkt P zu erhalten, errichtet man in den Brennpunkten F, F' Lothe auf die Brennstrahlen FP, $F'P$ und zieht dann durch P eine Gerade, welche diese Lothe so trifft, dass P der Mittelpunkt der zwischen den Lothen enthaltenen Strecke wird.

Wenn man in die Cassini'sche Curve ein Parallelogramm einschreibt, welches denselben Mittelpunkt, wie die Curve, hat, so ist die algebraische Summe der Winkel, unter welchen die gegenüberliegenden Seiten von einem Punkt der Curve aus erscheinen, constant. Darboux, *Sur une classe remarquable des courbes etc.*, 2. édit., Paris 1896, p. 82.

Eine allgemeinere Classe von algebraischen Curven, welche die Cassinoide als speciellen Fall enthält, hat Darboux, l. c., p. 61 u. ff. studirt.

Die *Lemniscate* von Jacob Bernoulli, *Acta Erud.*, 1694 erhält man für $b = a$.

Sie lässt sich auch als eine Curve definiren, die auf die folgende Art construirt wird:

Man beschreibt einen Kreis und zieht zwei aufeinander senkrechte Tangenten an ihn, die sich in O treffen. Auf jeder durch O gezogenen Geraden G trägt man dann die Strecken $\pm OP$ ab, welche dieselbe Länge, wie die durch G bestimmte Sehne des Kreises haben. *Der Ort der Punkte P ist die Lemniscate.*

Eine andere Erzeugungsweise ist die folgende:

Sie ist der Ort der Fusspunkte der von dem Centrum O einer gleichseitigen Hyperbel auf die Tangenten gefällten Lothe (die Fusspunktcurve von O in Bezug auf die gleichseitige Hyperbel). Man nennt sie desshalb auch *hyperbolische Lemniscate.*

Die Lemniscate ist auch ein specieller Fall der Watt'schen Curve, d. h. der von dem Angriffspunkt der Kolbenaxe in dem sogenannten Watt'schen Gliederparallelogramm (1784) *beschriebenen Curve.* Siehe Brocard l. c.

Sie hat die Form der Ziffer 8 *und hat einen Doppelpunkt in O; die Winkel, welche die beiden Tangenten in O mit der Focalaxe bilden, sind $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$.*

Der durch O gehende Durchmesser ist offenbar eine Symmetrieaxe und enthält die beiden Brennpunkte (Focalaxe).

Der Winkel, den die Tangente an die Curve im Punkt P mit dem durch O gehenden Radiusvector OP bildet, ist, um einen Rechten vermindert, doppelt so gross als der Winkel zwischen PO und der Focalaxe. Daher auch:

Die Neigung der Normalen gegen die Focalaxe ist dreimal so gross, als die Neigung des Radiusvectors gegen diese Axe.

Die Projection des Krümmungsradius auf den Radiusvector ist der dritte Theil des Radiusvectors.

Die Gleichung für rechtwinklige Coordinaten lautet (wenn die Focalaxe und das in O auf ihr errichtete Loth zu Coordinatenaxen genommen werden):

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Die Gleichung für Polarcoordinaten ist (wenn O zum Pol genommen wird und die Polaxe mit der Focalaxe zusammenfällt):

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Der Krümmungsradius ist

$$R = \frac{2a^2}{3\varrho}.$$

Der Flächeninhalt des von der Lemniscate eingeschlossenen Theils der Ebene wird durch $2a^2$ gemessen.

Die Evolute der Lemniscate hat die Gleichung:

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,a.$$

Das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der Lemniscate um ihre Focalaxe erzeugt wird, ist

$$a^3\sqrt{2\pi}\left\{-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}.$$

Der Lemniscatenbogen ist durch die Formel

$$s = a\sqrt{2}\int\limits_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}, \quad r = \frac{\varrho}{a\sqrt{2}}$$

gegeben, in welcher ϱ *den Radiusvector bedeutet.*

Wie man daraus erkennt, besitzt die Lemniscate die Eigenschaft, dass sich ihr Bogen durch ein elliptisches Integral 1^{ter} *Gattung ausdrücken lässt. Der diesem elliptischen Integral entsprechende Legendre'sche Modul ist* $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Siehe *Repert.* 1, p. 417.

Setzt man

$$r = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}},$$

so wird

$$\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{2\,du}{\sqrt{1-u^4}},$$

so dass man also, wenn ein Bogen gegeben ist, dem der Radiusvector $ar\sqrt{2}$ entspricht, durch die vorstehende algebraische Formel (die Relation zwischen r und u) den Radiusvector $au\sqrt{2}$ finden kann, welcher der Hälfte des Bogens entspricht. Man hat so ein Mittel, das Problem der *Halbirung des Lemniscatenbogens* algebraisch aufzulösen.

Der Quadrant der Lemniscate lässt sich algebraisch in 3 und 5 gleiche Theile zerlegen, mithin auch in jede durch 2^m, $3 \cdot 2^m$, $5 \cdot 2^m$ *gegebene Anzahl von Theilen. Theorem von* Fagnano, *Produzioni mat.,* Pesaro 1750, 2, p. 368.

Wir fügen noch das Abel'sche Theorem, *Crelle,* 3 hinzu:

Man kann immer durch Kreise und Gerade den Quadranten der Lemniscate in n *gleiche Theile zerlegen, wenn* n *entweder von der Form* 2^m *oder eine Primzahl von der Gestalt* $2^m + 1$ *oder das Product mehrerer verschiedener Zahlen dieser Art ist.*

Abel wies ins Besondere auch nach, dass sich dazu eine Methode verwenden lasse, die der von Gauss für die Zerlegung des Kreisumfangs in gleiche Theile gefundenen Methode (Auflösung der binomischen Gleichungen, siehe *Repert.* 1, p. 95 u. ff.) analog ist. Es scheint dies Gauss selbst schon bekannt gewesen zu sein. Vergl. *Werke*, 1, p. 412, 413; *Disqu. arithm.*

Ausser Fagnano l. c. und den Aufsätzen Euler's, *Mém. de St. Pétersb.*, 5, 1751, 1752 sind von Arbeiten über die Lemniscatentheilung (welche mit der complexen Multiplication der elliptischen Functionen, *Repert.*, 1, p. 445, zusammenhängt) noch zu erwähnen: Libri, *Crelle*, 10; Liouville, *Compt. Rend.*, 17, 1843, p. 635; *Journ. de Liouville*, 8, 1843, p. 507; Clausen, *Astron. Nachr.*, 1842; Wichert, *Progr. des Konitzer Gymn.*, 1846; Eisenstein, *Crelle*, 30, 39; Hoffmann, *Crelle*, 48; Kiepert, ib., 75; Schwering, *Crelle*, 111. Die zu dem Integral der Lemniscate inverse Function pflegt man *lemniscatische Function* zu nennen. Näheres findet man bei Enneper, *Ellipt. Funct., Theor. u. Gesch.*, 2. Aufl., Halle 1890, p. 382, 531, 546.

Chasles, *Compt. rend.*, 21, 1845, p. 199 fand, indem er die Lemniscate durch die gleichseitige Hyperbel entstehen liess (siehe oben) und dabei den Punkten der gleichseitigen Hyperbel die Punkte der Lemniscate zuordnete, *dass zweien Bogen der Hyperbel, deren Differenz rectificirbar ist, rectificirbare Bogen der Lemniscate entsprechen.*

Mit den Curven, deren Bogen, wie bei der Lemniscate, sich durch elliptische Integrale 1ter Gattung ausdrücken lassen, beschäftigten sich Legendre, *Traité des fonct. ellipt.*, Paris 1826—1832, 2, p. 590 und später Roberts, *Journ. de Liouv.*, 9; Serret, ib., 10 sowie *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung*, Bd. 2, *Integralrechnung*, herausgeg. von Bohlmann, Leipzig 1899. Weitere Einzelheiten findet man bei Enneper, l. c., p. 560; siehe auch Cayley, *An elem. treat. on ellipt. funct.*, Cambridge 1876, Kap. 3, 15.

Der Perimeter der ganzen Lemniscate lässt sich durch die Reihe ausdrücken:

$$4\sqrt{2}\cdot a\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{13}+\cdots\right).$$

Die Lemniscate Gerono's. Eine Curve, die grosse Aehnlichkeit mit der Bernoulli'schen Lemniscate hat und deshalb auch von einigen Autoren mit ihr verwechselt wurde (siehe *Intermédiaire des math.*, 1897, p. 98 und p. 190, 191), ist die *Gerono'sche Lemniscate*, wie sie von Einigen, oder die *Curve* *von der Form einer Acht (ad otto),* wie sie von Anderen genannt wird. *Ihre Gleichung lautet in der einfachsten Gestalt:*

$$y^4 = y^2 - x^2.$$

Sie wird folgendermassen construirt: Man projicirt einen Punkt P eines Kreises orthogonal auf einen Durchmesser nach P' und auf die in dem Endpunkt dieses Durchmessers an den Kreis gelegte Tangente, verbindet dann den Mittelpunkt mit dem Fusspunkt der letzteren Projection und bestimmt den Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der ersteren projicirenden Geraden, d. h. mit PP'. *Der Ort dieser Schnittpunkte ist die Lemniscate Gerono's.*

§ 11. Ovale von Cartesius. Pascal'sche Schneckenlinie. Cardioide. Conchoide des Nicomedes. Spirische Curven.

Die Cartesischen Ovale (aplanetischen Curven) haben wir schon auf S. 201 besprochen. Sie sind Curven 4ter Ordnung *mit zwei Spitzen in den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten der Ebene* und daher *circulare Curven.*

Wir wollen die Sätze nicht wiederholen, die wir bereits früher an dem angegebenen Ort aufgestellt haben, und fügen nur hinzu:

Die Gleichung der Curve für Cartesische Coordinaten lässt sich schreiben:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 + b(x - d) = 0;$$

für Polarcoordinaten, wenn ein Brennpunkt (vergl. S. 201) *zum Pol genommen wird:*

$$\varrho^2 - (a + b\cos\varphi)\varrho + c^2 = 0;$$

und für bipolare Coordinaten, wenn ϱ, ϱ' die von zwei Brennpunkten der Curve ausgehenden Radienvectoren bezeichnen:

$$l\varrho + m\varrho' = c,$$

worin l, m, c Constante bedeuten.

Die Curve hat drei reelle in einer Geraden liegende Brennpunkte, wenn man im Allgemeinen unter *Brennpunkten einer Curve* die Schnittpunkte der von den beiden Kreispunkten der Ebene an die Curve gezogenen Tangenten versteht; *die beiden Kreispunkte gehören im vorliegenden Fall der Curve an und sind Spitzen für sie.*

Chasles entdeckte zuerst den dritten Brennpunkt der Curve, während Cartesius nur zwei Brennpunkte angenommen hatte.

Man kann sich die Curve als Ort der dritten Ecke eines Dreiecks erzeugt denken, dessen beide andere Ecken (die Endpunkte der Basis) sich auf zwei Kreisumfängen bewegen, während sich die Basis um einen Punkt dreht (d. h. sich so verschiebt, dass sie denselben Abstand von einem Punkt behält), welcher auf der die Mittelpunkte der Kreise verbindenden Geraden liegt, und während die beiden Seiten um diese Mittelpunkte rotiren. *Diese Centren sind zwei Brennpunkte der Curve.*

Eine optische Eigenschaft der Brennpunkte der Cartesischen Ovale lautet:

Die von einem der Brennpunkte ausgehenden und von der Curve gebrochenen Strahlen, deren Brechungsexponent dem Verhältniss der Radien der beiden Kreise gleich ist, die zur Erzeugung der Curve dienen, laufen in einem anderen Brennpunkt zusammen.

Die Cartesischen Ovale sind Evolventen der Brennlinie durch Refraction für einen Kreis. Vergl. Salmon-Fiedler, *Eb. Curv.*, 2. Aufl. p. 127.

In der ältesten uns bekannten analytischen Geometrie vom Jahr 1637, welche Cartesius zum Verfasser hat, werden zum ersten Mal die Eigenschaften der Cartesischen Ovale untersucht.

Der neueren Zeit angehörige Arbeiten über sie sind von Genocchi, *Nouv. Ann.*, 14, 1855, p. 202, 260; *Mathesis*, 1884; Zeuthen, *Nouv. Ann.*, 1864, p. 304; Sylvester, *Phil. Mag.*, 31, 1866; D'Ocagne, *Compt. Rend.*, 97, 1883, p. 1424.

Reichhaltige literarische Angaben findet man bei Liguine, *Bull. de Darboux,* 1882 und in dem *Interm. des math.*, 1896, p. 238, 239.

Ueber die Rectification der Cartesischen Ovale durch drei Ellipsenbogen siehe Genocchi, *Ann. di Mat.*, (1) 6, p. 111; *Compt. Rend.*, 80, 1875, p. 112.

Die Pascal'sche Schneckenlinie, Limaçon, it. *Lumaca.* Wenn in der Gleichung der Cartesischen Ovale für Polarcoordinaten $e = 0$ gesetzt wird, so erhält man die Gleichung (für Polarcoordinaten) der *Pascal'schen Schneckenlinie, die nicht nur die Kreispunkte zu Spitzen hat, sondern auch in dem Coordinaten-*

anfang einen Doppelpunkt besitzt. Die Curve erhielt ihren Namen von Roberval, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 1708, p. 78. Sie wurde wohl von Etienne Pascal, dem Vater von Blaise Pascal entdeckt. Vergl. M. Cantor's *Geschichte der Math.,* Bd. 2, p. 882. Ihre Gleichung in Polarcoordinaten kann

$$\varrho = a + b \cos \varphi$$

geschrieben werden und in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Die Curve lässt sich als eine *Fusspunktcurve* und auch als eine *Conchoide* auffassen. Vergl. die §§ 2 und 4.

Die Pascal'sche Schneckenlinie ist eine Conchoide des Kreises und auch eine Fusspunktcurve des Kreises:

Auf einem Durchmesser eines Kreises vom Radius a nimmt man einen Punkt P an, der vom Mittelpunkt um die Länge b absteht. *Die Fusspunktcurve von P in Bezug auf den Kreis ist die Pascal'sche Schneckenlinie mit der eben angegebenen Gleichung.*

Man ziehe ferner den Kreis, dessen Durchmesser die den Mittelpunkt des Kreises mit P verbindende Strecke ist; *trägt man nun auf den von P aus nach diesem Kreis gezogenen Radienvectoren auf beiden Seiten des Endpunkts eines jeden Radiusvectors Strecken ab, die constant gleich a sind, so erhält man wieder die Pascal'sche Schneckenlinie.*

Andere Constructionen sind:

Sie ist die inverse Curve (vergl. § 1) *eines Kegelschnitts, wenn ein Brennpunkt des Kegelschnitts zum Centrum der Inversion genommen wird.*

Hat man ein in einen Kreis eingeschriebenes Dreieck, dessen eine Ecke A festliegt und dessen Winkel A constant bleibt, *so ist die Pascal'sche Schneckenlinie der Ort der Mittelpunkte der von innen und von aussen in das Dreieck eingeschriebenen Kreise.*

Sie ist auch der Ort des Scheitels eines constanten Winkels, dessen Schenkel zwei gegebene Kreisperipherien berühren.

Sie ist ferner eine Roulette (vergl. § 6), *die von einem Punkt erzeugt wird, der mit der Ebene eines Kreises fest verbunden ist, der auf einem anderen Kreis von gleichem Radius rollt.*

Ein specieller Fall der Pascal'schen Schneckenlinie ist *die Cardioide, die man für $a = b$ erhält.*

Diese Curve kann man sich entstanden denken: als Ort eines Punktes eines Kreisumfangs, der auf einem anderen von gleichem Radius rollt; oder als Fusspunktcurve eines Kreisumfangs in Bezug auf einen Punkt des Umfangs; oder als Conchoide eines Kreises in Bezug auf einen seiner Punkte, wenn dem Durchmesser gleiche Strecken abgetragen werden; oder als die Inverse einer Parabel, wenn das Centrum der Inversion im Brennpunkt liegt.

Die Normale in einem Punkt der Cardioide geht durch den Berührungspunkt der beiden Kreise, die zu ihrer Erzeugung als Roulette dienen.

Die Cardioide hat einen 6mal so grossen Flächeninhalt, wie der Kreis, dessen Conchoide sie ist, und einen $\frac{3}{2}$mal so grossen, wie der Kreis, dessen Fusspunktcurve sie darstellt. Der letztere Kreis hat einen doppelt so grossen Radius, wie der erstere, und der erstere ist den Kreisen gleich, die zur Erzeugung der Cardioide als Roulette dienen.

Die Cardioide ist 16mal so lang, als der Radius des Kreises, dessen Conchoide sie ist, und 8mal so lang, als der Radius des Kreises, von dem sie die Fusspunktcurve ist.

Der Krümmungsradius in einem Punkt ist $\frac{2}{3}$ des Segments, welches die mittlere Proportionale zwischen dem Radiusvector und dem Durchmesser des Kreises darstellt, dessen Fusspunktcurve die Cardioide ist.

Die *Conchoide des Nicomedes* ist die *Conchoide* (vergl. § 4) einer Geraden.

In Polarcoordinaten lautet ihre Gleichung:

$$\varrho = \frac{a}{\cos\omega} \pm b$$

und in Cartesischen Coordinaten:

$$y^2 (x - a)^2 = x^2 (b + a - x)(b - a + x),$$

worin a den Abstand des Punkts von der Geraden, die als Basis dient, und b die Länge des constanten Segments bezeichnet, das auf dem Radiusvector abgetragen wird.

Die zu Grund liegende Gerade ist offenbar eine Asymptote der Conchoide.

Die *Tangente* wird nach der für alle Conchoiden geltenden Methode construirt. Siehe § 4.

Vergl. die ausführliche Schilderung bei M. Cantor, *Geschichte der Math.*, 1, 2. Aufl., Leipzig 1894, p. 334.

Die *Conchoide* oder *Muschellinie des Nicomedes* hat auch ausser zur Auflösung des *Delischen Problems* der Würfelverdoppelung zur Dreitheilung des Winkels gedient. Nach den Angaben des Proclus hat Nicomedes selbst mit ihr jeden Winkel in drei gleiche Theile zerlegt. Cantor, l. c., p. 337.

Newton, *Arithm. univ.*, p. 115 verwendete sie zur Auflösung der Gleichungen 3^{ten} und 4^{ten} Grads.

Spirische Curven heissen die Schnitte des *Torus* (der durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende Gerade erzeugten Ringfläche; siehe Kap. 12, § 7) mit Ebenen, die der Rotationsaxe des Torus parallel sind.

Sie haben die beiden Kreispunkte der Ebene zu Doppelpunkten und sind im Allgemeinen 4^{ter} Ordnung.

Specielle Fälle dieser Curven sind die Cartesischen Ovale, die Lemniscate, etc.

Wir machen darauf aufmerksam, dass einige Autoren überhaupt alle Curven, die durch die Kreispunkte der Ebene gehen, die sogenannten *circularen Curven, spirische* genannt haben. Siehe Darboux, *Sur une classe remarquable etc.*, 2. éd., Paris 1896.

Ueber die Geschichte der Torusschnitte vergl. Schiaparelli, *Le sfere omocentriche di Eudosso, Callippo* etc., *Mem. Ist. Lomb.*, (3), 13, p. 117, 1874, deutsch von W. Horn in München und Tannery, *Bull. des sciences math.*, 1884.

§ 12. Cycloide. Trochoide. Hypocycloide. Epicycloide. Astroide. Vierspitzige Curven.

Die eigentliche *Cycloide* ist die Curve, welche von dem Punkt der Peripherie eines auf einer Geraden, der Basis, rollenden Kreises vom Radius r erzeugt wird.

Ihre Gleichung für cartesische Coordinaten ist

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Nennt man θ den Winkel, den die Gerade, welche den Punkt P der Curve und das Centrum des erzeugenden Kreises verbindet, mit der auf der Basis (der x-Axe) senkrechten Geraden bildet, *so lassen sich die Coordinaten x und y von P als Functionen von θ durch die Formeln*

$$x = r(\theta - \sin\theta),$$
$$y = r(1 - \cos\theta)$$

ausdrücken.

Die Differentialgleichung der Cycloide lautet

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r - y}{y}}$$

und ihre natürliche Gleichung:

$$\varrho^2 + s^2 = 16r^2.$$

Die Normale in P ist die Gerade, welche P mit dem Punkt A verbindet, in welchem der Kreis die Basis berührt.

Verlängert man die Normale über A hinaus um eine Strecke gleich PA, so ist der Endpunkt dieser Strecke der Krümmungsmittelpunkt.

Die Evolute der Cycloide ist wieder eine Cycloide, die der gegebenen gleich ist.

Der Inhalt der zwischen der Basis und einem der Cycloidenzweige liegenden Fläche ist dreimal so gross als der Inhalt des Erzeugungskreises.

Der Bogen eines Cycloidenzweiges ist acht mal so lang als der Radius des Erzeugungskreises.

Durch die Cycloide wird *das Problem der Brachistochrone* gelöst. Siehe *Repert.*, 1, p. 250.

Die Cycloide ist auch diejenige von allen durch zwei Punkte gehenden Curven, für die der Flächeninhalt der von ihr, ihrer Evolute und den beiden Normalen in den Endpunkten begrenzten Figur der kleinste ist. Siehe *Repert.*, 1, p. 253.

Die Cycloide ist auch eine tautochrone Curve, weil sie die ausgezeichnete Eigenschaft besitzt, dass ein schwerer Punkt, von welcher Anfangslage er auch ohne Geschwindigkeit ausgehe, immer dieselbe Zeit gebraucht, um, ihre Bogen durchfallend, zu ihrem tiefsten Punkt zu gelangen. Dabei muss ihre Basis horizontal liegen und ihre concave Seite nach oben gekehrt sein. Huyghens, *Horologium oscillatorium*, 1673.

Ueber die tautochronen Curven und ihre Geschichte siehe eine Monographie von Orthmann, Berlin 1872 und von Amodeo, Avellino 1883.

Die Cycloide ist eine in der Geschichte der Mathematik berühmte Curve. Sie wurde von Pater Mersenne und von Galilei untersucht; Roberval fand 1634 ihre Quadratur und

Cartesius die Construction ihrer Tangente; später beschäftigten sich mit ihr Blaise Pascal, Huyghens, die Bernoulli, etc.

Näheres findet man bei Chasles, *Aperçu hist.*, p. 529; Günther, *Bibl. math.*, 1887, p. 8 und Brocard, l. c., sowie in M. Cantor's *Geschichte der Math.*, Bd. 2 und 3 (siehe daselbst im Register das Stichwort „Cycloide").

Man nennt *verlängerte (gedehnte* oder *gestreckte)* bez. *verkürzte (verschlungene) Cycloiden* oder allgemein *Trochoiden* die Curven, welche von einem Punkt beschrieben werden, der mit der Ebene eines auf einer Geraden rollenden Kreises starr verbunden ist, und dessen Abstand vom Centrum des Kreises *kleiner* bez. *grösser* als der Radius ist. Bezeichnet a diesen Abstand und r den Radius des Kreises, *so lautet die Gleichung der Curve:*

$$x = r \arccos \frac{r-y}{a} - \sqrt{a^2 - (r-y)^2}.$$

Rollt ein Kreis vom Radius r auf einem anderen vom Radius R, so wird die von einem Punkt des Umfangs beschriebene Curve *Epicycloide* genannt, wenn jeder der beiden Kreise ausserhalb des anderen liegt, und *Hypocycloide*, wenn der eine sich innerhalb des anderen befindet.

Die Coordinaten eines Punkts sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= (r+R)\cos\theta + r\cos\frac{r+R}{r}\theta \\ y &= (r+R)\sin\theta - r\sin\frac{r+R}{r}\theta \end{aligned}\right\}\ \textit{für die Epicycloide.}$$

Für die Hypocycloide hat man nur $R+r$ *mit* $R-r$ *zu vertauschen.*

Die Evoluten oder Evolventen der Epicycloiden oder Hypocycloiden sind Curven derselben Art.

Für $r = R$ *erhält man die Cardioide.* Siehe § 10.

Wenn $r = \frac{R}{4}$ *ist und der bewegliche Kreis sich im Innern des festen befindet, so ergibt sich die vierspitzige Hypocycloide oder Astroide, deren Gleichung*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}} \quad \textit{lautet.}$$

Die natürliche Gleichung der Astroide ist:

$\varrho^2 + 4s^2 = 9R^2$, Cesàro, *Nouv. Ann.*, 1885, p. 258.

Der Perimeter der Astroide ist sechsmal so gross als der Radius des festen Kreises und der Flächeninhalt $\frac{3}{8}$ des Flächeninhalts dieses Kreises.

Die Astroide ist auch die Enveloppe einer Geraden von constanter Länge, deren Endpunkte auf zwei zueinander senkrechten Geraden gleiten.

Für $r = \frac{R}{3}$ erhält man *die dreispitzige, dreieckige oder Steiner'sche Hypocycloide.*

Die dreispitzige Hypocycloide ist die Enveloppe der sogenannten Simpson'schen oder Wallace'schen Geraden in Bezug auf das Dreieck, welches die drei Spitzen zu Ecken hat, d. h. der Geraden, auf welchen die Fusspunkte der von einem Punkt des umschriebenen Kreises auf die Seiten gefällten Lothe liegen. Siehe weiter oben Kap. 2, § 7, S. 67, *die Dreiecksgeometrie.*

Epitrochoiden ist der allgemeine Name der Curven, welche von einem Punkt der Ebene eines Kreises erzeugt werden, der auf einem anderen festen Kreis rollt und ihn dabei von aussen berührt. Specieller erhält man dann *verkürzte* oder *verlängerte Epicycloiden*, je nachdem der betreffende Punkt ausserhalb oder innerhalb des beweglichen Kreises liegt. Analoge Definitionen gelten für die *Hypotrochoiden*, die ebenso wieder in *verkürzte* und *verlängerte Hypocycloiden* zerfallen.

Die Epi- und Hypocycloiden wurden untersucht von: De La Hire, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 1694, 1706; Newton, *Principia* etc., der ihre Rectification studirte; Euler, *Nova Comm. Petrop.*, 1766, 1781; *Acta Petrop.*, 1784; Raabe, *Crelle,* 1; Eckardt, *Zeitschr. für Math.*, 15, 1870; Kiepert, ib., 17, 1872.

Mit der dreispitzigen Hypocycloide beschäftigten sich Steiner, *Crelle,* 53, 55; dann Cremona, *Crelle,* 64; Clebsch, ib., id.; Battaglini, *Giorn. di Batt.*, 4, 1866; Painvin, *Nouv. Ann.*, 1870; Cahen, ib., 1875; Laguerre, *Bull. Soc. math.*, 7, p. 108; Intrigila, *Giorn. di Batt.*, 1885; etc.

Ihren Flächeninhalt berechnete Balitrand, *Journ. de Longchamps,* 1893, p. 75. Vergl. auch Kap. 7 der *Geometrie der höheren ebenen Curven* von Salmon-Fiedler.

Wenn man bei der zweiten Construction der Astroide, welche die Astroide als Enveloppe liefert, annimmt, die beiden festen Geraden stehen nicht senkrecht aufeinander, sondern seien um einen Winkel α gegeneinander geneigt, so erhält man die sogenannte *tretracuspidale* oder *vierspitzige Curve* als Enveloppe einer Geraden von constanter Länge a, deren Endpunkte auf zwei den Winkel α miteinander bildenden Geraden gleiten.

Diese Curve ist 6^{ter} *Ordnung und* 4^{ter} *Classe.*

Ihr Flächeninhalt ist $\frac{\pi a^2}{8 \sin^2 \alpha}(1 + 2 \sin^2 \alpha)$..

Ihr Studium wurde von Merlieux, *Nouv. Ann.*, 1842, p. 59, question 12 als Thema aufgegeben; Joachimsthal fand ihre Gleichung, ib., 1847; Steiner, ib., 1858 gab viele ihrer Eigenschaften an. Sie wurde dann auch von Bellavitis, *Esposizione del metodo delle equipollenze, Mem. della Società italiana delle scienze,* vol. 25, Modena 1854, in das Französische übersetzt von Laisant, Paris 1874, untersucht, der ihr den Namen gab, und von Mannheim, *Nouv. Ann.*, 1878; über ihre Rectification siehe *Mathesis,* 1894, p. 129. Näheres findet man in dem *Interm. des math.*, 5, p. 160. Vergl. Wölffing, *Biblioth. math.*, (3), 2, 1901, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der cyclischen Curven* (d. h. solcher Curven, die beim Rollen eines Kreises auf einem anderen durch irgend einen Punkt in der Ebene des ersteren beschrieben werden).

§ 13. Die Spiralen. Die Ribaucour'schen Curven.

Mit dem Namen *Spirale* pflegt man Curven zu bezeichnen, die sich in unendlich vielen Windungen, von denen jede folgende entweder innerhalb oder ausserhalb der vorhergehenden liegt, um einen Punkt drehen. Der gemeinsame Name *Spirale* bezieht sich mehr auf das Bild, das ihre Figur unseren Augen bietet, als auf eine allen diesen Curven gemeinsame Eigenschaft.

Jede Spirale ist nothwendiger Weise eine transcendente Curve.

Die Spirale des Archimedes (welche auch *die Conon'sche* genannt wird) hat in Polarcoordinaten die Gleichung:

$$\varrho = a\varphi.$$

Sie ist mithin der Weg eines Punkts, der sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Geraden fortbewegt, während diese gleichförmig um einen ihrer Punkte rotirt. Sie besteht aus zwei zueinander symmetrischen Theilen, die den beiden Theilen entsprechen, in welche die bewegliche Gerade durch den festen Punkt zerlegt wird.

Bei der Spirale des Archimedes ist die Polarsubnormale constant und dem Parameter a gleich.

Der Inhalt der von einem Bogen der Spirale des Archimedes und den beiden Endradienvectoren begrenzten Fläche ist:

$$\frac{a^2}{6}(\varphi_1^3 - \varphi_2^3),$$

worin φ_1, φ_2 *die Argumente der beiden Endpunkte des Bogens bedeuten.*

Die Spirale des Archimedes ist die Fusspunktcurve der Evolvente eines Kreises in Bezug auf das Centrum dieses Kreises.

Die *logarithmische Spirale* hat die Polargleichung

$$\varrho = e^{a\varphi}.$$

Ihre Evolute, ihre Brennlinie durch Reflexion und ihre Brennlinie durch Refraction sind wieder der gegebenen gleiche logarithmische Spiralen. Jacob Bernoulli, *Acta Erud.*, 1691.

Die Curve schneidet den Radiusvector unter constantem Winkel. Sie hat daher auch den Namen *gleichwinklige Spirale (spirale equiangolare)* erhalten.

Der Anfangspunkt der Radienvectoren ist asymptotischer Punkt der Curve.

Die Länge der von dem Punkt $\varrho = 1$, $\varphi = 0$ *aus in negativer Rotationsrichtung genommenen Bogen convergirt gegen die endliche Grösse* $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$, *wenn der Endpunkt dem Pol zustrebt.*

Der Krümmungsmittelpunkt ist der Endpunkt der Polarsubnormalen.

Die Roulette und die Gleitcurve (siehe § 6) *des Pols der logarithmischen Spirale in Bezug auf dieselbe Gerade, als Basis, sind zwei aufeinander senkrecht stehende Gerade.*

Die logarithmische Spirale hat ihre eigene reciproke Polare in Bezug auf jede gleichseitige Hyperbel, deren Centrum im Pol der Spiralen liegt, und welche von der Spiralen berührt wird. Klein-Lie, *Bull. des sciences math.*, 1872, p. 331.

Die Inverse der logarithmischen Spirale ist, wenn das Centrum der Inversion im Pol liegt, wieder eine logarithmische Spirale, die der ersteren gleich ist.

Die logarithmische Spirale wurde zuerst von Cartesius, dann von Jacob Bernoulli untersucht. Literaturnachweise findet man bei Brocard, l. c.; eine kurze Monographie über die Curve ist von Whitworth, *Nouv. Ann.*, 1869. Siehe auch Kap. 7 der *ebenen Curven* von Salmon-Fiedler.

Die *hyperbolische Spirale* ist die Inverse der Spirale des Archimedes; ihre Polargleichung lautet:

$$\varrho = \frac{a}{\varphi}.$$

Die Curve hat den Pol zum asymptotischen Punkt und eine Gerade als Asymptote; sie besteht aus zwei Aesten, die in Bezug auf die zur Asymptote senkrechte und durch den Pol gehende Gerade symmetrisch sind.

Ihre Polarsubtangente ist constant.

Die hyperbolische Spirale ist die Projection einer Schraubenlinie von einem Punkt der Axe aus auf eine zur Axe senkrechte Ebene.

Die *parabolische* oder *Fermat'sche Spirale* hat die Gleichung

$$\varrho^2 = \varphi.$$

Es sei O der Pol und OM die Polaxe, die von der Spirale successiv in den Punkten

$$O,\ M,\ M',\ M'', \ldots$$

getroffen wird.

Beschreibt man von dem Centrum O aus mit dem Radius OM einen Kreis, *so ist der Inhalt I der von dem ersten Bogen OM der Spirale und der Axe OM eingeschlossenen Fläche die Hälfte des Flächeninhalts dieses Kreises; derselbe Flächeninhalt I ist halb so gross, als der Inhalt der von dem ersten Zweig OM der Spirale, dem zweiten Zweig MM' und der Geraden MM' begrenzten Fläche, während der letztere dem Inhalt der von dem zweiten Zweig, dem dritten und der Geraden $M'M''$ umschlossenen Fläche gleich ist, welche ihrerseits wieder dem Inhalt der von dem dritten Zweig, dem vierten und der Geraden $M''M'''$ umgebenen Figur gleich ist,* u. s. w.

Linien, die so beschaffen sind, dass die Projection des Krümmungsmittelpunkts auf den Radiusvector diesen in constantem Verhältniss theilt, heissen *Sinusspiralen*, De la Goupillière; *ihre Polargleichung lautet*

$$\varrho^n = a^n \sin(n\varphi)$$

und ihre natürliche Gleichung:

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

Der Winkel, den die Tangente an die Curve mit dem Radiusvector bildet, ist $n\varphi$.

Für specielle Werthe von n (des Indexes) ergeben sich schon bekannte und einfache Curven; z. B. für $n = 1$ die Kreislinie, für $n = -1$ die Gerade.

Den Sinusspiralen stehen die *Ribaucour'schen Curven* nahe, *deren natürliche Gleichung*

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}} \quad \textit{lautet.}$$

Die Ribaucour'schen Curven sind dadurch ausgezeichnet, dass ihr Krümmungsradius dem zwischen dem Punkt der Curve und einer festen Geraden liegenden Segment der Normalen proportional ist.

Die Zahl n heisst bei der Sinusspiralen sowohl wie bei der Ribaucour'schen Curve, *Index.*

Wenn eine Sinusspirale mit dem Index n auf einer Geraden rollt, so beschreibt ihr Pol (der Anfangspunkt der Radienvectoren) eine Ribaucour'sche Curve, deren Index

$$\frac{n-1}{n+1} \quad \textit{ist.}$$

Bez. der Sinusspiralen citiren wir De la Goupillière, *Nouv. Ann.*, 1876, p. 97; Brocard, ib., 1886.

Die Ribaucour'schen Curven entdeckte Ribaucour bei seinen Untersuchungen über Minimalflächen, *Mém. de l'Ac. de Belg.*, 44; *Nouv. Ann.*, 1888; etc.

Eine Besprechung der beiden letzten Curvenarten findet man bei Cesàro, *Geom. intrins.*, 1896, p. 45, deutsch von Kowalewski, *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, Leipzig 1901. Ueber weitere Angaben siehe Brocard an dem in § 6 angegebenen Ort.

§ 14. Kettenlinie. Delaunay'sche Curve. Tractrix. Sinuscurve. Quadratrix. Elastische Linie.

Die *Kettenlinie* ist die Ruhelage eines gleichförmig dichten unelastischen schweren Fadens, der in zweien seiner Punkte befestigt ist.

Ihre Gleichung lautet:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

und ihre natürliche Gleichung:

$$a\varrho = a^2 + s^2.$$

Die x-Axe steht um die Länge a von dem tiefsten Punkt A der Curve ab; sie heisst die *Axe der Kettenlinie* und *die Curve ist in Bezug auf sie convex.*

Die Kettenlinie ist die Roulette des Brennpunkts einer Parabel, die auf einer Geraden rollt.

Die Tangente an die Kettenlinie in einem Punkt P wird construirt, indem man mit dem Radius a einen Kreis zieht, dessen Centrum der Fusspunkt der Ordinate von P ist, und von P aus eine Tangente an diesen Kreis legt.

Der Krümmungsradius ist an Länge dem Theil der Normalen gleich, der zwischen dem Curvenpunkt und der x-Axe liegt; man erhält daher den Krümmungsmittelpunkt, indem man diese Länge in entgegengesetzter Richtung auf der Normalen abträgt.

Die Kettenlinie ist von allen Curven, welche die gleiche Länge haben und deren Endpunkte dieselben beiden Punkte sind, diejenige, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt. *Repert.*, 1, p. 252.

Durch Rotation um ihre Axe erzeugt die Kettenlinie das *Catenoid,* welches eine Minimalfläche ist. Siehe Kap. 16 und *Repert.*, 1, S. 254, wo auch noch eine andere Eigenschaft der Catenoide angegeben ist.

Den Bogen AP der Kettenlinie erhält man, wenn in dem Schnittpunkt S der Tangente in P mit der Tangente in A ein Loth auf die Tangente in P errichtet wird, welches die x-Axe in R schneidet, und alsdann der Schnittpunkt S auf die x-Axe nach Q projicirt wird. *Die Länge QR ist dem Bogen AP gleich.*

Der Inhalt der Fläche zwischen dem Bogen AP der Kettenlinie, der x-Axe und den Endcoordinaten ist dem Product aus dem Bogen AP und dem Parameter a gleich.

Die Gleichgewichtscurve eines schweren Fadens wurde von Galilei studirt, der sie irrthümlicher Weise für eine Parabel hielt; spätere Untersuchungen sind von Leibniz (1691) und Jacob Bernoulli (1691).

Ueber historische Angaben siehe einen Artikel von Laisant, *Ass. Franç. Congrès de Toulouse*, 1887, p. 64.

Wie die gewöhnliche Kettenlinie die Roulette des Brennpunkts einer Parabel ist, so gibt es auch Curven, welche die Rouletten der Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel sind. Sie werden *elliptische* oder *hyperbolische Kettenlinien* oder auch *Curven Delaunay's* genannt, der sie zuerst (1846) studirte und fand, *dass sie die Meridiane einer Umdrehungsfläche von constanter mittlerer Krümmung sind (Unduloide* und *Nodoide*, siehe Kap. 16).

Die Differentialgleichung der Delaunay'schen Curven lautet:

$$(y^2 + b^2)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 2ay = 0$$

und ihre natürliche Gleichung:

$$\frac{e}{a}\,\varrho = e - \cos\frac{s}{a} + \frac{\sin^2\frac{s}{a}}{e - \cos\frac{s}{a}}.$$

Jede Delaunay'sche Curve ist einer gleichen Curve parallel.

Näheres über diese Curven findet man auch bei Cesàro, *Geom. intrins.*, p. 69, deutsch von Kowalewski.

Tractrix (Huyghens, 1693) heisst eine Curve, welche so beschaffen ist, dass das zwischen dem Berührungspunkt und einer festen Geraden liegende Stück ihrer Tangente von constanter Länge $= a$ ist. Die feste Gerade ist *Asymptote der Tractrix.*

Ihre Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

und die Gleichung in endlichen Termen:

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + a \log\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

Die Curve ist auch die orthogonale Trajectorie der Kreise vom Radius a, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen, oder auch die Evolvente einer Kettenlinie.

Sie kann auch als die Enveloppe der Axe einer Parabel angesehen werden, welche auf einer Geraden rollt.

Die Tractrix ist auch die Meridiancurve der Pseudosphäre und des pseudosphärischen Helicoids Dini's. Siehe Kap. 16, S. 493.

Den Krümmungsradius in einem Punkt P erhält man, wenn von dem Scheitel

$$(x = 0, \quad y = a)$$

der Curve die Parallele zu der Tangente in P gezogen wird, welche die Asymptote in R trifft; *das Segment OR*, wenn unter O die rechtwinklige Projection des Scheitels auf die Asymptote verstanden wird, *ist dem Krümmungsradius an Länge gleich.*

Verlängerte bez. *verkürzte Tractrix* werden die Projectionen der gewöhnlichen Tractrix auf eine durch die Asymptote gelegte Ebene genannt, je nachdem die projicirenden Geraden senkrecht auf der Ebene der Tractrix oder auf der Projectionsebene stehen. Siehe Bianchi, *Geom. diff.*, p. 243, deutsche Ausg., S. 255.

Die Tractrix studirte Bomie, *Mém. de l'Ac. de Paris*, 1712, p. 281; vergl. auch Cesàro, *Mathesis*, 1882, p. 217.

Die Sinuscurve (Sinusoide) hat zur Gleichung

$$y = \sin x.$$

Sie hat unendlich viele Inflexionspunkte auf der x-Axe, die gleichen Abstand von einander haben; in diesen Punkten beträgt die Neigung der Tangente 45^0.

Der Inhalt der Fläche, welche zwischen dem von zwei consecutiven Inflexionspunkten begrenzten Bogen und der x-Axe liegt, ist doppelt so gross als der Inhalt des Quadrats über der linearen Einheit, die durch die Höhe desjenigen Punkts der Sinuscurve über der x-Axe dargestellt wird, in welchem die Tangente der x-Axe parallel ist.

Der zwischen zwei aufeinander folgenden Inflexionspunkten liegende Bogen der Sinuscurve hat dieselbe Länge, wie eine Halb-

ellipse mit den Halbaxen $\sqrt{2}$ *und* 1; *diese Länge wird durch die Formel ausgedrückt:*

$$\pi\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2-\cdots\right\}.$$

Die Quadratrix des Dinostrates (335 vor Chr. Geb.) *ist die Curve, deren Gleichung*

$$\varrho=\frac{2}{\pi}\,\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

oder

$$y=x\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}$$ *lautet.*

Sie hat zu Asymptoten die Linien, welche der Geraden $y=0$ *parallel sind und von dieser um die Grössen* $\pm 2, \pm 4, \ldots$ *abstehen.*

Die Quadratrix lässt sich auf die folgende Art definiren: Man denke sich einen Kreis mit zwei aufeinander senkrechten Durchmessern COA, DOB. Man lasse nun gleichzeitig von O und von A aus zwei bewegliche Punkte mit gleichförmigen Geschwindigkeiten den einen auf der Geraden OB, den anderen auf dem Kreisbogen AB so abgehen, dass sie zu derselben Zeit in B ankommen. *Sind dann L, M zwei Lagen, in denen sich die beiden beweglichen Punkte zu derselben Zeit befinden, so ist der Ort der Schnittpunkte von OM mit der durch L parallel zu OA gezogenen Geraden die Quadratrix.*

Der Abstand des Scheitels der Quadratrix von dem Mittelpunkt des Kreises ist $\frac{2}{\pi}$, man findet auf diese Weise indirect bei der Construction der Quadratrix die Grösse π; die Curve kann daher zur *Quadratur des Kreises* benutzt werden.

Sie wurde auch von Newton untersucht, *Opuscula*, 1, p. 102. Historische Notizen findet man in einem Artikel von P. Tannery, *Bull. des sciences math.*, 1883, p. 278.

Die elastische Linie wird durch die Differentialgleichung

$$dy=\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$$ charakterisirt.

Sie ist die Gleichgewichtscurve einer elastischen Lamelle, die an dem einen Ende befestigt ist und an deren anderem Ende geeignete Kräfte angreifen. Sie wurde zuerst von **Jacob Bernoulli**, *Mém. de l'Ac. de Par.*, 1703, 1705 studirt.

Ihr Krümmungsradius ist der Abscisse umgekehrt proportional.

Die elastische Linie ist von allen isoperimetrischen Curven, die durch zwei feste Punkte gehen, diejenige, welche, um eine Axe rotirend, den Körper vom grössten Volumen erzeugt. Siehe *Repert.*, 1, p. 254.

Sie wurde vom Standpunkt der elliptischen Functionen aus von Enneper, *Ellipt. Funct.*, p. 525 und Halphen, *Fonct. ellipt.*, Bd. 2 behandelt.

§ 15. Doppelt gekrümmte Curven. Helixe. Loxodrome.

Cylinderhelix (Schrauben-, Schneckenlinie) (Eudoxus, 365 vor Chr. Geb.) heisst die auf einem Cylinder liegende Curve, welche die Erzeugenden des Cylinders unter constantem Winkel schneidet. *Sie ist eine geodätische Linie des Cylinders.*

Bei der Abwickelung des Cylinders auf eine Ebene wird die Helix eine Gerade.

In jedem Punkt fällt die Hauptnormale der Helix mit der Flächennormalen zusammen.

Bei jeder Cylinderhelix ist das Verhältniss der beiden Krümmungen constant und umgekehrt.

Die beiden Krümmungen selbst sind nur bei den Schraubenlinien constant, welche auf geraden Kreiscylindern liegen. Puiseux; siehe auch Kap. 16, § 4.

Die Schraubenlinien werden in *linksgewundene* und *rechtsgewundene* je nach ihrer Richtung gegen die Erzeugenden des Cylinders unterschieden; denkt man sich, der Cylinder sei in eine solche Lage gebracht, dass seine Erzeugenden die Richtung der Sehstrahlen haben, und ein Punkt durchlaufe die Helix so, dass er sich dem Beobachter nähert, so ist, wenn diese Bewegung des Punkts die Richtung der Bewegung eines Uhrzeigers zu haben scheint, die Helix *linksgewunden*, anderen Falls *rechtsgewunden.*

So ist z. B. die Helix einer gewöhnlichen Schreinerschraube *rechtsgewunden.*

Die Coordinaten eines Punkts P einer Kreiscylinderhelix, d. h. einer auf einem geraden Kreiscylinder liegenden Schraubenlinie, sind:

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$z = r\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi;$$

dabei ist r der Radius des Kreises, der die Basis des Cylinders bildet, φ der constante Winkel, unter welchem die Helix die Erzeugenden schneidet (der Steigungswinkel), und θ der Winkel, den die x-Axe mit der Geraden bildet, welche den Coordinatenanfang mit der Projection des Punktes P auf die xy-Ebene verbindet.

Der Bogen der Kreiscylinderschraube ist

$$s = r\theta\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}.$$

Die *conische Cylinderhelix (conische Spirale)* ist die auf einem Rotationskegel aufgezeichnete Curve, welche die Erzeugenden unter constantem Winkel schneidet.

Die Projection dieser Helix auf eine zur Axe des Kegels senkrechte Ebene ist eine logarithmische Spirale; diese Helix kann man sich mithin auch auf einem Cylinder aufgezeichnet denken, der zur Basis eine logarithmische Spirale hat; sie ist auch für diesen Cylinder eine Helix, d. h. sie schneidet seine Erzeugenden unter constantem Winkel.

Wickelt man den Kegel auf eine Ebene ab, so wird die conische Cylinderhelix in eine logarithmische Spirale ausgebreitet.

Die Hauptnormale steht senkrecht auf der Axe des Kegels.

Die eben betrachteten Schraubenlinien gehören der allgemeineren Classe der *Loxodromen* (Nonius, 1530) an, d. h. von Curven, die sich auf einer beliebigen Rotationsfläche befinden und die Meridiane dieser Fläche unter constantem Winkel schneiden.

Es ist namentlich der Fall eingehend studirt worden, in welchem die Rotationsfläche eine Kugel ist. Siehe z. B. Joachimsthal, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung*, 3. Aufl., bearb. v. Natani, Leipzig 1890, (1. Aufl., 1872, p. 83).

Ueber die Geschichte der Loxodrome vergl. Günther, *Studien zur Geschichte der math. Geographie,* Halle 1879 und auch einen umfangreichen literarischen Artikel von Brocard, *Bull. de Darboux*, 1879, Thl. 1, p. 329.

§ 16. Die sphärischen cyclischen Curven. Fenster des Viviani. Sphärische spirische Linien.

Man pflegt *sphärische cyclische Curven* die Schnitte einer Kugel mit Flächen 2^{ten} Grads zu nennen. Ein specieller Fall der sphärischen cyclischen Curven sind daher *die sphärischen Kegelschnitte.* Siehe Kap. 10, § 1.

Die ebenen circularen Curven kann man als die Inversen der sphärischen cyclischen Curven ansehen; man braucht nur eine Inversion zu machen, durch welche die Kugel in eine Ebene übergeführt wird. Manche Autoren bezeichnen übrigens in anderem Sprachgebrauch, als S. 544, die ebenen circularen auch als ebene cyclische Curven.

Zum Studium dieser Curven empfehlen wir das Buch von Darboux, *Sur une classe remarqu.* etc., Paris 1896, 2. Ausg., worin man auch viele literarische Angaben findet.

Eine Halbkugel sei gegeben; zieht man einen Durchmesser der Aequatorialebene, beschreibt über den beiden Radien des Durchmessers zwei Kreise, die diese Radien zu Durchmessern haben und construirt alsdann die geraden Cylinder, deren Basis diese Kreise sind, so ist der Schnitt einer der beiden Cylinder mit der Kugel eine Curve, die den Namen *Viviani'sche Curve* oder *Fenster des Viviani (finestra di Viviani)* führt.

Auf diese Curve kam man bei dem Studium eines Problems, das Viviani im Jahre 1692 in Anregung brachte, und welches später von Viviani selbst, von Leibniz, *Acta Erud.,* 1692 und von Johann Bernoulli, ib. gelöst wurde; es handelte sich darum, auf einem halbkugelförmigen Gewölbe vier gleiche Fenster derart zu construiren, dass der übrig bleibende Theil quadrirbar würde.

Construirt man die beiden Cylinder auf die oben angegebene Art, so ist der Inhalt der übrig bleibenden Kugeloberfläche dem Inhalt des über dem Durchmesser der Kugel beschriebenen Quadrats gleich.

Die sphärischen spirischen Curven sind Schnitte einer Kugel mit einem Torus. Siehe Darboux, l. c.

Der Leser, welcher noch Angaben über andere Specialcurven wünscht, wird mit Vortheil ein neues Buch von Brocard zu Rath ziehen, *Notes de Bibliographie des courbes géom.*, Bar le Duc 1897, lithogr., mit Suppl., 1899; es wurde herausgegeben in Folge einer Aufforderung De La Goupillière's (in Bd. 1, p. 37 des *Interméd. des mathématiciens,* 1894), der eine Monographie über alle speciellen Curven zu haben wünschte, die besondere Namen führen. Dieselbe Aufgabe wurde als Concurrenzthema für die Jahre 1894 und 1897 von der Academie der Wissenschaften in Madrid gestellt und der Preis neuerdings von Gino Loria und F. Gomes Teixeira gewonnen. Die prämiirte Arbeit des ersteren hat den Titel: *Le curve piane algebriche e transcendenti; teoria e storia. Saggio di geometria comparata del piano.* Deutsche Ausg. von Fritz Schütte, *Specielle, algebraische und transcendente ebene Curven, Theorie und Geschichte*, Leipzig 1901.

Kapitel XVIII.

Analysis situs oder Topologie. Polyedertheorie. Zusammenhang der Riemann'schen Flächen.

§ 1. Zusammenhang der Flächen. Einseitige und zweiseitige Flächen. Die Grundzahl. Das Geschlecht.

Eine Fläche kann *offen* oder *geschlossen* sein; sie ist *offen*, wenn sie *Ränder* besitzt, d. h. Linien, in deren Punkten sie endigt; sie ist *geschlossen*, wenn sie keine Ränder besitzt.

Ein unendlich kleines um einen Punkt auf einer Fläche liegendes Flächenstück kann in zwei Richtungen oder von entgegengesetzten *Seiten* angeschaut werden; diese beiden Seiten entsprechen den Richtungen der Flächennormalen in dem betreffenden Punkt; in Beziehung auf sie kann jeder Punkt als Doppelpunkt angesehen werden, je nachdem man sich denkt, er gehöre der einen oder der anderen Seite an; wir wollen sagen, diese beiden Punkte, in welche man sich einen und denselben Punkt verdoppelt denkt, seien einander *conjugirt*.

Eine Fläche kann *zweiseitig* sein, d. h. *zwei Seiten* besitzen oder *einseitig*, d. h. nur *eine Seite* haben.

Sie ist *zweiseitig*, wenn man, von einem Punkt der Fläche ausgehend und stetige auf ihr gelegene Wege verfolgend, ohne die Ränder zu überschreiten, niemals zu dem Punkt gelangen kann, der dem Ausgangspunkt conjugirt ist; sie ist dagegen *einseitig*, wenn dies möglich ist.

Beispiele zweiseitiger Flächen sind die Kugel, ein Ebenenstück, u. s. w.

Beispiele von einseitigen Flächen gab Möbius an, *Zur Theorie der Polyeder* etc., *Werke*, 2; *Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders, Leipz. Ber.*, 1865; *Werke*, 2.

Man habe ein Rechteck von Papier $ABCD$, das hinreichend lang ist; die längeren Seiten seien AC, BD; man verbinde den Rand CD, nachdem man ihn um die Gerade gedreht, welche die Mittelpunkte der Seiten AB, CD verbindet, derart mit dem Rand AB, dass der Punkt D mit A zusammenfällt und C mit B. *Die so erhaltene Fläche ist einseitig und offen und hat nur einen Rand.*

Wenn man, bevor CD mit AB verbunden wird, CD eine ungerade Anzahl mal um die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Seiten AB, CD hat rotiren lassen, und dann die beiden Seiten, wie vorher, aufeinander legt, so erhält man wieder *eine einseitige offene Fläche mit nur einem Rand.*

Auch eine *geschlossene* einseitige Fläche lässt sich bilden, z. B. auf die folgende Art (Möbius):

Wenn A, B, C, D, E fünf Punkte sind, von denen vier beliebige nicht in einer Ebene liegen, so bilden die fünf Dreiecke ABC, BCD, CDE, DEA, EAB *eine offene einseitige Fläche,* deren Umfang das Pentagon $ACEBD$ ist.

Nimmt man nun einen Punkt P an, der sich mit keinen beliebigen drei der ersten fünf Punkte in derselben Ebene befindet, so sind die fünf früheren Dreiecke und die fünf anderen PAC, PCE, PEB, PBD, PDA die Seitenflächen eines verschlungenen Polyeders, das eine *geschlossene einseitige Fläche* bildet.

Eine andere geschlossene einseitige Fläche kann man auf die folgende Art herstellen:

Man denke sich eine Kugel mit *zwei* Löchern. Von dem einen Loch lasse man einen biegsamen Schlauch von hinreichender Länge nach aussen hin ausgehen, ziehe ihn, eine Verschlingung bildend, in das Innere der Kugel zurück und lasse ihn an dem anderen Loch von Innen her endigen. Es ergibt sich *eine geschlossene einseitige Fläche.* Dyck, *Math. Ann.,* 32.

Zerschneidet man die Fläche längs den Punkten einer beliebigen ihrer Linien, so macht man einen sogenannten *Schnitt.*

Ein Schnitt kann *offen* oder *geschlossen* sein. Zu den offenen Schnitten zählen diejenigen, deren Endpunkte zwei Punkte des nämlichen Randes sind *(Schnitte 1^{ter} Art)* und die Schnitte, deren Endpunkte zwei Punkte verschiedener Ränder sind *(Schnitte 2^{ter} Art).*

Durch einen Schnitt, der geschlossen oder offen von der 1^{ten} oder 2^{ten} Art ist, kann die Fläche in nicht mehr als zwei Stücke zerfallen.

Wenn eine Fläche zweiseitig ist, so vermehrt ein offener Schnitt 1ter Art die Anzahl der Ränder um einen; ist sie dagegen einseitig, so ändert ein gleicher Schnitt die Anzahl der Ränder entweder überhaupt nicht, oder er vermehrt sie um einen.

Einen Schnitt 1ter Art nennen wir *von der 1ten oder 2ten Classe,* je nachdem er in dem Fall einer einseitigen Fläche die Anzahl der Ränder *vermehrt* oder *nicht.*

Durch den Schnitt 1ter Art und 2ter Classe zerfällt eine einseitige Fläche niemals.

Ein Schnitt 2ter Art vermindert die Anzahl der Ränder dieser Fläche um einen; er kann niemals ihr Zerfallen bewirken.

Ein Schnitt, der längs einer offenen Linie ausgeführt wird, deren eines Ende auf einem Rand liegt und deren anderes Ende, wie auch die ganze Linie, sich im Inneren) der Fläche befindet, vermehrt die Anzahl der Ränder nicht und bewirkt niemals das Zerfallen der Fläche.*

Wenn schliesslich die beiden Endpunkte der offenen und ganz im Inneren der Fläche gelegenen Linie auf keinem Rand liegen, so vermehrt sich die Anzahl der Ränder um einen, die Fläche zerfällt aber nicht.

Wenn eine Fläche zweiseitig ist, so vermehrt ein geschlossener Schnitt die Anzahl der Ränder um zwei; ist sie einseitig, so vermehrt der geschlossene Schnitt die Anzahl der Ränder um zwei oder um einen. Wir sagen, *der geschlossene Schnitt auf einer einseitigen Fläche sei 1ter oder 2ter Classe,* je nachdem der 1te oder 2te Fall eintritt.

Ein geschlossener Schnitt 2ter Classe kann niemals das Zerfallen einer einseitigen Fläche zur Folge haben.

Lässt sich in eine Fläche ein offener Schnitt erster Art machen, ohne dass sie zerfällt, so kann man auch einen geschlossenen Schnitt ausführen, ohne dass sie zerfällt, und umgekehrt.

Eine Fläche heisst *einfach zusammenhängend,* wenn sie endlich, offen, nur von *einem* Rand begrenzt und derart ist, dass jeder geschlossene Schnitt (oder, was äquivalent ist, jeder beliebige offene Schnitt, der zwei Punkte des Randes verbindet) ihr Zerfallen bewirkt.

Eine einfach zusammenhängende Fläche ist immer zweiseitig.

---

*) Unter dem Inneren einer Fläche wird selbstverständlich die Gesammtheit aller nicht zu der Begrenzung gehörigen Punkte der Fläche verstanden.

Der von einem Kreis begrenzte Theil der Ebene ist das einfachste Beispiel einer einfach zusammenhängenden Fläche.

Nimmt man an, die einfach zusammenhängende Fläche sei aus einem biegsamen und elastischen Stoff hergestellt, so kann man sie sich immer durch stetige Deformationen, d. h. durch Ausdehnen und Zusammenziehen, aber ohne Brechen in das von einem Kreis begrenzte Ebenenstück transformirt denken.

Auf jeder zweiseitigen Fläche lassen sich immer geschlossene oder offene Schnitte 1^{ter} und 2^{ter} Art derart ausführen, dass sie einfach zusammenhängend wird.

Durch offene Schnitte 1^{ter} Art und 2^{ter} Classe oder geschlossene Schnitte 2^{ter} Classe lässt sich eine einseitige Fläche stets zweiseitig machen.

Man habe eine Fläche; wir wollen sie durch geeignete Schnitte in eine endliche Anzahl α von Theilen zerlegen, von denen jeder einfach zusammenhängend ist, und wollen annehmen, zu diesem Zweck müssten ausgeführt werden: eine gewisse beliebige Anzahl von geschlossenen Schnitten und von offenen Schnitten, von denen nur ein Endpunkt einem Rand angehört, ferner τ_1 offene Schnitte 1^{ter} Art, τ_2 offene Schnitte 2^{ter} Art, τ_3 offene ganz im Inneren der Fläche liegende Schnitte (deren *Endpunkte* sich ebenfalls im Inneren der Fläche befinden). Es gilt dann der Satz:

Die Zahl

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \alpha$$

ist constant, auf welche Art diese Schnitte auch gemacht werden.

Diese um 2 vermehrte Zahl pflegt man die *Grundzahl* der Fläche zu nennen.

Wenn dagegen, statt einer Fläche, eine Gruppe von s Flächen vorliegt, so besteht ein analoges Theorem für die ganze Gruppe und es gilt eine ähnliche Definition für die *Grundzahl* der Gruppe.

Die Grundzahl K der Gruppe lässt sich durch die Grundzahlen K_i jeder Fläche mittelst der Formel

$$K = \sum_{i=1}^{s} K_i - 2s + 2$$

ausdrücken.

Die Grundzahl einer Fläche kann nicht negativ sein und kann nicht Null sein, wenn die Fläche offen ist.

Die Grundzahl einer einfach zusammenhängenden Fläche ist 1 und umgekehrt, vorausgesetzt, dass die Fläche offen oder aber zweiseitig ist.

Wenn eine Fläche durch einen geschlossenen Schnitt oder durch einen offenen Schnitt 1ter Art in zwei Theile zerfällt, so ist die Summe der Grundzahlen der beiden Theile gleich der Grundzahl der Fläche, um 2 bez. um 1 vermehrt.

Es sei eine zweiseitige geschlossene oder offene Fläche mit $\omega \gtreqless 0$ Rändern gegeben.

Man nennt *Geschlecht* dieser Fläche die grösste Anzahl geschlossener Schnitte oder offener Schnitte 1ter Art, die sich auf der Fläche ausführen lassen, ohne dass sie zerfällt.

Ist p das Geschlecht einer zweiseitigen entweder offenen oder geschlossenen Fläche, so ist die Grundzahl

$$K = 2p + \omega.$$

Geschlecht einer einseitigen Fläche wird die Zahl genannt, welche man erhält, wenn zu der Anzahl von geschlossenen Schnitten 2ter Classe oder von offenen Schnitten 1ter Art und 2ter Classe, die nöthig sind, um die einseitige Fläche zweiseitig zu machen, das Doppelte der Zahl hinzugezählt wird, die das Geschlecht dieser zweiseitigen Fläche angibt.

Wenn π das Geschlecht der einseitigen offenen oder geschlossenen Fläche mit $\omega \gtreqless 0$ Rändern ist und K ihre Grundzahl, so ist

$$K = \pi + \omega.$$

Zusammenhangszahl oder *Zusammenhang* einer beliebigen Fläche heisst die Zahl $K + 2$, wenn die Fläche geschlossen ist und die Zahl K, wenn sie offen ist.

Das Fundamentaltheorem über das Geschlecht einer Fläche lautet: *Von zwei Flächen, die beide zweiseitig oder beide einseitig sind und dasselbe Geschlecht und dieselbe Anzahl von Rändern haben, lässt sich jede in die andere deformiren.*

Das Geschlecht einer Fläche ändert sich nicht, wenn man ein Loch in sie macht.

Ein Loch vermehrt den Zusammenhang einer offenen Fläche um 1, vermindert den Zusammenhang einer geschlossenen Fläche um 1 und vermehrt in jedem Fall die Grundzahl um 1.

Die Studien über den Zusammenhang der Flächen begann Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle,* 54, § 2 und *Fragment aus der Analysis situs, Werke,* p. 448; Neumann, *Abel'sche Integrale,* 1. Ausg., 1865, 2. Ausg., 1884 setzte sie fort.

Nach und nach haben sich diese und andere ihnen verwandte Untersuchungen, mit denen sich schon Listing beschäftigte, (*Vorstudien zur Topologie,* aus den *Göttinger Studien,* 1847) zu einem in sich abgeschlossenen, selbstständigen Theil der modernen Geometrie ausgebildet, der *Analysis situs* oder besser noch *Topologie* genannt wird. (Einige Autoren haben freilich, wie es scheint, dem Wort *Topologie* eine etwas beschränktere Bedeutung beilegen wollen, als der *Analysis situs.*) Es werden in diesem Theil der Geometrie solche Eigenschaften der geometrischen Gebilde untersucht, die unabhängig von ihrer Form und ihrer Grösse sind.

Mit anderen Worten: die *Analysis situs* oder Topologie beschäftigt sich mit den Formen, welche ein geometrisches Gebilde annehmen kann, wenn zwei Formen dieses Gebildes als nicht von einander verschieden angesehen werden, falls man von der einen zur anderen durch *stetige* Deformation übergehen kann; d. h. falls diese Formen sich Punkt für Punkt in ein-eindeutiger Weise einander zuordnen lassen, ohne dass man dabei nothwendiger Weise voraussetzen müsste, das Correspondenzgesetz sei *analytisch;* es genügt, wenn es *stetig* ist.

Die ersten Ausdehnungen auf die Räume von drei Dimensionen sind von Riemann in dem citirten *Fragment;* auf ihn folgte Listing, *Census räumlicher Complexe, Gött. Abh.,* 10, 1861; *Gött. Nachr.,* 1867; allgemeiner sind die Erweiterungen, die zuerst Betti, *Ann. di mat.,* (2), 4, 1870 vornahm.

Andere Studien sind von Picard, *Journ. de Liouv.,* (4), 1; W. Dyck, *Math. Ann.,* 32, 37; De Paolis, *Teoria dei gruppi geom.* etc., *Soc. it. delle scienze,* (3), 7; Tonelli, *Rend. Acc. Lincei,* 1890 und Poincaré, *Journ. de l'Ec. pol.,* (2), 1, 1895; *Rend. Palermo,* 13, 1899; in dem letzteren Aufsatz knüpft der Verfasser an eine im Jahr 1898 in Kopenhagen veröffentlichte Schrift Heegard's an und corrigirt zum Theil seine früheren Untersuchungen vom Jahr 1895. In der Picard'schen Arbeit findet man noch viele sonstige Angaben.

Verwandte Forschungen beschäftigen sich mit der Art, die Verschlingungen der Curven zu lösen oder zu bilden und anderen ähnlichen Dingen; dahin gehören: Simony, *Math. Ann.,* 19, 24 und die Arbeiten, die zugleich die Räume von mehreren Dimensionen einführten, wie Hoppe, *Arch. d. Math.,* 64, 1879; 65, 1880; Durège, *Wien. Ber.,* 1880; Schlegel, *Zeitschr. für Math.,* 28, 1883.

§ 2. Zusammenhang der Räume.

Die Untersuchungen über den Zusammenhang der Flächen wurden von Listing auf die Räume von drei Dimensionen und von Betti, *Ann. di mat.*, (2), 4 auf die mehrdimensionalen Räume ausgedehnt. In dem oben citirten *Fragment* von Riemann sind auch einige Resultate über diesen Gegenstand enthalten.

Wenn $z_1, \ldots, z_n$, n Variable sind, von denen jede alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, so nennen wir das n-fach unendliche Gebiet der Systeme von Werthen dieser Variablen *den Raum von n Dimensionen* und bezeichnen diesen mit R_n; ein System von Werthen der z bildet dann die *Coordinaten* eines Punkts in einem solchen Raum.

Ein System von m Gleichungen zwischen den z bestimmt einen im R_n *enthaltenen* Raum von $n-m$ Dimensionen.

Von einem im R_n enthaltenen Raum R_{n-m} sagt man, er sei *linear zusammenhängend* oder habe einen *Zusammenhang 1ter Art*, wenn sich zwei seiner Punkte immer durch eine vollständig in ihm gelegene Linie verbinden lassen, d. h. wenn jeder Punkt stetig, und immer im R_{n-m} bleibend, in jeden anderen Punkt übergeführt werden kann.

Ist $F(z_1, \ldots, z_n) = 0$ eine Relation zwischen den z, und ist F stetig und hat es nur einen Werth für jedes System von reellen Werthen der z, so theilt der von $F=0$ dargestellte Raum R_{n-1} im Allgemeinen den Raum R_n in zwei Bereiche, für deren einen $F>0$ und für deren anderen $F<0$ ist.

Wenn jeder dieser beiden Bereiche linear zusammenhängend ist, so heisst der Raum R_{n-1} *geschlossen*.

Von einem Raum R_{n-m} sagen wir, er habe den *Flächenzusammenhang* oder den *Zusammenhang 2ter Art*, wenn jede beliebige in ihm enthaltene geschlossene Linie sich stetig in jede andere analoge deformiren lässt und dabei immer im R_{n-m} bleibt; allgemein sagen wir, R_{n-m} habe *den Zusammenhang $r$ter Art*, wenn jeder in ihm enthaltene geschlossene Raum von $r-1$ Dimensionen in jeden anderen analogen stetig deformirt werden kann, ohne dass er während aller Stadien der Deformation aufhört, dem Raum R_{n-m} anzugehören.

Wenn ein Raum R_{n-m} den Zusammenhang $r$ter Art nicht hat, so lassen sich immer in ihm geschlossene Räume von $r-1$ Dimensionen angeben von der Art, dass weder zwei von ihnen in einander, noch auch irgend einer von ihnen in einen Punkt stetig deformirbar sind, dass aber jeder andere analoge geschlos-

sene Raum immer in einen von ihnen oder einen Punkt deformirt werden kann.

Die Anzahl p_r dieser geschlossenen Räume ist ***constant****, auf welche Art man diese Räume auch bestimmen mag*; die Zahl $p_r + 1$ heisst *Zusammenhangszahl r^{ter} Art.*

Für einen Raum, der den Zusammenhang r^{ter} Art hat, ist das entsprechende p_r Null; die Zahl des r^{ten} Zusammenhangs ist 1.

Der Theil der Ebene, welcher zwischen zwei Kreisen enthalten ist, von denen der eine innerhalb des anderen liegt, hat 1 als Zahl des linearen Zusammenhangs und 2 als Zahl des Flächenzusammenhangs.

Für den Raum zwischen zwei Kugeln, von denen die eine innerhalb der anderen liegt, ist die lineare Zusammenhangszahl 1, die Flächenzusammenhangszahl 1 und die Raumzusammenhangszahl 2.

Der von einer ringförmigen Fläche umschlossene Raum hit einfachen linearen (mit der Zahl 1), doppelten Flächen- (mat der Zahl 2) und einfachen Raumzusammenhang.

Der Raum zwischen zwei Ringflächen, von denen die eine sich im Inneren der anderen befindet, hat einfachen Linien-, dreifachen Flächen- und doppelten Raumzusammenhang.

Der Raum zwischen einer Kugel und einem in deren Inneren gelegenen Ring hat einfachen Linien-, doppelten Flächen- und doppelten Raumzusammenhang.

Ueber weitere Einzelheiten und die Literatur vergleiche man die Angaben in dem vorigen Paragraphen; über den Begriff von *einseitigem und zweiseitigem Raum* siehe Poincaré, l. c.

§ 3. Polyedernetz. Theorem von Euler. Polyeder des Raums von drei und mehr Dimensionen.

Auf eine Fläche vom Geschlecht p dehnen wir ein Polyedernetz derart aus, dass die Umgrenzung einer jeden Seitenfläche ein einfach zusammenhängendes Flächenstück umschliesst.

Wenn dieses Netz F Seitenflächen, S Kanten, V Ecken enthält, *so besteht die Relation*

$$V + F = S - 2p + 2.$$

Nimmt man an, die gegebene Fläche sei vom Geschlecht Null z. B. eine Kugel, so erhält man ein schon von Euler gefundenes Theorem:

Wenn ein gewöhnliches convexes Polyeder gegeben ist, und mit V, F bez. S die Anzahl seiner Ecken, Seitenflächen bez. Kanten bezeichnet wird, so gilt immer die Fundamentalbeziehung

$$V + F = S + 2.$$

Solche Polyeder pflegt man *Euler'sche* zu nennen. Vergl. Hessel, *Crelle*, 8.

Dieses Theorem war, wie es scheint, auch den Alten bekannt; es findet sich in einem erst im Jahr 1860 herausgegebenen Fragment von Cartesius (siehe Baltzer, *Monatsber. der Berl. Ak.*, 1861), wurde aber von Euler, *Nova Comm. Petrop.*, 4, 1752 veröffentlicht und bewiesen. Andere Beweise sind von Legendre, *Éléments de géométrie*, 7, 25, Paris 1794, neueste Aufl., ib. 1864; L'Huilier, *Ann. de Gergonne*, 3, 1812; Cauchy, *Journ. de l'Éc. pol.*, 1813; Steiner, *Crelle*, 1; Grunert, ib., 2; Staudt, *Geom. der Lage*; etc.

Weitere Betrachtungen über das Euler'sche Theorem und die Fälle, in denen es nicht gilt, sind von Poinsot, *Journ. de l'Éc. pol.*, cahier 10, 1809; L'Huilier, l. c.; Legendre, l. c.; Gergonne, *Ann. de Gergonne*, 15; Steiner, ib., 19; etc. Man sehe auch das vorzügliche Werk von Baltzer, *Elemente der Mathematik*, 2 Bde., 7. Aufl., Leipzig 1885, 5. Buch, die Stereometrie, § 7 nach, das von Cremona (Genova, 2. ed., 1877) in das Italienische übersetzt worden ist.

Ueber die Ausdehnung des Theorems auf die mehrdimensionalen Räume vergl. Stringham, *Americ. Journ. of Math.*, 3; Biermann, *Wien. Ber.*, 90, 1884; Hoppe, *Grunert's Arch.*, 67; Schlegel, *Nov. Acta der Leop. Deutsch. Ak.*, 44, sowie *Enseignement math.*, 1900, wo man reichhaltige Literaturangaben für den n-dimensionalen Raum findet, und Eberhard, *Math. Ann.*, 36; siehe weiter unten S. 568.

Wenn ein Polyeder gegeben ist und wenn, wie bisher, mit F, S, V die Anzahl der Seitenflächen, Kanten und Ecken bezeichnet wird, so erhält man die Ungleichheiten:

$$\begin{gathered} 6 + S \leqq 3F \leqq 2S, \\ 6 + S \leqq 3V \leqq 2S, \\ 4 + V \leqq 2F \leqq 4V - 8, \\ 4 + F \leqq 2V \leqq 4F - 8. \end{gathered}$$

Die Anzahl der ebenen Winkel der Polygone (Seitenflächen eines Polyeders ist doppelt so gross als die Anzahl der Kanten

Weder können die sämmtlichen Seitenflächen mehr als fünf Ecken haben, noch können die sämmtlichen körperlichen Winkel mehr als fünfflächig sein.

Es gibt keine Polyeder mit 7 Kanten:

Wenn mit F_3 die Anzahl der dreieckigen Seitenflächen eines Polyeders, mit F_4 die der viereckigen Seitenflächen, etc., mit V_3 die Anzahl der 3-flächigen körperlichen Winkel, mit V_4 die der 4-flächigen körperlichen Winkel, etc. des Polyeders bezeichnet werden, *so bestehen die Relationen:*

$$2(F_3 + F_4 + \cdots) = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + \cdots,$$
$$2(V_3 + V_4 + \cdots) = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + \cdots,$$
$$F_3 + V_3 = 8 + (F_5 + V_5) + 2(F_6 + V_6) + \cdots.$$

Ist ein Polyeder gegeben, so existirt im Allgemeinen ein anderes ihm *duales*, d. h. ein solches, welches dieselbe Anzahl von Kanten hat und so beschaffen ist, dass jeder m-seitigen Seitenfläche des einen ein m-flächiger körperlicher Winkel des anderen entspricht und umgekehrt.

Die Eigenschaften der Polyeder unterliegen daher einem leicht ersichtlichen Dualitätsgesetz.

Regelmässige oder auch *Platonische Polyeder* werden solche genannt, deren Seitenflächen und körperliche Winkel regelmässig und alle von derselben Art sind.

In dem gewöhnlichen Raum existiren nur fünf regelmässige Polyeder.

Sie sind:

1. *Das Tetraeder* mit 4 dreieckigen Seitenflächen, 4 Ecken mit dreiflächigen körperlichen Winkeln, 6 Kanten. Nimmt man an, der Radius der dem Tetraeder umschriebenen Kugel sei gleich 1, so ist die Länge einer Kante
$$l = 1{,}632994\ldots.$$
Die Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Ecken eines zweiten Tetraeders und die Mittelpunkte der Kanten die Ecken eines Octaeders.

2. *Der Cubus oder Würfel (Hexaeder)* mit 6 viereckigen Seitenflächen, 8 Ecken mit dreiflächigen körperlichen Winkeln, 12 Kanten von der Länge
$$l = 1{,}154700\ldots$$

Die Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Ecken eines Octaeders.

3. *Das Octaeder* mit 8 dreieckigen Seitenflächen, 6 Ecken mit vierflächigen körperlichen Winkeln, 12 Kanten von der Länge

$$l = 1{,}414214\ldots$$

Die Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Ecken eines Würfels.

4. *Das Dodekaeder* mit 12 fünfeckigen Seitenflächen, 20 Ecken mit dreiflächigen körperlichen Winkeln, 30 Kanten von der Länge

$$l = 0{,}713644\ldots$$

Die Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Ecken eines Ikosaeders und die Mittelpunkte der Kanten die Ecken von fünf Octaedern.

5. *Das Ikosaeder* mit 20 dreieckigen Seitenflächen, 12 Ecken mit fünfflächigen körperlichen Winkeln, 30 Kanten von der Länge

$$l = 1{,}051462\ldots$$

Die Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Ecken eines Dodekaeders und die Mittelpunkte der Kanten die Ecken von fünf Octaedern.

Halbregelmässige oder *Archimedische Polyeder* heissen solche, deren körperliche Winkel sämmtlich einander gleich oder ähnlich sind, und deren Seitenflächen aus regelmässigen, aber im Allgemeinen verschiedenen Polygonen bestehen, oder auch Polyeder, die zu diesen correlativ sind..

Wenn die körperlichen Winkel sämmtlich m-flächig sind, so ist

$$V = 2\,\frac{F-2}{m-2};$$

mithin sind die allein möglichen Fälle:

$$m = 3, \quad 2S = 3V = 6(F-2),$$
$$m = 4, \quad S = 2V = 2(F-2),$$
$$m = 5, \quad 2S = 5V = \frac{10}{3}(F-2).$$

Nur in den beiden ersten Fällen $m = 3$ und $m = 4$ sind Polyeder von $2n$ Ecken für ein beliebiges n möglich; jeder körperliche Winkel wird dabei entweder aus zwei dreieckigen und einer n-seitigen Seitenfläche oder aus drei dreieckigen und einer n-seitigen Seitenfläche gebildet; ausser diesen Fällen von *unbestimmten* Polyedern existiren nur noch 13 andere Archimedische Polyeder und zwar 7 für $m = 3$, 4 für $m = 4$ und 2 für $m = 5$.

Die Untersuchungen des Archimedes über die von ihm gefundenen Polyeder sind uns von Pappus, *Coll. Math.*, 5, überliefert worden; vergl. M. Cantor, *Geschichte der Math.*, Bd. 1, 2. Aufl., 1894, p. 292. Nach Pappus hat sich Kepler, *Harm. mundi,* 2, p. 28 mit den Polyedern beschäftigt. Näheres findet man bei Baltzer, l. c. Ueber Vielecke und Vielflache existirt auch ein zusammenfassendes Werk von Brückner, Leipzig 1900.

In dem Raum von 4 Dimensionen gibt es 6 regelmässige Polyeder und zwar:

1) *Das Pentaedroid*, von 5 Tetraedern begrenzt, von denen je 4 eine Ecke gemeinschaftlich haben; es hat 5 Ecken, 10 Kanten, 10 Seitenflächen und ist correlativ zu sich selbst.

2) *Das Octaedroid,* von 8 Würfeln begrenzt, von denen je 4 eine Ecke gemeinschaftlich haben; es hat 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Seitenflächen.

3) *Das Hexadekaedroid* mit 16 Tetraedern, 8 Ecken, 24 Kanten, 32 Seitenflächen; es ist correlativ zu der vorhergehenden Figur, zu der es sich verhält, wie das Octaeder zum Cubus.

4) Ein Polyeder, das 24 Octaeder, 24 Ecken, 96 Kanten, 96 dreieckige Seitenflächen besitzt; es ist correlativ zu sich selbst.

5) Ein Polyeder mit 600 Tetraedern, 120 Ecken, 720 Kanten, 1200 dreieckigen Seitenflächen.

6) Ein Polyeder mit 120 Dodekaedern, 600 Ecken, 1200 Kanten, 720 fünfeckigen Seitenflächen; es ist correlativ zu dem vorhergehenden.

In den Räumen von mehr als 4 Dimensionen *gibt es nur 3 regelmässige Polyeder;* sie sind Erweiterungen der ersten drei, vorstehend angegebenen Polyeder, wie diese ihrerseits Erweiterungen des Tetraeders, Cubus und Octaeders sind.

Wenn der Raum n Dimensionen hat, so ist die Anzahl der Ecken dieser Polyeder bez.

$$n + 1, \quad 2^n, \quad 2n,$$

wobei das erste Polyeder correlativ zu sich selbst und von den beiden anderen das eine correlativ zu dem anderen ist.

Nimmt man an, in dem Raum von n Dimensionen sei der Radius der *Kugel*, in welche diese Polyeder eingeschrieben sind, gleich 1, *so sind die Längen der Kanten bez. gleich*

$$\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Die Ausdehnung der Euler'schen Formel auf ein Polyeder im Raum von n Dimensionen liefert:

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \cdots + (-1)^{n-1} = 0,$$

worin N_0, N_1, N_2, ... die Anzahl der Ecken, Kanten, Seitenflächen, der Räume von 3 Dimensionen, etc. des Polyeders bezeichnen. Stringham.

Ueber die regelmässigen Polyeder in den Räumen von 4 und mehr Dimensionen siehe Stringham, l. c.; Scheffler, *Die polydimensionalen Grössen*, Braunschweig 1880; Schlegel, l. c.; *Bull. de la Soc. math.*, 10, p. 172; *Rend. Palermo*, 1891 sowie R. Hoppe, *Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen, Archiv der Math.*, 67, 1882.

Untersuchungen über die Polyeder stellten ferner an: Poinsot, *Compt. Rend.*, 46, 1858, p. 65; Möbius, *Werke*, 2; Kirkman, *Mem. Phil. Soc. Manchester*, 1854, 1862; Jordan, *Crelle*, 66, 68, 70; Eberhard, ib., 106; Cesàro, *Mem. Acc. Lincei*, 6, 2. Thl., p. 75, 1877; Dostor, *Journ. des math. pures et appliquées*, (2), 5, p. 209, 1879.

In der wiederholt erwähnten L. Brill'schen Sammlung befinden sich auch Modelle, welche die Projectionen der regelmässigen Polyeder des Raums von 4 Dimensionen auf den Raum von 3 Dimensionen darstellen.

§ 4. Zusammenhang der Riemann'schen Flächen. Reguläre und symmetrische Riemann'sche Flächen.

In Kap. 15, § 2 des ersten Bands des Repertoriums war schon bei Gelegenheit der algebraischen Functionen von den sogenannten *Riemann'schen Flächen* die Rede. Es wurden dort speciell die zweiblättrigen *(hyperelliptischen)* Flächen betrachtet und angegeben, auf welche Art, d. h. durch welche Schnitte sich diese Flächen *einfach zusammenhängend* machen lassen.

Bei den Flächen von beliebigem Geschlecht bietet sich auf analoge Art das Problem dar, die Fläche zuerst auf einen bestimmten Typus zurückzuführen und dann die Schnitte zu construiren, die sie einfach zusammenhängend machen.

Wir gehen auf die Einzelheiten der Lösung dieser Probleme hier nicht näher ein und erwähnen nur, dass sich Lüroth in einem kurzen Aufsatz *„Ueber Verzweigungsschnitte und Querschnitte"* in den *Math. Ann.*, 4 und dann Clebsch, ib., 6 mit ihnen beschäftigt haben; ihre Resultate wendeten später Kasten, *Dissert.*, Göttingen 1876 auf den Fall einer dreiblättrigen Fläche und Graf, *Dissert.*, Bern 1878 auf eine sechsblättrige Fläche mit 20 Verzweigungspunkten an. Andere verwandte Arbeiten sind von Lüroth, *Erlanger Sitz. Ber.*, 1883; *Abh. der kgl. bayr. Acad.*, München 1885, 1887.

Jeder Verzweigungspunkt, in dem sich m_1 Blätter der Fläche cyclisch vereinigen, ist $m_1 - 1$ einfachen Verzweigungspunkten gleichwerthig, d. h. Punkten, in denen nur zwei Blätter verbunden sind. Siehe auch *Repertorium*, 1, p. 389.

Wenn die Fläche n Blätter hat, vom Geschlecht p ist und die Gesammtzahl der einfachen Verzweigungspunkte, denen die sämmtlichen Verzweigungspunkte der Fläche äquivalent sind, t genannt wird, so ist:

$$t = 2n + 2p - 2.$$

Das Geschlecht einer Riemann'schen Fläche ist

$$p = -n + 1 + \tfrac{1}{2}\sum_i (m_i - 1),$$

worin die Summirung $\sum$ über alle Zahlen m_i zu erstrecken ist, welche die Anzahl der in jedem Verzweigungspunkt cyklisch miteinander verbundenen Blätter angeben.

Ist das Geschlecht p gegeben, so ist der kleinste Werth der Zahl n die grösste ganze in $\frac{p+3}{2}$ enthaltene Zahl.

Hurwitz, *Math. Ann.*, 39 hat gefunden, dass, wenn die t Werthe von z, für welche eine Riemann'sche Fläche mit n Blättern und vom Geschlecht p Verzweigungen haben soll, gegeben sind, es für $n = 2$ *eine* Riemann'sche Fläche mit diesen Verzweigungen gibt, ferner $\frac{1}{2}(3^{t-2} - 1)$ solche Flächen für $n = 3$; $\frac{1}{2}(2^{t-4} - 1)\ (3^{t-2} - 1)$ für $n = 4$; etc.

Wenn das Geschlecht $p = 0$ und die Anzahl der Blätter $n\ (> 2)$ ist, so beträgt die Anzahl der Riemann'schen Flächen

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\, n^{n-4}.$$

Dieses Problem untersuchte für $n = 3$ auch Kasten, l. c.

Eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht p lässt sich im Allgemeinen auf ∞^{ϱ} Arten conform (winkeltreu) auf sich selbst abbilden; dabei ist $\varrho = 3$ für $p = 0$, $\varrho = 1$ für $p = 1$ und $\varrho = 0$ für $p > 1$. Schwarz, *Crelle*, 87; Hettner, *Gött. Nachr.*, 1880, p. 386; Noether, *Math. Ann.*, 20, 21; Klein, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Leipzig 1882, p. 66, 67.

Alle Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null lassen sich conform ineinander transformiren; sie haben keine absolute Invariante (keinen Modul); d. h. es existirt kein Ausdruck, welcher von den die Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null bestimmenden Constanten abhängt, und unverändert bleibt, wenn die Riemann'sche Fläche transformirt wird.

In dem Fall $p = 1$ gibt es dagegen einen einzigen Modul, für $p > 1$ existiren $3p - 3$, im Allgemeinen $3p - 3 + \varrho$ Moduln, worin ϱ die oben angegebene Bedeutung hat. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle*, 54, 1857, § 12.

Jede Riemann'sche Fläche mit n Blättern und t Verzweigungspunkten lässt sich durch stetige Variation der Constanten in jede andere Riemann'sche Fläche mit derselben Anzahl von Blättern und Verzweigungspunkten transformiren.

Dieses Theorem lässt sich aus den Abhandlungen von Lüroth, *Math. Ann.*, 4; Clebsch, ib., 6 entnehmen; siehe Klein, l. c., p. 66.

Benutzt man den für die Minimalflächen geltenden Satz, dass ihre sphärische Abbildung conform ist (vergl. Kap. 16), so ergibt sich: *Eine auf die Kugel, statt auf die Ebene, ausgebreitete Riemann'sche Fläche mit mehreren Blättern lässt sich conform auf eine Minimalfläche abbilden.* Weierstrass.

Man erhält so eine Fläche von gewöhnlichem Aussehen, die, wie die Riemann'sche, zum Studium der analytischen Functionen benutzt werden kann; mittelst der Principien der *Analysis situs* kann zwar bekanntlich immer eine Fläche von gewöhnlichem Aussehen, d. h. ohne Verzweigungen, gefunden werden, die eine Deformation einer beliebigen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht p ist (wie z. B. die Kugel mit p Henkeln, siehe

Repert., 1, p. 392); die Bedeutung des vorstehenden Theorems beruht jedoch darauf, dass die *Minimal*fläche und die Riemann-sche sich gegenseitig *conform (winkeltreu)* aufeinander abbilden lassen, was für die Kugel mit p Henkeln in Beziehung zur Riemann'schen Fläche nicht gilt.

Eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht $p > 1$ kann nicht unendlich viele ein-eindeutige Transformationen in sich selbst besitzen, sie kann aber eine *endliche* Anzahl derselben haben.

Wenn $f(w, z) = 0$ die der Riemann'schen Fläche in der Ebene z entsprechende Gleichung ist, so wollen wir

$$w_1 = R_1(w, z),$$
$$z_1 = R_2(w, z)$$

setzen und dabei seien die R rationale Functionen, welche umgekehrt die w, z als rationale Functionen der w_1, z_1 liefern.

Wir nehmen an, die vorstehende Transformation, die wir mit S bezeichnen, sei so beschaffen, *dass für sie die Riemann-sche Fläche sich in sich selbst transformirt.*

Die Anzahl der birationalen oder ein-eindeutigen Transformationen einer Riemann'schen Fläche in sich selbst kann nicht grösser als $84(p-1)$ *für* $p > 1$ *sein.* Hurwitz, *Math. Ann.*, 41, p. 424.

Eine birationale Transformation einer Riemann'schen Fläche in sich selbst ist immer periodisch, d. h., wenn man von einem Punkt P ausgeht und die Transformation m-mal ausführt, so muss man wieder zu P zurückkehren. Der grösste Werth von m ist $10(p-1)$.

Jede Riemann'sche Fläche, die eine Transformation in sich selbst von der Periode m hat, lässt sich durch eine Gleichung vom Typus $\varphi(w^m, z) = 0$ *und ihre Transformation durch die reducirten Formeln*

$$w_1 = e^{\frac{2i\pi}{m}} w,$$
$$z_1 = z$$

definiren.

Dieses letztere Theorem gilt auch für $p = 0$ und $p = 1$; es ist, wie auch die vorhergehenden, von Hurwitz, *Math. Ann.*, 32.

Ausser den S lassen sich auch noch andere Transformationen denken, die durch die Formeln

$$w_1 = R_1(\bar{w}, \bar{z}),$$
$$z_1 = R_2(\bar{w}, \bar{z})$$

definirt werden; darin bedeuten $\bar{w}$, $\bar{z}$ die zu w, z *conjugirt* complexen Werthe.

Eine solche Transformation möge Σ heissen; wir können annehmen, der Riemann'schen Fläche gehören auch Transformationen Σ an.

Alle Transformationen S oder Σ, welche zu einer Riemann'schen Fläche gehören, bilden offenbar eine *Gruppe*. Siehe *Repert.* 1, p. 28, 204.

Eine Riemann'sche Fläche, zu welcher eine Transformation Σ von der Periode 2 gehört (so dass $\Sigma^2 = 1$ ist), heisst *symmetrisch*.

Wenn die Relation $f(w, z) = 0$ reelle Coefficienten hat, so leuchtet ein, dass der Riemann'schen Fläche die Substitution Σ vom Typus

$$w_1 = \bar{w},$$
$$z_1 = \bar{z}$$

entspricht und die *Riemann'sche Fläche mithin symmetrisch ist.*

Es gilt aber auch umgekehrt: *Wenn die Riemann'sche Fläche symmetrisch ist, so existirt unter den unendlich vielen Formen der Gleichung $f = 0$, die ihr entsprechen, immer eine, deren Coefficienten reell sind.*

Auf den *symmetrischen* Flächen gibt es Linien, die bei der *Linientransformation (Symmetrie)* unverändert bleiben. *Die Anzahl dieser Linien kann nicht grösser als $p + 1$ sein.*

Die symmetrischen Riemann'schen Flächen wurden von Klein, *Riemann's Theor. der alg. Funct.* etc., Leipzig 1882 und dann von Weichold, *Zeitschr. für Math.*, 28 untersucht. Ihnen ist ein grosser Theil von Klein's autographirten Vorlesungsheften, V, *Riemann'sche Flächen,* Heft 2, S. S. 1892, (bei Teubner in Leipzig erschienen) gewidmet.

Eine Riemann'sche Fläche mit N Blättern, die sämmtlich gleich verzweigt sind, d. h. so, dass N Transformationen existiren, bei welchen man von einem Blatt zu einem beliebigen anderen übergehen kann, heisst *eine regulär verzweigte Riemann-sche Fläche* oder auch einfach *regulär.*

Jede einer binomischen Gleichung entsprechende Riemann'sche Fläche ist regulär.

Auf einer solchen Riemann'schen Fläche müssen die Verzweigungspunkte so angeordnet sein, dass sich, wenn $z = z_0$ ein Werth von z ist, für welchen eine Verzweigung besteht, die N Blätter für $z = z_0$ in $\frac{N}{r_i}$ Cyclen vertheilen, von denen jeder r_i Blätter hat.

Das Geschlecht ist in diesem Fall:

$$p = -N + 1 + \frac{N}{2} \sum_i \frac{r_i - 1}{r_i},$$

worin r_i die Anzahl der cyclisch in jedem Verzweigungspunkt vereinigten Blätter bedeutet und die Summirung $\sum$ über alle Verzweigungsstellen, d. h. alle Verzweigungspunkte, die in *einem einzigen* Blatt enthalten sind, zu erstrecken ist.

Es sei die Gleichung $f(w, z) = 0$ gegeben; man betrachte sie als eine algebraische Gleichung in Bezug auf die einzige Variable w; d. h. man denke sich, die Variable z trete darin, wie ein Parameter, auf, und man bilde dann die *Galois'sche Resolvente* dieser Gleichung.

Man erhält eine zweite Gleichung von einem gewissen Grad N, gleich der Anzahl der Substitutionen der Gruppe, die zu der gegebenen algebraischen Gleichung gehört, vergl. *Repert.*, 1, p. 104; *die Riemann'sche Fläche mit N Blättern, welche der Galois'schen Resolvente mit einem Parameter entspricht, ist regulär verzweigt.*

Die Riemann'schen regulär verzweigten Flächen wurden zuerst von Klein, *Math. Ann.*, 14 untersucht. Er studirte speciell den Fall $p = 3$, $N = 168$, welcher einer Galois'schen Resolvente der Modulgleichung für die Transformation 7ter Ordnung der elliptischen Functionen entspricht.

Später beschäftigte sich mit ihnen Dyck, *Dissert.*, München 1879; *Math. Ann.*, 17, 20, der die Fälle $p = 1, 2, 3$ und in einer anderen Arbeit in demselben Bd. 17 der *Math. Ann.*, p. 510 auch den Fall $p = 3$, $N = 96$ betrachtete.

Ueber die Werthe von N, welche den Werthen $p = 0, 1, 2$ entsprechen, siehe Appell-Goursat, *Fonct. algébr.*, Paris 1895,

p. 241 und ff., wo man auch noch andere Angaben findet. Für $p = 0$ erhält man Riemann'sche Flächen von 12, 24, 60 **Blättern**; *die zugehörigen Gruppen sind Polyedergruppen*. Vergl. *Repert.*, 1, p. 375 u. ff.

Die diesen Fällen entsprechenden algebraischen Gleichungen lauten:

$$N = 12, \quad z = \frac{(w^4 - 2\sqrt{-3}\,w^2 + 1)^3}{(w^4 + 2\sqrt{-3}\,w^2 + 1)^3},$$

$$N = 24, \quad z = \frac{(w^8 + 14w^4 + 1)^3}{108\,w^4(w^4 - 1)^4},$$

$$N = 60, \quad z = \frac{(-w^{20} + 228\,w^{15} - 494\,w^{10} - 228\,w^5 - 1)^3}{1728\,w^5(w^{10} + 11\,w^5 - 1)^5}.$$

Die in der ersten Formel enthaltenen Polynome liefern, gleich Null gesetzt, die sogenannten *Tetraedergleichungen*, vergl. *Repert.*, 1, p. 377; der Zähler und Nenner der zweiten Formel entsprechen den sogenannten Polynomen des *Cubus* und des *Octaeders;* der Nenner der letzten Formel ist die 5^te^ Potenz des Polynoms des *Ikosaeders* und der Zähler dessen Hesse'sche Form. Siehe Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Leipzig 1884.

Wichtig ist das folgende Theorem von Dyck, *Math. Ann.*, 20, p. 30, das Hurwitz verallgemeinert hat, ib., 41, p. 421:

Wenn eine endliche Gruppe von N Transformationen gegeben ist, so lässt sich immer eine regulär verzweigte Riemann-sche Fläche von N Blättern finden, deren Gruppe holoedrisch isomorph zur gegebenen Gruppe ist.

Mit Hülfe dieses Theorems kann, wenn eine Riemann'sche Fläche gegeben ist, die eine Gruppe von Transformationen in sich selbst hat, immer eine regulär verzweigte Riemann'sche Fläche construirt werden, welche dieselbe Gruppe besitzt.

Ferner:

Ist eine Gruppe von Transformationen gegeben, so lässt sich immer auf viele verschiedene Arten eine Riemann'sche Fläche construiren, welche eine Gruppe hat, die holoedrisch isomorph zu der gegebenen ist. Hurwitz.

§ 5. Die Riemann'schen Flächen in projectivem Sinn von Klein.

Da die *Riemann'schen Flächen in projectivem Sinn*, die Klein studirt hat, in naher Beziehung zu dem Gegenstand unseres Kapitels stehen, so wollen wir zum Schluss noch einige Worte über sie sagen.

Wir betrachten eine Curve von einer gewissen Classe m. Von jedem reellen Punkt P der Ebene lassen sich m Tangenten an die Curve ziehen, von denen ein Theil imaginär sein kann; jeder imaginären Tangente entspricht ein imaginärer Berührungspunkt, also ein imaginärer Punkt der Curve.

Wenn wir uns daher den Punkt P in ebensovielen aufeinander gelegten Blättern so oft gezählt denken, als imaginäre Tangenten von P aus an die Curve gezogen werden können und als es daher imaginäre Punkte der Curve (Berührungspunkte der von P aus gezogenen Tangenten) gibt, so stellt die Gesammtheit der so angeordneten Punkte P ein reelles geometrisches Gebilde dar, von dessen Punkten jeder einzelne einem imaginären Punkt der Curve entspricht. Was nun die reellen Punkte der Curve angeht, so erhält man sie ebenso, wenn der Punkt P auf den reellen Zweig der Curve zu liegen kommt, weil alsdann zwei conjugirte imaginäre Tangenten sich vereinigen und eine reelle Tangente mit einem reellen Berührungspunkt liefern. Die Ebenenstücke, die von den Punkten P gebildet werden, müssen mithin an der reellen Contour der Curve endigen und sich dort zu je zweien miteinander verknüpfen.

Man habe z. B. eine Ellipse. Die einzigen Punkte der Ebene, von denen aus man imaginäre Tangenten an sie ziehen kann, liegen in ihrem Inneren, und zwar können von diesen Punkten aus je *zwei* conjugirte imaginäre Tangenten an sie gezogen werden; man muss sich daher denken, der Theil der Ebene im Inneren der Ellipse sei in zwei gleiche Blätter verdoppelt und diese seien längs der Ellipse miteinander verbunden. Man erhält eine Fläche, die sich, wie man sieht, unmittelbar in eine Kugel deformiren lässt (eine Fläche vom Geschlecht Null).

So leicht ist aber die Construction der Fläche nicht, wenn die Fundamentalcurve von höherer Classe ist; das Problem, welches dabei zu lösen ist, besteht darin, die Art zu ermitteln, auf welche die verschiedenen Blätter verbunden werden müssen;

es wird gewisse Theile der Ebene geben, die als doppelt, gewisse andere, die als vierfach etc. anzusehen sind.

Wir geben die folgende Literatur über diesen Gegenstand an: Klein, *Math. Ann.*, 7, 10; Harnack, ib., 9, welcher die den Curven 3ter Classe entsprechenden Riemann'schen Flächen construirte und Haskell, *Dissert.*, Baltimore 1890, der sich speciell mit der Curve 4ter Classe beschäftigte, deren Gleichung in Geradencoordinaten

$$u_1^3 u_2 + u_2^3 u_3 + u_3^3 u_1 = 0$$

lautet. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine *automorphe* Form; ihre Gruppe enthält 168 Transformationen. Siehe *Repert.* 1, p. 346.

Kapitel XIX.

Projective Geometrie der mehrdimensionalen Räume.

§ 1. Allgemeines. Lineare Mannigfaltigkeiten. Projective und metrische Relationen. Homographische Correspondenzen.

Wenn n Variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben sind, so ist jede Gruppe von speciellen (reellen oder auch complexen) Werthen dieser Variablen ein Element (Punkt) eines *Raums von n Dimensionen, eines Hyperraums*, den wir mit R_n bezeichnen wollen.

Statt n Variable kann man auch $n+1$ und die Verhältnisse von n dieser Variabeln zur letzten betrachten; der Punkt des R_n wird durch die Werthe dieser Verhältnisse bestimmt und die entsprechenden Werthe der $n+1$ Variabeln kann man die *homogenen Coordinaten* des Punkts nennen; sie können alle möglichen Werthe annehmen, nur dürfen sie nicht sämmtlich Null sein.

Eine *homogene lineare* Gleichung zwischen diesen homogenen Coordinaten definirt eine *lineare* im R_n enthaltene *Mannigfaltigkeit*, welche man eine $n-1$-*dimensionale Ebene* E_{n-1} *im* R_n, oder, wie die Franzosen und Italiener sagen, *Hyperebene* nennt. *Der Raum* R_n *enthält* ∞^n *solche Ebenen, wie er* ∞^n *Punkte enthält.*

Die Ebene E_{n-1} und der Punkt können als zueinander *duale* Elemente des Raums R_n angesehen werden; jene kann man sich aus Punkten, diesen dual aus Ebenen E_{n-1} zusammengesetzt denken.

Zu *homogenen Coordinaten einer* E_{n-1} kann man die $n+1$ Coefficienten ihrer Gleichung nehmen.

Die Gesammtheit der Punkte, deren Coordinaten *zwei* linearen Gleichungen genügen, bildet eine Mannigfaltigkeit von $n-2$ Dimensionen, die man $n-2$-*dimensionale Ebene* E_{n-2} nennt; die Italiener sagen *bipiano*; die durch k lineare Gleichungen gegebene Mannigfaltigkeit heisst *eine* $n - k$*-dimensionale Ebene* E_{n-k}.

Eine E_0 ist ein Punkt; eine E_1 nennt man eine Gerade; eine E_2 bezeichnet man auch bisweilen als gewöhnliche Ebene, eine E_3 als gewöhnlichen Raum.

Nimmt man zu Elementen des R_n die $n - 1$-dimensionalen Ebenen E_{n-1} anstatt der Punkte, so ergibt sich durch einfache bekannte Betrachtungen anstatt der ν-dimensionalen Ebene E_ν ein $(n - \nu - 1)$-dimensionales ebenes Punktgebilde $P_{n-\nu-1}$, durch das ∞^ν E_{n-1} hindurchgehen.

Die E_ν und die $P_{n-\nu-1}$ bilden die beiden Reihen von Grundgebilden, die sich im Raum R_n dual entsprechen; die aus Punkten bestehende E_1 und der von ∞^{n-2} E_{n-1} umhüllte P_1 sind Gebilde 1^ter^ Stufe (von einer Dimension); die E_2 und der P_2 sind Gebilde 2^ter^ Stufe, und so weiter.

Die Ebene E_{n-k} *wird im Allgemeinen durch* $n - k + 1$ *Punkte bestimmt; sie ist ein linearer Raum* $(n - k)^{\text{ter}}$ *Dimension, ein im* R_n *enthaltener Raum* R_{n-k}.

Zwei lineare im R_n *enthaltene Räume* R_{n-k} *und* $R_{n-k'}$ *haben im Allgemeinen keine Punkte gemeinschaftlich, wenn* $k + k' > n$ *ist; sie haben mindestens einen Raum* R_r *gemeinschaftlich, wenn*

$$k + k' = n - r \quad \textit{ist;}$$

auch wenn $k + k' > n$ *ist, können sie Punkte gemeinschaftlich haben.*

Wenn R_r, $R_{r'}$ *keine Punkte gemeinsam haben und zum* R_n *gehören, so ist der lineare Raum kleinster Dimension, der zum* R_n *gehört und sie beide enthält, von der Dimension* $r + r' + 1$.

Haben ferner R_r und $R_{r'}$ einen Raum R_m gemeinsam, so gilt der Satz:

Wenn zwei lineare Räume R_r *und* $R_{r'}$ *einen Raum* R_m *gemeinsam haben, so ist der lineare Raum kleinster Dimension* t, *der sie enthält, von der Dimension*

$$t = r + r' - m,$$

d. h., es ist

$$t + m = r + r'.$$

Weitere Resultate über die in einem R_n enthaltenen linearen Räume findet man bei Bertini, *Rend. Istit. Lomb.*, 1886; Segre, *Rend. Palermo*, 2, 1888; Castelnuovo, *Rend. Acc. Lincei*, 1889.

Durch Erweiterung der gewöhnlichen Formeln und Betrachtungen der analytischen Geometrie und durch Einführung der Begriffe des *Parallelismus*, der *senkrechten Richtung*, des *Abstands*, der *Winkel* etc. lässt sich eine *metrische* Geometrie der mehrdimensionalen Räume aufstellen.

Solche Betrachtungen wurden von Jordan, *Bull. de la Soc. math.*, 3, p. 103 und von D'Ovidio, *Mem. Acc. Lincei*, 1877; *Math. Ann.*, 12 angestellt; der letztere Autor verallgemeinerte die Formeln, indem er ein beliebiges *quadratisches Gebilde im* R_n (eine *hyperquadratische Fläche*) als das *Absolute* des Raums annahm (siehe weiter unten Kap. 21).

Zwei *Ebenen* E_{n-1} mit den Gleichungen (in nicht homogenen Coordinaten)

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + \alpha = 0,$$
$$b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + \beta = 0$$

heissen *parallel*, wenn

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{ist.}$$

Es seien zwei lineare Mannigfaltigkeiten R_{n-k}, $R_{n-k'}$ gegeben, von denen die erste von der Dimension $n-k$ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_k = a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n + \alpha_k = 0 \end{array}\right\} R_{n-k}$$

definirt wird und die zweite von der Dimension $n-k'$ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n + \beta_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{k'} = b_{k'1}x_1 + \cdots + b_{k'n}x_n + \beta_{k'} = 0 \end{array}\right\} R_{n-k'}.$$

Von den im R_{n-k} enthaltenen E_{n-1} seien ϱ von einander unabhängig*) und ebensovielen im $R_{n-k'}$ enthaltenen E_{n-1} parallel; wir sagen dann, die beiden linearen Mannigfaltigkeiten R_{n-k}, $R_{n-k'}$ haben *einen Parallelismus* ϱ^{ter} *Ordnung*.

*) d. h. so beschaffen, dass keine identische lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen den linken Seiten ihrer Gleichungen besteht.

Wenn $k \leqq k'$ und $\varrho = k$ ist, wird die erste Mannigfaltigkeit der zweiten *parallel* genannt.

Die beiden Mannigfaltigkeiten haben einen Parallelismus ϱ^{ter} Ordnung, wenn die n Gleichungen

$$\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_k a_{k1} = \mu_1 b_{11} + \cdots + \mu_{k'} b_{k'1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_k a_{kn} = \mu_1 b_{1n} + \cdots + \mu_{k'} b_{k'n}$$

sich auf nur $k + k' - \varrho$ von einander verschiedene Gleichungen reduciren lassen, d. h. wenn die Matrix der Coefficienten dieser Gleichungen den Rang $k + k' - \varrho$ hat.

Der *Abstand* zweier Punkte (x), (y) ist durch

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \quad \text{gegeben.}$$

Der *Abstand eines Punkts von einer linearen Mannigfaltigkeit* ist der Abstand des gegebenen Punkts von dem Punkt der Mannigfaltigkeit, der ihm *am nächsten* liegt; der letztere heisst *die orthogonale Projection* des gegebenen Punkts.

Der *Abstand zweier linearer Mannigfaltigkeiten* ist der Abstand derjenigen beiden Punkte der einen und der anderen, die sich am nächsten liegen.

Eine lineare Mannigfaltigkeit $R_{n-k'}$ heisst *senkrecht* auf einer anderen R_{n-k}, wenn, nachdem durch einen Punkt des Raums zwei Mannigfaltigkeiten $R'_{n-k'}$, R'_{n-k} parallel zu $R_{n-k'}$ bez. zu R_{n-k} gelegt wurden, jeder Punkt von $R'_{n-k'}$ sich auf R'_{n-k} in einen Punkt projicirt, der dem gemeinschaftlichen Schnitt der beiden Mannigfaltigkeiten R' angehört.

Wenn $R_{n-k'}$ senkrecht auf R_{n-k} steht, so ist umgekehrt auch R_{n-k} lothrecht zu $R_{n-k'}$.

Sind zwei *Gerade* mit den Gleichungen

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n},$$
$$\frac{x_1 - b_1}{\beta_1} = \frac{x_2 - b_2}{\beta_2} = \cdots = \frac{x_n - b_n}{\beta_n}$$

gegeben, *so bleibt der Ausdruck*

$$\cos^2 \theta = \frac{\Sigma(\alpha_r \beta_r)}{\Sigma\alpha_r^2 \, \Sigma\beta_r^2}$$

seinem Werth nach unverändert (ist eine Invariante) für jede beliebige lineare orthogonale Transformation der Coordinaten, *d. h. für eine lineare Transformation, die auf die Variabeln x ausgeübt wird und deren Determinante orthogonal ist.* *Repert.*, 1, S. 48.

Der Winkel θ heisst der *Winkel* der beiden Geraden.

Sind zwei beliebige lineare Mannigfaltigkeiten gegeben, so kann man mittelst der vorstehenden Formel die Winkel berechnen, welche die Geraden der einen mit den Geraden der anderen bilden. Der *kleinste* aller so erhaltenen Winkel heisst der *Winkel der beiden Mannigfaltigkeiten.*

Die beiden Mannigfaltigkeiten stehen senkrecht aufeinander, wenn dieser Winkel ein rechter ist; alsdann ist jede Gerade der einen stets lothrecht zu jeder Geraden der anderen.

Einen Raum R_r mit einem $R_{r'}$ *schneiden,* heisst den beiden gemeinsamen Raum $R_m = R_{r+r'-n}$ construiren; den Raum R_r von einem Raum $R_{r'}$ aus *projiciren*, heisst den Raum $R_{r+r'+1}$ construiren, der sie beide enthält.

Sind in zwei Räumen R_n, R'_n zwei Gruppen von $n+2$ Punkten gegeben, so kann man stets durch Projectionen und Schnitte von der ersten Gruppe zur zweiten übergehen.

Zwei Räume von n Dimensionen R_n, R'_n heissen *projectiv* oder *homographisch* oder *collinear*, wenn zwischen den in dem einen enthaltenen linearen Räumen und den in dem anderen enthaltenen eine stetige ein-eindeutige Correspondenz derart besteht, dass zweien sich angehörenden Räumen in dem einen zwei ebenfalls sich angehörende Räume des anderen entsprechen, und wenn ferner jeder Punktreihe des einen eine projective Punktreihe in dem anderen zugeordnet ist.

Zwei homographische und superponirte Räume R_n, R'_n können keine $n+2$ Punkte gemeinschaftlich haben, ohne zusammenzufallen, es sei denn, $n+1$ beliebig aus diesen herausgegriffene Punkte liegen in derselben E_{n-1}.

Auf ähnliche Art werden die *Correlation* oder *Dualität* oder *Reciprocität* zwischen zwei Räumen definirt.

Eine Homographie zwischen zwei Räumen wird analytisch, wie gewöhnlich, so dargestellt, dass man lineare Relationen zwischen den Coordinaten der sich in den beiden Räumen entsprechenden Punkte festsetzt; die Homographie ist *allgemein,* wenn die Determinante der Coefficienten dieser linearen Relationen von Null verschieden ist; man kann sich aber denken, diese Determinante sei Null, und habe den *Rang* (die *Charakteristik*)

$n - h + 1$, siehe *Repert.*, 1, p. 89; man erhält dann die sogenannten *singulären Homographien von der Species h.* In diesem Fall *existirt in einem der beiden Räume ein linearer Raum R'_{h-1} von der Dimension $h - 1$ (ein singulärer Raum), der so beschaffen ist, dass jedem seiner Punkte alle Punkte des anderen Raums entsprechen;* und umgekehrt: *in dem zweiten Raum gibt es einen Raum R_{n-h} von der Dimension $n - h$ (singulären Raum), dessen Punkten in dem ersten Raum alle Punkte eines Raums R'_h entsprechen, der den singulären Raum R'_{h-1} enthält.*

Mit dem Studium der Theorie der Homographie der mehrdimensionalen Räume hat Veronese in der weiter unten citirten Arbeit den Anfang gemacht; es wurde dann weiter verfolgt von: Segre, *Mem. Acc. Lincei*, 1884—1886; *Mem. Acc. Torino*, 1885; Bertini, *Rend. Ist. Lomb.*, 1886—87; *Atti Acc. Torino*, 1887; Predella, *Ann. di mat.*, (2), 17; *Atti Acc. Torino*, 1891—92; etc. Siehe die Darstellung in Muth's *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, Leipzig 1900, § 17, *Classificationen der Collineationen in einem Raum beliebig hoher Dimension.*

Es waren Cayley, *Cambr. math. Journ.*, 4, 1845; *Crelle*, 1846; *Werke*, 1, p. 55, 317 und Cauchy, *Compt. Rend.*, 1847, die zuerst die Ausdrücke der *Geometrie von n Dimensionen* anwendeten, während die erste Definition der Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen wohl Grassmann in seiner *Ausdehnungslehre*, Leipzig 1844, Berlin 1862 zu verdanken ist.

Die erste gründliche Erörterung der Principien der Geometrie in einem beliebigen Raum ist von Riemann, *Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, 1854, veröffentlicht 1867, von dem auch der erste Begriff der *Krümmung* eines höheren Raums herrührt. Siehe weiter unten Kap. 20.

Die Arbeiten und Untersuchungen über die Geometrie von n Dimensionen lassen sich bei dem heutigen Stand der Wissenschaft in drei Kategorien eintheilen.

Zu der ersten kann man alle diejenigen zählen, welche die Grundprincipien der Geometrie in *absolutem* Sinn betreffen, d. h. unabhängig von *gewissen* Fundamentalhypothesen über die Natur des Raums, z. B. von der Hypothese über die *Linearität.*

Von den Studien, welche diese Richtung verfolgen, zu denen sich dann auch die Untersuchungen von Lobatschefskij und Bolyai über die Grundlagen der *nicht-Euklidischen Geo-*

metrie gesellen (siehe Kap. 21), sind die wichtigsten von Riemann, l. c.; Cayley, *Phil. Trans.*, 93, 1859; *Werke*, 2; Beltrami, siehe Kap. 20 und 21; Helmholtz, *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Gött. Nachr.*, 1868; Klein, *Math. Ann.*, 4, 6; De Tilly, *Essai sur les principes fondam. de la Géom.*, Bordeaux 1879; Georg Cantor, *Crelle*, 84, oder auch *Acta math.*, 2; Lie, *Leipz. Ber.*, 1886, 1890; Lüroth, *Sitzungsber. der phys.-med. Societät zu Erlangen*, 1878, 1899, *Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen;* etc.

Systematische Behandlung erfährt derselbe Gegenstand in den Büchern von Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882; Veronese, *Fondamenti di Geometria*, etc., Padova 1891, deutsch von Schepp unter dem Titel: *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*, Leipzig 1894; Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Paderborn 1893; Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899. Am Schluss des umfangreichen Veronese'schen Werks sind viele historisch-kritische Angaben zusammengestellt.

Zu der zweiten Kategorie gehören die Arbeiten über die Ausdehnung der Begriffe, Formeln und Sätze der gewöhnlichen Infinitesimalgeometrie auf die Räume von mehreren Dimensionen (siehe Kap. 20); zu der dritten schliesslich die Forschungen, welche die Begriffe und Probleme der projectiven und metrischen Geometrie der Ebene und des gewöhnlichen Raums auf beliebig hohe Mannigfaltigkeiten auszudehnen suchen.

Die bereits citirten Schriften von Jordan und D'Ovidio sind der letzteren Richtung zuzuzählen, zu welcher auch die grundlegende Arbeit von Veronese in den *Math. Ann.*, 19 zu rechnen ist.

Auf dieser Arbeit fussend, begann man die projective Geometrie der mehrdimensionalen Räume zu begründen, d. h. die Theorie der allgemeinen Homographien, die Lehre von den in einem R_n enthaltenen Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung und speciell auch die Theorie der in einem R_n enthaltenen quadratischen Gebilde, Curven, Regelflächen, etc.

Es ist natürlich, dass man auch die birationalen Correspondenzen der Ebenen und der gewöhnlichen Räume auf die mehrdimensionalen Räume zu erweitern suchte. Siehe Kap. 6, § 5; Kap. 9, § 6. Arbeiten darüber sind von Noether, *Math. Ann.*, 2; S. Kantor, *Rend. Ist. Lomb.*, 1894; Brill, *Quart.*

Journ., 27, 1895 und für den Raum von 4 Dimensionen von Del Pezzo, *Rend. Acc. Napoli*, 1896—97.

Die darstellende Geometrie in dem Raum von 4 Dimensionen wurde von Veronese, *Atti Ist. Veneto*, 1882 behandelt.

Betrachtet man ferner als Element des Raums von 4 oder mehr Dimensionen nicht, wie bisher, den Punkt, sondern die Gerade, so lässt sich eine *Liniengeometrie* aufstellen; Untersuchungen dieser Art sind von Segre, *Rend. Palermo*, 2 und Castelnuovo, *Atti Ist. Veneto*, 1891.

Wir wollen schliesslich noch bemerken, dass die *Kinematik* in den höheren Räumen von Jordan, l. c., dann auch von Clifford, *Proc. Lond. math. Soc.*, 1876; Beltrami, *Bull. Scienc. math.*, 1876 und von Anderen untersucht wurde; ein Verzeichniss zahlreicher hierher gehöriger Arbeiten findet man bei Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geom.*. 2. ed., Torino 1896. p. 308, 309, deutsche Ausg. von Schütte, *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie*, Leipzig 1888, p. 118

§ 2. Nicht lineare Mannigfaltigkeiten. Flächengebilde im R_n. Monoidale Darstellung.

Die Gesammtheit der Punkte des R_n, deren Coordinaten einer rationalen homogenen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten von der Ordnung ν in den Variabeln genügen, heisst *ein algebraisches Flächengebilde (Hyperfläche) ν^{ter} Ordnung im R_n.*

Die Zahl ν gibt die Anzahl der Punkte an, in denen eine Gerade das Flächengebilde (die Hyperfläche) schneidet.

Eine Hyperfläche ν^{ter} Ordnung ist durch

$$N(\nu) = \binom{n+\nu}{\nu} - 1$$

willkürliche Punkte bestimmt.

Durch einen Punkt P einer Hyperfläche kann man Gerade ziehen, welche in diesem Punkt mit der Hyperfläche *zwei* Schnitte gemeinsam *(eine zweipunktige Berührung)* haben; *der Ort aller dieser Geraden ist eine E_{n-1}*, die *Hyperberührungsebene* an die Hyperfläche in P heisst.

Man nennt *Classe der Hyperfläche* die Anzahl ihrer Hyperberührungsebenen, die durch einen linearen Erzeugungsraum R_{n-2} des Raums R_n gehen; *die Classe einer Hyperfläche ν^{ter} Ordnung ist im Allgemeinen gleich $\nu(\nu-1)^{n-1}$, wenn die Hyperfläche keine Singularitäten besitzt, d. h. durch eine allgemeine Gleichung dargestellt wird.*

Singulär r^{ter} *Ordnung* werden die Punkte einer Hyperfläche genannt, welche so beschaffen sind, dass jede durch sie gehende Gerade die Fläche daselbst in r zusammenfallenden Punkten trifft.

Jeder singuläre Punkt r^{ter} *Ordnung vermindert die Classe der Hyperfläche um* $r(r-1)^{n-1}$ *Einheiten.*

Eine Hyperfläche ν^{ter} *Ordnung mit einem* ν*-fachen Punkt besteht aus unendlich vielen durch diesen Punkt gehenden Geraden (einem Kegel).*

Algebraische Mannigfaltigkeit k^{ter} *Dimension und* ν^{ter} *Ordnung* wird ein im R_n enthaltener Raum k^{ter} Dimension genannt, der so beschaffen ist, dass jeder lineare R_{n-k} des R_n ihn im Allgemeinen in ν verschiedenen Punkten schneidet.

Die Mannigfaltigkeiten von *zwei* Dimensionen pflegt man *Flächen*, die *einer* Dimension *Curven* zu nennen.

Eine algebraische Mannigfaltigkeit heisst *normal für den eigenen Raum,* wenn sie sich nicht als Projection einer in einem Raum höherer Dimension liegenden Mannigfaltigkeit *derselben* Ordnung ansehen lässt.

Jede algebraische Mannigfaltigkeit k^{ter} *Dimension und* ν^{ter} *Ordnung ist immer in einem linearen Raum* $R_{k+\nu-1}$ *enthalten, kann aber auch in einem linearen Raum von weniger Dimensionen liegen.*

Speciell:

Jede Mannigfaltigkeit 2^{ter} *Ordnung von* k *Dimensionen ist immer in einem linearen Raum* R_{k+1} *enthalten.*

Jede Curve ν^{ter} *Ordnung ist immer in einem linearen Raum enthalten, der höchstens* ν *Dimensionen hat.*

Aus diesem Theorem folgt, dass eine Curve 2^{ter} Ordnung stets *höchstens* eben, eine Curve 3^{ter} Ordnung *höchstens* eine doppelt gekrümmte cubische Curve sein kann, etc.

Ist eine Mannigfaltigkeit k^{ter} *Dimension gegeben, so bildet die Gesammtheit aller sie in einem Punkt berührenden Geraden* (siehe oben) *eine lineare Mannigfaltigkeit von derselben Dimension* k. Ueber die linearen Räume, die eine Mannigfaltigkeit berühren, siehe Del Pezzo, *Rend. Acc. Napoli,* 1886.

Zwei algebraische Mannigfaltigkeiten, von denen die eine die Ordnung ν *und die Dimension* k, *die andere die Ordnung* ν' *und Dimension* k' *hat, schneiden sich in einer Mannigfaltig-*

keit von der Ordnung $\nu\nu'$ und Dimension $k + k' - n$, vorausgesetzt, dass $k + k' \geq n$ ist und die beiden Mannigfaltigkeiten keine Mannigfaltigkeit von einer Ordnung gemeinschaftlich haben, die grösser oder gleich $k + k' - n + 1$ ist.

Wenn $k + k' < n$ ist, so haben sie im Allgemeinen keinen Punkt, für $k + k' = n$ dagegen $\nu\nu'$ Punkte gemeinsam. Halphen, *Bull. Soc. math.*, 2; Noether, *Math. Ann.*, **11**.

Wie bei den gewundenen Curven des gewöhnlichen Raums, so bietet sich selbstverständlich auch hier das Problem der analytischen Darstellung derjenigen Mannigfaltigkeiten im Raum R_n dar, die *nicht immer vollständige* Schnitte von Hyperflächen sind.

Halphen l. c. erweiterte zu diesem Zweck die von Cayley für gewundene Curven vorgeschlagene *monoidale Darstellung.* Vergl. Kap. 9, § 2, S. 215.

Ein *Monoid* ist eine Hyperfläche ν^{ter} Ordnung mit einem $(\nu - 1)$fachen Punkt. *Jede durch den vielfachen Punkt gehende Gerade schneidet sie in einem einzigen anderen Punkt;* daher kommt der Name *Monoid.*

Jede Mannigfaltigkeit k^{ter} Dimension kann analytisch durch eine homogene Relation zwischen nur $k + 2$ (homogenen) Coordinaten

$$x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}$$

dargestellt werden und durch $n - k - 1$ Monoide; die erstere Relation ist die Gleichung einer conischen Hyperfläche.

Eine andere Methode zur analytischen Darstellung der Mannigfaltigkeiten wird durch das folgende Theorem Kronecker's vermittelt, welches wir schon bei der Besprechung der Curven doppelter Krümmung im gewöhnlichen Raum erwähnt haben. Vergl. S. 214.

Jede Mannigfaltigkeit k^{ter} Dimension des Raums R_n kann immer als vollständiger Schnitt von höchstens $n + 1$ Hyperflächen angesehen werden.

§ 3. Die quadratischen Gebilde im R_n. Angaben über die cubischen Gebilde im R_4.

Ein quadratisches Gebilde des R_n ist eine Hyperfläche 2^{ter} Ordnung; sie wird mithin durch eine Gleichung 2^{ten} Grads in den Coordinaten dargestellt.

Durch $\frac{n(n+3)}{2}$ *Punkte des* R_n *geht im Allgemeinen ein einziges quadratisches Gebilde.*

Das quadratische Gebilde ist auch 2^{ter} *Classe.*

Gibt man der Gleichung dieser Fläche die Form

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = 0, \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

so ist die *Discriminante* der Gleichung

$$A = |a_{ij}|.$$

Wenn diese Discriminante von Null verschieden ist, so ergibt sich das allgemeine quadratische Gebilde, im anderen Fall erhält man die *quadratischen Kegel* oder *specielle quadratische Gebilde.* Es gibt verschiedene Arten der letzteren, je nach dem *Rang* der Determinante A; wenn ins Besondere der *Rang* von A der $(n-h+1)^{\text{te}}$ ist, so sagt man, der *quadratische Kegel sei von der* h^{ten} *Species.*

Ein quadratischer Kegel h^{ter} *Species enthält unendlich viele Doppelpunkte, die einen linearen Raum* R_{h-1} *bilden; für* $h = 1$ *erhält man nur einen Doppelpunkt.*

Die allgemeinen quadratischen Gebilde im R_n *haben keine absoluten Invarianten; sie haben nur eine Invariante (die Discriminante); sie sind daher, vom Standpunkt der projectiven Geometrie aus betrachtet, sämmtlich äquivalent.*

In einem allgemeinen quadratischen Gebilde gibt es lineare Räume von der Dimension $\frac{n-2}{2}$ *oder* $\frac{n-1}{2}$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist.*

Wenn das quadratische Gebilde h^{ter} *Species ist, so werden diese Zahlen* $\frac{n+h-2}{2}$ *bez.* $\frac{n+h-1}{2}$, *je nachdem* $n+h$ *gerade oder ungerade ist.*

Wenn n *eine ungerade Zahl ist, so existiren* *zwei* *verschiedene in dem quadratischen Gebilde enthaltene Systeme von* $R_{\frac{n-1}{2}}$. *Je nachdem* $\frac{n-1}{2}$ *gerade oder ungerade ist, hat man den fundamentalen Unterschied zu machen, dass sich (im ersten Fall) zwei* $R_{\frac{n-1}{2}}$ *nur dann schneiden, wenn sie demselben System angehören, oder (im zweiten Fall) nur dann, wenn sie zu verschiedenen Systemen gehören.* Segre.

Allgemeiner:

Betrachtet man einen (nicht linearen) Raum von der Dimension $\frac{n-1}{2}$, *der in dem quadratischen Gebilde enthalten ist, und die linearen Räume* $R_{\frac{n-1}{2}}$ *des 1ten Systems in k Punkten, die linearen Räume* $R_{\frac{n-1}{2}}$ *des 2ten Systems aber in k' Punkten trifft, und dann einen anderen analogen Raum, dem auf ähnliche Art die Zahlen* k_1, k_1' *entsprechen, so ist die Anzahl der Punkte, in denen sich die beiden Räume schneiden,*

$$kk_1' + k_1k', \quad \textit{wenn } \frac{n-1}{2} \textit{ ungerade,}$$

und

$$kk_1 + k'k_1', \quad \textit{wenn } \frac{n-1}{2} \textit{ gerade ist.}$$

Dieses Theorem von Segre ist die Erweiterung eines Chasles'schen Satzes über algebraische Curven, die auf den quadratischen Flächen des gewöhnlichen Raums liegen. Vergl. S. 245.

Mit den quadratischen Gebilden des R_n beschäftigte sich zuerst Veronese im 3. Kap. seines Aufsatzes in den *Math. Ann.*, 19; später widmete ihnen Segre eine umfangreiche Arbeit, *Mem. Acc. Torino,* 1884, der auch Büschel von quadratischen Gebilden und die Fläche 4ter Ordnung, welche die *Basis* des Büschels ist, studirte und die letztere auf Grund der Theorie der Weierstrass'schen *Elementartheiler* classificirte. Vergl. oben S. 395 und *Repert.*, 1, S. 328 u. ff. Hierher gehören auch ein allgemeines von F. Klein angegebenes Theorem über Scharen reeller quadratischer Formen (*Dissertation, Math. Ann.*, 23) und Untersuchungen von A. Loewy, *Crelle,* 122.

Das Studium und die Classification dieser Fläche 4ter Ordnung steht in naher Beziehung zu den Untersuchungen über die *Fläche 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, welche die Projection der ersteren Fläche auf den Raum* R_3 *ist.* Siehe darüber die Ausführungen auf S. 321.

Mit den Büscheln quadratischer Gebilde im R_n beschäftigte sich auch Bertini, *Rend. Lincei,* 1886 und mit den Büscheln specieller quadratischer Gebilde (Kegel) Segre, *Atti Acc. Torino,* 1884; andere Arbeiten über die quadratischen Gebilde sind von Del Pezzo, *Rend. Acc. Napoli,* 1885, 1895 und über ihre Differentialgleichung von Berzolari, *Rend. Acc. Lincei,* 1896.

Ueber die projective Erzeugung der quadratischen Gebilde als Ausdehnung der gewöhnlichen Erzeugungsweise (vergl. S. 100) findet man Näheres in den citirten Arbeiten von Veronese und Segre.

Die bemerkenswerthesten Fälle der Gebilde 3ter Ordnung des Raums von 4 Dimensionen (speciell die Gebilde, welche Ebenen enthalten und die mit 6, 7, 8, 9, 10 Doppelpunkten) wurden von Segre, *Mem. Acc. Torino,* 39; *Atti Acc. Torino,* 1887 und von Castelnuovo, *Atti Ist. Veneto,* 1887 studirt.

Mit gewissen Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, die aus Reihen von Ebenen zusammengesetzt sind, befasste sich Segre, *Atti Acc. Torino,* 21, 1886.

§ 4. Die Flächen d. h. Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen des Raums R_n. Die Regelflächen. Die Veronese'sche Fläche V_2^4 im Raum R_5.

Von den im R_n enthaltenen Mannigfaltigkeiten von k Dimensionen wurden eingehender die Flächen ($k=2$) und unter diesen die auf die Ebene abbildbaren Flächen und die *Regelflächen* von Veronese l. c.; Segre, *Atti Acc. Torino*, 1884, 1886; *Rend. Acc. Lincei,* 1887; *Math. Ann.,* 30, 34; Del Pezzo, *Rend. Acc. Napoli,* 1885—86—87; *Rend. Palermo,* 1, 1887 studirt.

Viele der Betrachtungen, die über die Flächen des gewöhnlichen Raums angestellt werden, lassen sich leicht auf die Flächen der Räume höherer Dimension ausdehnen; so z. B. die *ebene Abbildung,* die Untersuchungen über das *Geschlecht* der Fläche etc. Ueber diese letzteren siehe die auf S. 223 citirten Arbeiten. Man beachte, dass in dem dort erwähnten Aufsatz von Segre die Betrachtungen über einen dem Geschlecht analogen invarianten *Charakter* auch auf beliebige Mannigfaltigkeiten ausgedehnt werden.

Eine Punkt für Punkt auf die Ebene abbildbare Fläche ist ein *Homaloid* (oder *Fläche vom Geschlecht Null*, oder *rationale* oder *unicursale Fläche*).

Schneidet man eine zum R_n gehörige Regelfläche mit linearen Räumen R_{n-1}, so erhält man natürlich Curven von demselben *Geschlecht**); dieses Geschlecht wird als *Geschlecht der Regelfläche* angesehen. Siehe S. 223.

Alle zu einem R_n (und zu keinem geringeren linearen Raum) gehörigen Flächen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind entweder Regelflächen oder Kegel mit Ausnahme der sogenannten Verones.eschen Fläche 4^{ter} Ordnung (für $n = 5$), von der weiter unten die Rede sein wird. Del Pezzo.

Die im R_n enthaltenen Flächen n^{ter} Ordnung sind für $n > 9$ sämmtlich Regelflächen.

Die im R_n enthaltenen Flächen ν^{ter} Ordnung sind, wenn ν unter gewisse Grenzen herabsinkt, sämmtlich Regelflächen. Diese Grenzen wurden von Del Pezzo, *Rend. Acc. Napoli*, 5. Febr. 1887 berechnet, ergeben sich aber nicht sehr einfach.

Jede zum R_n gehörige Regelfläche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist rational.

Eine von *allen* Erzeugenden einer Regelfläche geschnittene Curve heisst *Directrix (Leitlinie).*

Jede Regelfläche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des R_n lässt eine einzige Directrix kleinster Ordnung zu, es wäre denn n ungerade und die kleinste Ordnung gerade $\frac{n-1}{2}$, in welchem Fall es ∞^1 Leitlinien geringster Ordnung gibt.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit zwei Regelflächen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des R_n projectiv identisch seien, besteht darin, dass sie Leitlinien von derselben geringsten Ordnung haben müssen.

Daraus ergibt sich eine Classification der Regelflächen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des R_n nach der Ordnung der Leitlinie geringster Ordnung, *da diese Ordnung von* 1 *bis* $\frac{n}{2}$ *bez.* $\frac{n-1}{2}$ *variiren kann.* Segre.

Auf einer Regelfläche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des R_n schneiden sich zwei Leitlinien von den Ordnungen $n-k$, $n-k'$ in

$$n-k-k'-3$$

Punkten.

Die rationalen Regelflächen eines beliebigen Raums, welche vom Geschlecht $p = 0$ und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, kann man sämmtlich als Projectionen von dem R_n angehörigen Regelflächen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung auffassen.

Die elliptischen Regelflächen eines beliebigen Raums, welche

---

*) Ueber das Geschlecht der Curven siehe § 5.

das Geschlecht $p=1$ *und die Ordnung* $(n+1)$ *haben und keine Kegel sind, müssen stets Projectionen von Regelflächen* $(n+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung des* R_n *sein.*

Alle Regelflächen (die keine Kegel sind) vom Geschlecht 2 *und der Ordnung* $n+3$ *sind Projectionen von Regelflächen derselben Ordnung, die zum* R_n *gehören.*

Allgemeiner:

Alle Regelflächen von der Ordnung ν *und dem Geschlecht* p, *die einem Raum angehören, der von geringerer Dimension, als* $R_{\nu-2p+1}$, *ist, sind Projectionen von demselben Raum angehörigen Regelflächen derselben Ordnung.* Segre.

Jede Regelfläche von der Ordnung ν *und dem Geschlecht* p *enthält Leitlinien von einer Ordnung* $\leqq \frac{\nu+p}{2}$; daraus ergibt sich, wie für die rationalen Regelflächen (siehe oben), ein Kriterium zur Classification der Regelflächen nach den *Leitlinien geringster Ordnung.*

Eine Formel von Sturm-Segre über die Ordnung und das Geschlecht einer Curve auf einer Regelfläche wurde auf S. 230 angegeben.

Eine Regelfläche vom Geschlecht $p>0$ *und der Ordnung* $\nu \geqq 4p$ *) *ist, wenn sie kein Kegel ist, höchstens in einem* $R_{\nu-p}$ *enthalten.*

Wenn sie im $R_{\nu-p}$ *enthalten und* $p>1$ *ist, so hat sie eine doppelte Directrix; ist sie im* $R_{\nu-p-1}$ *enthalten und ist* $p>2$, *so besitzt sie einen doppelten Kegelschnitt oder eine doppelte oder dreifache gerade Directrix oder schliesslich (für* $p=3$*) eine einfache ebene Curve* 4^{ter} *Ordnung.* Segre.

Wir gehen nun zu der Veronese'schen Fläche über, auf die wir schon hingewiesen haben.

Die Veronese'sche Fläche, die wir mit V_2^4 bezeichnen wollen, ist 4^{ter} Ordnung und in dem Raum von 5 Dimensionen enthalten; *sie ist Punkt für Punkt auf eine Ebene abbildbar (also ein Homaloid,* vergl. S. 589) und ist eine *Normal*fläche für R_5. Siehe S. 585.

Sie wird dadurch erzeugt, dass man den Kegelschnitten

---

*) Diese Beschränkung dient nur dazu, die Resultate zu vereinfachen. Siehe die Arbeiten von Segre, besonders auch in den *Math. Ann.*, die vollständiger, als die übrigen, sind.

einer Ebene homographisch die E_4 des R_5 zuordnet; allen durch einen Punkt gehenden Kegelschnitten entsprechen ∞^4 sich in einem Punkt schneidende E_4 des R_5; *der Ort dieser Punkte ist die gesuchte Fläche.*

Die Fläche enthält ein doppelt unendliches System von Kegelschnitten K; durch zwei ihrer Punkte geht nur ein Kegelschnitt und durch einen Punkt von ihr ∞^1 Kegelschnitte.

Zwei Kegelschnitte K treffen sich in einem Punkt und liegen in einem Raum R_4, der in diesem Punkt die Fläche berührt.

Die Berührungsebenen bilden eine Hyperfläche 3ter Classe.

Die Ebenen der Kegelschnitte K heissen *Schnittebenen 1ter Art.*

Zwei Schnittebenen 1ter Art schneiden sich niemals in einer Geraden, sondern immer in einem einzigen Punkt. Sie bilden eine Hyperfläche 3ter Ordnung.

Eine Ebene des R_5 hat im Allgemeinen keinen Punkt mit der Fläche gemeinsam (sie ist keine Secante); sie kann aber *einen, zwei* oder *drei* Punkte mit ihr gemeinsam haben; sind es drei und ist sie nicht von der 1ten Art, so heisst sie *Schnittebene 2ter Art.*

Unter den unendlich vielen linearen Mannigfaltigkeiten E_4, die durch die Ebene gehen, welche die Fläche in einem Punkt berührt, gibt es eine einzige, die Fläche in zwei zusammenfallenden Kegelschnitten schneidende E_4; diese E_4 heisst *doppelt berührende Hyperebene.*

Die ∞^2 doppelt berührenden Hyperebenen hüllen die zur gegebenen reciproke Fläche (4ter Classe) ein.

Zwei solche Hyperebenen schneiden sich in einer Berührungsebene; ebenso bestimmen zwei Punkte der Fläche eine Schnittebene 1ter Art.

Zwei Berührungsebenen schneiden sich immer in einem einzigen Punkt.

Von den nicht in einem R_4 enthaltenen Flächen ist die Veronese'sche die einzige, deren Berührungsebenen sich zu je zweien schneiden. Del Pezzo.

Projicirt man die V_2^4 von einer Geraden R_1 aus auf den gewöhnlichen Raum, so ergibt sich eine Steiner'sche Fläche. Siehe Kap. 12, § 9.

Wenn die Gerade R_1 die V_2^4 in einem Punkt schneidet, so ist diese Projection eine Regelfläche 3ter Ordnung; trifft R_1 die V_2^4 dagegen in zwei Punkten, so erhält man eine Fläche 2ten

Grads; berührt schliesslich R_1 die V_2^4, so ergibt sich ein Kegel 2ter Ordnung.

Die Veronese'sche Fläche ist in der allgemeinen Kategorie der homaloidalen Normalflächen der Ordnung n^2 des Raums von $\frac{n(n+3)}{2}$ Dimensionen enthalten; diese Flächen haben die fundamentale Eigenschaft, dass sich durch ihre Projection auf unseren Raum *alle* Flächen des R_3 ableiten lassen, die Punkt für Punkt durch Curven von der Ordnung n oder kleiner als n auf eine Ebene abbildbar sind.

Sie wurde zuerst von Veronese in dem citirten Aufsatz der *Math. Ann.*, 19 erwähnt und dann in einer besonderen Arbeit von demselben Autor eingehend untersucht. *Mem. Acc. Lincei*, 19, 1884.

Mit diesen Untersuchungen stehen die Arbeiten über die Geometrie der *Kegelschnitte der Ebene*, die auf S. 388 citirt wurden, in naher Beziehung.

§ 5. Die Curven in den Räumen R_n.

Wir gehen nun zu den Mannigfaltigkeiten von nur einer Dimension (den *Curven*) über.

Vor allen Dingen — wir wollen uns der Kürze wegen nicht näher darauf einlassen — ist die Erweiterung der Begriffe vorzunehmen: man spricht von der *Osculationsebene* (welche mit der Curve drei unendlich nahe Schnitte gemeinsam hat) in einem Punkt der Curve, von dem *Osculationsraum* R_3 (der die Curve in vier unendlich nahen Schnitten trifft) u. s. w.

Eine Berührungsgerade wird ferner *stationär* oder *Inflexionstangente* genannt, wenn sie mit der Curve *drei* unendlich nahe Schnitte gemeinsam hat; eine Osculationsebene heisst *stationär*, wenn sie die Curve anstatt in drei in *vier* unendlich nahen Punkten trifft, etc.

Zuerst handelt es sich bei diesen Curven um das Problem, die Beziehungen zwischen den charakteristischen Zahlen festzustellen, d. h. die bekannten Formeln von Plücker für die ebenen Curven und von Cayley für die doppelt gekrümmten Curven des gewöhnlichen Raums auf die Curven des R_n auszudehnen. Dieses Problem wurde zuerst von Veronese gelöst, l. c.

Projiciren wir die Curve C^m des R_n von einem Punkt des Raums R_n aus auf einen linearen Raum R_{n-1}, so erhalten wir eine Curve des R_{n-1}, projiciren wir dann diese Curve auf einen linearen Raum R_{n-2}, so ergibt sich eine Curve des R_{n-2} u. s. w. Wir betrachten dann die *developpable,* durch die Tangenten an die Curve C^m erzeugte Hyperfläche und ihren Schnitt S mit einem linearen Raum R_{n-1} und projiciren, wie vorher, diesen Schnitt S nach und nach auf niedrigere lineare Räume. Wir betrachten ferner die durch die Tangenten an S erzeugte Developpable und schneiden diese Developpable durch einen linearen Raum R_{n-2} und fahren so fort, wie vorher; d. h. wir projiciren nach und nach auf niedrigere Räume.

Wie man sieht, erhält man auf diese Art $n-1$ ebene Curven, deren charakteristische Zahlen ebensovielen charakteristischen Zahlen der gegebenen Curve C^m entsprechen; wendet man die Plücker'schen Formeln auf jede von ihnen an, so ergeben sich im Ganzen $3(n-1)$ Relationen zwischen den *charakteristischen Zahlen* der gegebenen Curve.

Wir bezeichnen mit:

m die *Ordnung* von C^m;

k den *ersten Rang* von C^m, d. h. die Anzahl der Tangenten R_1 an C^m, welche einen beliebigen R_{n-2} schneiden;

w den *zweiten Rang* von C^m, d. h. die Anzahl der Osculationsebenen R_2 an C^m, welche einen beliebigen R_{n-3} schneiden;

$w^{(1)}$ den *dritten Rang* von C^m, d. h. die Anzahl der Osculationsräume R_3 an C^m, welche einen beliebigen R_{n-4} schneiden;

. . . .

$w^{(n-4)}$ den $(n-2)^{\text{ten}}$ *Rang* von C^m, d. h. die Anzahl der Räume R_{n-2}, welche C^m osculiren und eine beliebige Gerade treffen;

$w^{(n-3)}$ die *Classe* der Curve;

w_1 die Anzahl der Inflexionstangenten (welche *drei* unendlich nahe Punkte mit der Curve gemeinsam haben);

$w_1^{(1)}$ die Anzahl der stationären Osculationsebenen (die *vier* unendlich nahe Punkte mit der Curve gemeinsam haben);

$w_1^{(2)}$ die Anzahl der stationären Räume R_3;

. . . .

$w_1^{(n-3)}$ die Anzahl der stationären Räume R_{n-2};

$w_1^{(n-2)}$ die Anzahl der stationären Räume R_{n-1};

R die Anzahl der Spitzen von C^m;

D_1 die Anzahl der Doppelpunkte von C^m;

D die Anzahl der Räume R_{n-2}, welche durch $n-2$ willkürliche Punkte gehen und die gewundene Curve zweimal schneiden (der scheinbaren Doppelpunkte);

$D^{(1)}$ die Anzahl derjenigen Paare von nicht consecutiven Tangenten an C^m, welche einen R_{n-1} in zwei Punkten einer Geraden schneiden, die einen beliebigen R_{n-4} trifft;

$D^{(2)}$ die Anzahl derjenigen Paare von nicht consecutiven Osculationsebenen von C^m, welche einen R_{n-2} in zwei Punkten einer Geraden schneiden, die einen willkürlichen R_{n-5} trifft;

. . . .

$D^{(n-2)}$ die Anzahl derjenigen Paare von nicht consecutiven Osculationsräumen R_{n-2} von C^m, welche sich in einem Punkt einer beliebigen gegebenen Ebene schneiden oder auch die Ordnung der Doppelhyperfläche von $(n-2)$ Dimensionen der durch die Osculationsräume R_{n-2} von C^m gebildeten Developpablen;

d die Anzahl der durch $n-2$ willkürliche Punkte gehenden Räume R_{n-1}, welche zwei nicht consecutive Tangenten von C^m enthalten;

$d^{(1)}$ die Anzahl der Paare von nicht consecutiven Osculationsebenen von C^m, welche einen R_{n-1} in zwei Geraden schneiden, die zugleich mit $n-3$ willkürlichen festen Punkten des R_{n-1} in demselben Raum R_{n-2} liegen;

. . . .

$d^{(n-2)}$ die Anzahl von Paaren der nicht consecutiven Osculationsräume R_{n-1} von C^m, welche sich in einer Geraden einer festen Ebene schneiden;

d_1 die Anzahl der Doppeltangenten von C^m;

$d_1^{(1)}$ die Anzahl der Doppelosculationsebenen von C^m;

. . . .

$d_1^{(n-2)}$ die Anzahl der Doppelosculationsräume R_{n-1} von C^m.

Sind diese Bezeichnungen festgesetzt, so erhält man die folgenden Relationen):*

*) Wir haben die von Veronese benutzten Zeichen beibehalten, die von den Symbolen für die doppelt gekrümmten Curven des gewöhnlichen Raums in Kap. 9 abweichen; die einzige Aenderung, die wir vorgenommen, besteht darin, dass wir $w_1^{(n-2)}$ an die Stelle von $w^{(n-2)}$ gesetzt haben.

$$\begin{cases} k = m(m-1) - 2(D + D_1) - 3R, \\ m = k(k-1) - 2(d + d_1) - 3(w + w_1), \\ w + w_1 - R = 2(k - m), \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = k(k-1) - 2(D^{(1)} + d_1) - 3(m + w_1), \\ k = w(w-1) - 2(d^{(1)} + d_1^{(1)}) - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}), \\ m + w_1 - (w^{(1)} + w_1^{(1)}) = 3(k - w), \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^{(1)} = w(w-1) - 2(D^{(2)} + d_1^{(1)}) - 3(k + w_1^{(1)}), \\ w = w^{(1)}(w^{(1)} - 1) - 2(d^{(2)} + d_1^{(2)}) - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}), \\ k + w_1^{(1)} - (w^{(2)} + w_1^{(2)}) = 3(w - w^{(1)}), \end{cases}$$

. . . .

$$\begin{cases} w^{(n-3)} = w^{(n-4)}(w^{(n-4)} - 1) - 2(D^{(n-2)} + d_1^{(n-3)}) - \\ \qquad - 3(w^{(n-5)} + w_1^{(n-3)}), \\ w^{(n-4)} = w^{(n-3)}(w^{(n-3)} - 1) - 2(d^{(n-2)} + d_1^{(n-2)}) - 3 w_1^{(n-2)}, \\ w^{(n-5)} + w_1^{(n-3)} - w_1^{(n-2)} = 3(w^{(n-4)} - w^{(n-3)}). \end{cases}$$

Definirt man das *Geschlecht p der Curve C^m* als das Geschlecht einer beliebigen ebenen Projection von C^m, so ist

$$\begin{aligned} p &= \frac{(m-1)(m-2)}{2} - (D + D_1) - R = \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - (d + d_1) - (w + w_1) = \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - (D^{(1)} + d_1) - (m + w_1) = \\ &= \frac{(w-1)(w-2)}{2} - (d^{(1)} + d_1^{(1)}) - (w^{(1)} + w_1^{(1)}) = \end{aligned}$$

. . . .

Die Curve, welche der vollständige Schnitt von $(n-1)$ Hyperflächen des R_n von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots,$ bez. ν_{n-1} ist, hat bez. die Ordnung $m = \nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \nu_{n-1}$ und den ersten Rang

$$k = \nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \nu_{n-1} \left[\sum \nu_i - n + 1\right];$$

der Ausdruck für D lautet:

$$2D = \nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \nu_{n-1} \left\{\nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \nu_{n-1} - \sum \nu_i + n - 2\right\}.$$

Daraus lassen sich mit Hülfe der Veronese'schen Formeln die Werthe der übrigen charakteristischen Zahlen ableiten.

Speciell gilt:

Der vollständige Schnitt 8^{ter} Ordnung dreier quadratischer Gebilde des Raums von vier Dimensionen hat einen ersten Rang gleich 8; sein 2^{ter} Rang ist 48, die Classe 32, das Geschlecht 5 und es sind 120 stationäre Räume R_3 in ihm vorhanden.

Der Raum höchster Dimension, dem eine Curve von der Ordnung ν und dem Geschlecht p, wenn $\nu > 2p - 2$ ist, angehören kann, ist ein $R_{\nu-p}$. Dieses wichtige Theorem, welches an einen Satz über die Regelflächen in § 4 erinnert, ist von Clifford, *Phil. Trans.*, 1878; mit ihm haben sich auch Veronese, *Math. Ann.*, 19, p. 213 und Segre, ib., 30, p. 207 beschäftigt.

Aus einem Theorem in § 2 geht hervor, dass die *niedrigste Ordnung der dem Raum R_n angehörigen Curven n selbst ist.*

Die Curve von der Ordnung n, welche dem R_n angehört, ist rational (vom Geschlecht Null).

Offenbar ist diese Curve eine *Normalcurve* für den Raum R_n.

Für sie sind der 1^{te} und $(n-2)^{te}$ Rang, der 2^{te} und $(n-3)^{te}$ Rang etc. bez. zu je zweien gleich

$$2(n-1), \quad 3(n-2), \ldots$$

Die Classe der Curve ist die n^{te}; sie hat keine Doppel- oder stationären Elemente.

Durch $n+3$ Punkte des R_n, von denen $n+1$ niemals in einer E_{n-1} liegen, geht eine und nur eine Curve n^{ter} Ordnung des R_n.

Zwei Curven n^{ter} Ordnung des R_n sind immer projectiv identisch.

Mit der Normalcurve n^{ter} Ordnung des R_n können eine Gerade, eine Ebene, ein Raum $R_3, \ldots$ höchstens zwei, drei, vier, ... Punkte gemeinsam haben.

Diese Curve kann als der Ort der Schnitte der sich entsprechenden E_{n-1} von $n-1$ Büscheln von projectiven E_{n-1} angesehen werden.

Durch einen Punkt P des R_n können n osculirende E_{n-1} an die Curve gelegt werden; wenn n ungerade ist, so liegen die n Berührungspunkte dieser Ebenen in einer durch P gehenden Ebene. Siehe das analoge Theorem von Chasles für die doppeltgekrümmte Curve auf S. 250.

Die Curven $(n+1)^{ter}$ Ordnung des R_n sind elliptisch (vom Geschlecht $p=1$) und haben mit Ausnahme von $(n+1)^2$

stationären Räumen R_{n-1} keine Doppel- oder stationären Elemente. Ihre Classe ist die $n(n+1)^{te}$ und ihr bezüglicher Rang:

$$k = 2(n-1) + 2,$$
$$w = 3(n-2) + 6,$$
$$\cdots\cdots$$
$$w^{(n-4)} = n^2 - 1.$$

Auch diese Curve ist normal für den Raum R_n, da sie keine Projection einer Curve $(n+1)^{ter}$ Ordnung des Raums R_{n+1} sein kann, weil die letztere sonst *rational* wäre.

Alle in $R_2, R_3, \ldots, R_{n-1}$ enthaltenen rationalen Curven der Ordnung $m \leqq n$ sind immer Projectionen einer Normalcurve n^{ter} Ordnung des R_n.

Alle in $R_2, R_3, \ldots, R_{n-1}$ enthaltenen elliptischen Curven der Ordnung $m \leqq n+1$ sind immer Projectionen einer Normalcurve $(n+1)^{ter}$ Ordnung des R_n.

Allgemein:

Die dem R_n angehörigen Curven von der Ordnung $n+p$ und dem Geschlecht p bilden, mit ihren Projectionen auf niedrigere Räume zusammengenommen, die Gesammtheit der einem R_r angehörigen Curven dieser Ordnung und dieses Geschlechts, wenn $r \leqq n$ ist; für $n+p > 2p-2$ bilden diese sämmtlichen Curven die Gesammtheit aller Curven dieser Ordnung und dieses Geschlechts; denn in dem letzteren Fall gibt es nach dem obigen Theorem Clifford's ausser den in Räumen R_r $(r \leqq n)$ existirenden Curven dieser Ordnung und dieses Geschlechts *keine anderen.*

Ueber die algebraischen Curven des Raums R_n siehe die in dem vorigen Paragraphen citirten Arbeiten und auch Segre, *Giorn. di Batt.*, 26; *Rend. Palermo*, 2.

Man kann die Betrachtungen über die vielfachen Secanten am Ende des § 4, Kap. IX, S. 230 auch auf die Räume ausdehnen, die eine algebraische Curve von R_n mehrfach schneiden. Siehe darüber eine neuere Arbeit von Tanturri, *Ann. di mat.*, (3), 4, 1900.

Kapitel XX.

Die Infinitesimalgeometrie und die natürliche Geometrie in den linearen Räumen R_n und den Räumen R_n von constanter Krümmung.

§ 1. Die Curven in den linearen Räumen R_n.

Wir wollen uns die Coordinaten x eines Punkts der Curve als Functionen eines Parameters t gegeben denken.

Durch $k+1$ Punkte der Curve kann man einen linearen Raum von k Dimensionen legen; wir lassen die $k+1$ Punkte, wie gewöhnlich, sich bei der Annäherung an einen Punkt P einander unbegrenzt nahe kommen; die Grenzlage dieses linearen Raums heisst der die Curve in P *osculirende lineare Raum von k Dimensionen. Die Zahl k kann von* 1 *bis* $n-1$ *variiren.*

Der Abstand eines dem Punkt P benachbarten Punkts der Curve von dem in P osculirenden linearen Raum von k Dimensionen ist ein Unendlichkleines $(k+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Die Gleichungen des die Curve osculirenden linearen Raums von k Dimensionen erhält man, wenn die Minoren der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} X_1 - x_1, & X_2 - x_2, & \ldots, & X_n - x_n \\ x_1', & x_2', & \ldots, & x_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(k)}, & x_2^{(k)}, & \ldots, & x_n^{(k)} \end{matrix} \right\|$$

gleich Null gesetzt werden; dabei bezeichnen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *die Coordinaten von P und* $x_1', x_1'', \ldots; x_2', x_2'', \ldots$ *die Derivirten dieser Coordinaten nach der unabhängigen Variabeln t.*

Wir wollen unter θ_k den Winkel verstehen, den die beiden in zwei benachbarten Punkten der Curve osculirenden linearen Räume von k Dimensionen miteinander bilden und unter s den von den beiden Punkten begrenzten Bogen; die Grenze des Verhältnisses $\frac{\theta_k}{s}$ heisst, wenn s der Null zustrebt, *die k^{te} **Krümmung** der Curve in diesem Punkt* und der reciproke Werth dieser Krümmung, wie auch sonst, *der k^{te} **Krümmungsradius**. Es gibt $n - 1$ Krümmungsradien.*

Stellt M_k, $(0 \leqq k \leqq n)$ die Summe der Quadrate der Minoren k^{ter} Ordnung dar, die in der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_1', \ldots, x_n' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)} \end{matrix} \right\|$$

enthalten sind und wird $M_0 = 1$ gesetzt und der k^{te} Krümmungsradius R_k genannt, *so erhält man die allgemeine Formel:*

$$\frac{1}{R_k^2} = \frac{M_{k+1} \cdot M_{k-1}}{M_1 M_k},$$

wobei offenbar

$$M_1 = x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2 \quad \textit{ist.}$$

Es gilt auch die Formel

$$\frac{1}{R_k^2 R_{k-1}^4 \ldots R_1^{2k}} = \frac{M_{k+1}}{M_1^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}}.$$

Wenn M_n für alle Punkte der Curve verschwindet, so liegt diese in einem linearen Raum geringerer Dimension; ist M_{k+1} für alle Punkte der Curve Null, dagegen M_k nicht, so liegt die Curve in einem linearen Raum von k Dimensionen, aber in keinem von niederer Dimension.

Die Punkte der Curve, in denen $M_n = 0$ ist, sind die sogenannten *stationären Punkte der Curve.*

Es sei P ein Punkt der Curve. Wir wollen das folgende System von n Geraden betrachten, die zu je zweien senkrecht aufeinander stehen: vorerst die Tangente an die Curve, dann das Loth auf die Tangente, welches in dem Osculationsraum von 2 Dimensionen liegt, dann das Loth auf den letzteren Raum, welches in dem Osculationsraum von 3 Dimensionen liegt, u. s. w.

Nennt man nun

$$\begin{matrix} \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}, \\ \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn} \end{matrix}$$

bez. die Richtungswinkel, welche die n Geraden mit den n primitiven Coordinatenaxen bilden, *so ergeben sich die folgenden Formeln, die als Erweiterung der Formeln von Frenet und Serret in Bezug auf die Curven doppelter Krümmung* (vergl. S. 460) *anzusehen sind, und welche die Differentiale der n^2 Cosinus der Winkel α als lineare Functionen der Cosinus selbst liefern:*

$$\frac{d \cos \alpha_{ki}}{ds} = \frac{\cos \alpha_{k+1,i}}{R_k} - \frac{\cos \alpha_{k-1,i}}{R_{k-1}};$$

darin ist angenommen, dass für $k = 1$ auf der rechten Seite das zweite Glied und für $k = n$ auf der rechten Seite das erste Glied wegfällt. Ueber diese Formeln siehe Brunel, *Math. Ann.*, 19 und Landsberg, *Crelle*, 114.

In Bezug auf die Ausdehnung des Bonnet'schen Theorems über den Abstand zweier unendlich naher Tangenten der Curve und über den Abstand eines Punkts der Curve von der Osculationsebene in einem unendlich nahen Punkt siehe Jordan, *Compt. Rend.*, 79, 1874, p. 796. Andere Arbeiten über die Infinitesimaltheorie der Curven in einem beliebigen Raum sind von Hoppe, *Arch. der Math.*, (1), 64; (2), 6, 11, 12, 1880—1892.

§ 2. Differentialgeometrie der in linearen Räumen enthaltenen Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen. Quadratische Differentialformen.

Wie in der Theorie der Flächen die bekannte quadratische Differentialform von zwei Variablen eingeführt wird, welche das Quadrat des der Fläche angehörigen *Linienelements* angibt, so wird auch bei Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen *eine quadratische Differentialform von n Variabeln*

$$ds^2 = \sum_1^n a_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

benutzt, welche das Quadrat des unendlich kleinen Abstands zweier unendlich naher Punkte dieser Mannigfaltigkeit darstellt, d. h. wie man sagt, *das Quadrat des dieser Mannigfaltigkeit angehörigen Linienelements. Wir wollen annehmen, die Form* (1) *sei eine definite positive Form und die Determinante der a sei von Null verschieden.*

Dass man eine *quadratische* Differentialform und nicht eine beliebige andere Form, z. B. 4^ter oder 6^ter Ordnung etc. zu

Grunde legt, ist eine durchaus specielle Hypothese, welche sich nicht machen lassen würde, wenn sie nicht die *Folge* einer anderen Hypothese wäre, die hier ausdrücklich aufgestellt sei: dass nämlich unsere Mannigfaltigkeit immer in einem *linearen* Raum von einer grösseren Anzahl von Dimensionen enthalten ist.

Ferner:

Unter der *Voraussetzung, das Linienelement lasse sich durch eine quadratische Form, wie* (1), *ausdrücken, kann immer eine Zahl* h

$$0 \leqq h \leqq \frac{n(n-1)}{2}$$

derart gefunden werden, dass, wenn $y_1, \ldots, y_{n+h}$ *geeignete Functionen von* $x_1, \ldots, x_n$ *sind, die Beziehung* (1) *sich aus der Differentialform*

$$\sum_{i=1}^{n+h} dy_i^2$$

ableiten lässt, welche einem linearen Raum von $n+h$ *Dimensionen entspricht.* Siehe Schläfli, *Ann. di mat.*, (2), 5, p. 190; Ricci, ib., 12, p. 137.

Die kleinste der Zahlen h heisst die *Classe* der Mannigfaltigkeit. Ricci.

Die natürliche Geometrie der Mannigfaltigkeiten reducirt sich somit auf das Studium der quadratischen Differentialformen und ihrer Transformationen.

In der Theorie der quadratischen Differentialformen benutzt man mit Vortheil die sogenannten *Christoffel'schen Symbole*, von denen es vier Kategorien gibt: die Drei-Indices-Symbole 1ter und 2ter Art und die Vier-Indices-Symbole 1ter und 2ter Art. Siehe Christoffel, *Crelle*, 70 und auch weiter oben S. 474, 475. *Die Drei-Indices-Symbole 1ter Art sind:*

$$\begin{bmatrix} k\,h \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{hi}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{kh}}{\partial x_i}\right);$$

und die zweiter Art:

$$\begin{Bmatrix} k\,h \\ i \end{Bmatrix} = \sum_l A_{il} \begin{bmatrix} k\,h \\ l \end{bmatrix},$$

worin die A die algebraischen Adjungirten der Elemente bezeichnen, die in der Determinante der a dieselben Indices haben.

Die Vier-Indices-Symbole 2ter Art lauten:

$$\{kh, ij\} = \frac{\partial \left\{ {ki \atop h} \right\}}{\partial x_j} - \frac{\partial \left\{ {kj \atop h} \right\}}{\partial x_i} +$$
$$+ \sum_l \left[\left\{ {ki \atop l} \right\} \cdot \left\{ {lj \atop h} \right\} - \left\{ {kj \atop l} \right\} \cdot \left\{ {li \atop h} \right\} \right],$$

und schliesslich die Vier-Indices-Symbole 1ter Art:

$$(kh, ij) = \sum_l a_{il} \{kl, ij\} .$$

Zwischen diesen Symbolen bestehen viele Relationen. Näheres findet man in den auf S. 604 citirten Arbeiten von Christoffel und Lipschitz und in Kap. 2 der *Differentialgeometrie* von Bianchi, Leipzig 1899.

Wenn eine quadratische Differentialform (1) gegeben ist und angenommen wird, die x seien Functionen von n anderen Variabeln x', so kann (1) in die Differentialform

$$\sum_1^n a'_{ij} dx'_i dx'_j$$

transformirt werden.

Diese beiden Differentialformen heissen *äquivalent.*

Eines der wichtigsten Probleme der Theorie der Differentialformen besteht in der Ermittelung der Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Differentialformen äquivalent sind.

Zuerst werden die Beziehungen aufgesucht, denen die Functionen x und x' genügen müssen; *sie sind durch* $\frac{n^2(n+1)}{2}$ *simultane partielle Differentialgleichungen vom Typus*

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_s} + \sum_{hk} \left\{ {hk \atop i} \right\} \frac{\partial x_h}{\partial x'_s} \frac{\partial x_k}{\partial x'_r} = \sum_j \left\{ {rs \atop j} \right\}' \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$$

gegeben, worin unter $\left\{ {rs \atop j} \right\}'$ *das Christoffel'sche Symbol für die transformirte Form verstanden wird.*

Die Integrabilitätsbedingungen dieses Systems partieller Differentialgleichungen sind Bedingungsgleichungen, denen die a und die a' sowie ihre Derivirten genügen müssen. Wenn sie auf geeignete Art combinirt werden, so kann man diesen Bedingungsgleichungen eine invariante Form geben und kann auf diese Art Differentialinvarianten oder -parameter erhalten, d. h. Ausdrücke, die bei jeder Transformation der Variabeln unverändert bleiben. Siehe *Repert.*, 1, p. 218 u. ff.

Wir wollen uns jedoch nicht auf die Einzelheiten der Construction dieser Differentialparameter einlassen und verweisen auf die unten citirte Literatur.

Die Anzahl der Bedingungen für die Transformirbarkeit zweier quadratischer Differentialformen von n Variabeln beträgt

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Damit eine quadratische Differentialform von n Variabeln sich in eine solche transformiren lasse, deren Linienelement die Form $\sum_1^n dx_i^2$ *hat, müssen die Bedingungen*

$$(hk, ij) = 0$$

erfüllt sein, worin (hk, ij) *das oben definirte Christoffel'sche Symbol bedeutet.*

Das Problem der Transformation der Differentialformen enthält als speciellen Fall die Ermittelung der Bedingungen, unter denen ein gegebener Raum *linear* ist, sein Linienelement sich mithin auf die Form

$$\sum_{i=1}^n dx_i'^2$$

reduciren lässt.

Die Lamé'schen Gleichungen für die dreifachen Orthogonalsysteme (vergl. Kap. 16, § 14) entsprechen gerade den *Bedingungen, unter denen der Raum von drei Dimensionen linear ist.*

Ein diesem Transformationsproblem verwandtes Problem besteht darin, aufzusuchen, wann eine Differentialform *von der Classe Null, von der Classe 1, etc.* ist. Siehe oben. In dieser Hinsicht sind die Arbeiten von Ricci zu erwähnen, *Ann. di mat.*, (2), 12; *Rend. Acc. Lincei,* März 1888; *Lezioni sulla teoria delle superficie,* Verona-Padova 1898, p. 73.

Das Problem der Transformation der quadratischen Differentialformen wurde zuerst von Christoffel, *Crelle,* 70 und von Lipschitz, ib. 70, 71, 72, 74, 78, 81 behandelt; siehe auch das *Bull. de Darboux,* 4, 1873. Der letztere untersuchte auch den Fall der Differentialformen höheren Grads. In einer Arbeit von Suworoff, russisch, im Auszug reproducirt in dem *Bull. de Darboux,* 4 wird nur der Fall quadratischer *ternärer*

Differentialformen betrachtet und werden für ihn *drei* invariante Ausdrücke construirt; mit dem allgemeinen Fall der quadratischen Formen beschäftigte sich später dann auch Voss, *Math. Ann.*, 16.

§ 3. Deformation, Verrückungen und Riemann'sche Krümmung eines Raums. Räume von constanter Riemann'scher Krümmung.

Wenn man sich an die Fundamentaleigenschaft der Gauss-schen Krümmung K der Flächen, bei einer Transformation der Fundamentaldifferentialform invariant zu bleiben, erinnert, so drängt sich unmittelbar der Gedanke auf, von den Studien über die Transformation der Differentialformen auf die Ausdehnung *des Begriffs der Krümmung* überzugehen. Wir werden in diesem Paragraphen die Krümmung eines Raums in dem Riemann-schen Sinn behandeln.

Vor Allem wollen wir das folgende wichtige Theorem von Beez aufstellen (*Zeitschr. für Math. u. Phys.*, 20, 21; siehe auch Ricci, *Ann. di mat.*, (2), 12, p. 163 und Cesàro, *Geom. intrinseca*, deutsch von Kowalewski, *Vorlesungen über natürliche Geometrie*):

Ein Raum von n Dimensionen $(n > 2)$, welcher in einem Raum von $n+1$ Dimensionen enthalten ist, lässt sich im Allgemeinen nicht deformiren, wenn man immer in dem Raum von $n+1$ Dimensionen bleiben will, d. h. es ist nicht möglich, ihn in dem umgebenden Raum zu verbiegen und dabei das Linienelement unverändert zu erhalten, wie es mit der grössten Uneingeschränktheit mit den Räumen einer Dimension (den Linien) und mit etwas mehr Einschränkung mit den Räumen von zwei Dimensionen (den Flächen) geschehen kann. Die Biegung ist nur bei speciellen Räumen ausführbar. Die einzigen Veränderungen, die ein allgemeiner Raum von n Dimensionen $(n > 2)$ erleiden kann, ohne aus dem Raum von $n+1$ Dimensionen, in dem er sich nach der Voraussetzung befinden soll, herauszutreten, sind starre Verrückungen, d. h. Translationen, Rotationen etc.

Wir gehen nun dazu über, den Begriff von der *Krümmung eines Raums in einem Punkt* nach Riemann zu erklären.

Wir wollen den Punkt P des Raums betrachten und von ihm aus in seiner unendlich kleinen Umgebung die sämmtlichen möglichen *geodätischen* Linien in allen Richtungen ziehen, d. h.

die Linien, welche den *kürzesten* Weg von dem Punkt P nach einem ihm unendlich nahen Punkt in demselben Raum darstellen, also Linien, für welche das ihren Bogen darstellende Integral ein Minimum ist. *Solcher Linien kann man* ∞^{n-1} *ziehen, wenn der Raum n Dimensionen hat. Unter ihnen lassen sich stets n (und nicht mehr als n) Linien auswählen, die so beschaffen sind, dass, wenn die Differentiale ihrer vom Punkt P aus gerechneten Bogen* $ds_1, \ldots, ds_n$ *genannt werden, die Grössen* $ds_1, \ldots, ds_n$ *linear unabhängig sind. Das Bogendifferential jeder anderen geodätischen Linie lässt sich dann immer linear durch* $ds_1, \ldots, ds_n$ *ausdrücken.*

Wir wollen *zwei* solche Linien, z. B. die den Bogendifferentialen ds_1, ds_2 entsprechenden, und zugleich die unendlich vielen anderen betrachten, deren Bogendifferential durch die Formel

$$ds_{12} = \lambda_1 ds_1 + \lambda_2 ds_2$$

ausgedrückt wird.

Die Punkte aller dieser unendlich vielen Linien, die sich über ein unendlich kleines Gebiet um P erstrecken, bilden eine in dem totalen Raum enthaltene Mannigfaltigkeit von *zwei* Dimensionen (eine Fläche); solcher *unendlich kleiner* Flächenausdehnungen um P kann man

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ herstellen.}$$

Von jeder dieser Flächen berechnen wir auf die Gausssche Art die *Krümmung* in P (sie wird, wie auch sonst, aus den Coefficienten jener quadratischen Differentialform von *zwei* Variabeln gebildet, die das Quadrat des Linienelements der betreffenden Fläche darstellt); diese Krümmung nennen wir nach dem Vorgang Riemann's *Krümmung des Raums in dem Punkt P nach dieser bestimmten Flächenorientirung.* Wie man also sieht, gibt es nach diesem Begriff in jedem Punkt des Raums so viele Krümmungen, als voneinander verschiedene Flächenorientirungen vorhanden sind, also $\frac{n(n-1)}{2}$. Nimmt man an, diese verschiedenen Krümmungen in Bezug auf einen und denselben Punkt seien einander sämmtlich gleich und bleiben auch bei dem Uebergang von einem Punkt des Raums zu einem anderen unverändert, so erhält man *die Räume constanter Riemann'scher Krümmung.*

Eine solche constante Krümmung kann positiv, negativ oder Null sein; *ist sie Null, so ist der Raum linear.*

Wenn die Krümmung constant positiv ist, so wird der Raum *sphärischer* oder *Riemann'scher* oder *elliptischer* Raum genannt; ist sie dagegen negativ, so heisst der Raum *pseudosphärischer* oder *Lobatschefskij'scher* oder *hyperbolischer* oder *nicht-Euclidischer* in engerem Sinn; ist die Krümmung schliesslich Null, so ergibt sich, wie schon gesagt, der *lineare* oder, wie er auch genannt wird, *der Euclidische* oder *parabolische Raum*. Siehe Kap. 21.

Der pseudosphärische oder hyperbolische Raum dehnt sich in das Unendliche aus, während der elliptische Raum nicht unendlich gross ist. Riemann.

Die Riemann'schen Räume constanter Krümmung besitzen die bemerkenswerthe Eigenschaft, *dass sie auf sich selbst derart abwickelbar sind, dass man ohne Deformation von einem Punkt zu jedem beliebigen anderen übergehen kann, was sonst nach dem Beez'schen Theorem nicht möglich ist; für diese Räume gilt also das Princip der vollkommenen Bewegungsfähigkeit der Figuren ohne Deformation, wie es z. B. bei den sphärischen Flächen des gewöhnlichen Raums der Fall ist.* Lipschitz, siehe das Citat im vorigen Paragraphen; Bianchi, *Rend. Acc. Lincei*, 1898.

Dem Linienelement eines jeden Raums constanter Riemann-scher Krümmung K kann immer bei geeigneter Auswahl der Coordinaten (welche auch stereographische genannt werden) die (Riemann'sche) Form

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{1 + \frac{K}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$$

gegeben werden; die Coefficienten der quadratischen Differentialform sind mithin constanten Grössen proportional, da der Proportionalitätsfactor eine Function aller x ist.

Wählt man ein anderes Coordinatensystem, so lässt sich das Linienelement für jeden Raum constanter negativer Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ *durch die Formel*

$$ds^2 = \frac{R^2}{x^2}(dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$$

darstellen, worin die x an die Relation

$$x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2$$

gebunden sind und a eine Constante bedeutet, während das Linienelement eines jeden Raums constanter positiver Krümmung $+\frac{1}{R^2}$ *durch*

$$ds^2 = \frac{R^2}{x^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 - dx^2)$$

ausgedrückt werden kann, worin die x die Gleichung

$$x^2 = a^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

erfüllen müssen.

Wichtig ist die folgende Eigenschaft der Riemann'schen Räume constanter Krümmung:

Wählt man in ihnen das Coordinatensystem auf geeignete Art aus (nimmt man insbesondere das System, für welches das Linienelement die zuletzt angegebene Form hat), so lassen sich die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen ausdrücken; Theorem von Beltrami, *Ann. di mat.*, (2), 2; und umgekehrt; *wenn in einem Raum bei einer speciellen Auswahl des Coordinatensystems diese letztere Eigenschaft besteht, so hat der Raum eine im Riemann'schen Sinn constante Krümmung.* Schläfli, *Ann. di mat.*, (2), 5; Beltrami, ib., id. Siehe auch Kap. 16, § 11, S. 492.

In einem Raum von constanter negativer Krümmung bestimmen zwei Punkte ohne Ausnahme eine geodätische Linie und zwei durch einen Punkt gehende geodätische Linien haben keine anderen Punkte gemeinsam; dagegen kann es in den Räumen von constanter positiver Krümmung vorkommen, dass zwei durch einen Punkt gehende geodätische Linien sich noch in einem anderen Punkt treffen (man denke nur an die gewöhnliche Kugel); es ist damit aber nicht gesagt, dass dieser Satz für alle Räume von constanter positiver Krümmung gültig sein muss, eine Bemerkung, die von Klein herrührt. Vergl. Kap. 21, § 2.

Dem Linienelement eines Raums von constanter positiver Krümmung $\frac{1}{R^2}$ kann man die Form geben (Bianchi, *Rend. Acc. Lincei*, 7, 1898, p. 155):

$$ds^2 = R^2 \{ dx_1^2 + \sin^2 x_1 \, dx_2^2 + \\ + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \, dx_3^2 + \cdots + \sin^2 x_1 \cdots \sin^2 x_{n-1} \, dx_n^2 \}$$

und demjenigen eines Raums von constanter negativer Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ jede der drei folgenden Formen (Bianchi, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, deutsch von Lukat, p. 580, 582, vergl. auch weiter oben Kap. 16, § 11):

$$ds^2 = dx_1^2 + \cosh^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik} dx_i dx_k,$$

(hyperbolischer Typus),

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}} \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik} dx_i dx_k,$$

(parabolischer Typus),

$$ds^2 = dx_1^2 + \sinh^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik} dx_i dx_k,$$

(elliptischer Typus).

Ein anderes sehr einfaches Coordinatensystem für die Räume constanter Krümmung wird nach Weierstrass benannt, obgleich es schon in einer früheren Abhandlung aus dem Jahr 1868, *Ann. di mat.*, (2), 2 von Beltrami benutzt wurde; es gibt dem Linienelement eine der folgenden Formen:

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = R^2\left(\sum_i dy_i^2 - dy^2\right) \\ \text{mit } y^2 - \sum_i y_i^2 = 1 \end{array}\right\} \text{für die Räume mit constanter negativer Krümmung } -\frac{1}{R^2},$$

und:

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = R^2\left(dy^2 + \sum_i dy_i^2\right) \\ \text{mit } y^2 + \sum_i y_i^2 = 1 \end{array}\right\} \text{für die Räume mit constanter positiver Krümmung } \frac{1}{R^2}.$$

Dieses Coordinatensystem lässt sich aus dem weiter oben angegebenen System, welches die bemerkenswerthe Eigenschaft besitzt, den Gleichungen der geodätischen Linien eine lineare Gestalt zu geben, dadurch ableiten, dass man

$$\frac{a}{x} = y, \quad \frac{x_i}{x} = y_i$$

setzt.

Ueber die Formeln, welche dazu dienen, von diesem System auf das Riemann'sche überzugehen, siehe Bianchi, *Ann. di mat.*, (3), 2, p. 102.

Damit ein dreidimensionaler Raum constante Krümmung K im Riemann'schen Sinn habe, müssen sechs Relationen erfüllt sein (siehe § 2); *sie lauten für* $i, j, k = 1, 2, 3$, *wenn dem Linienelement des Raums die Form*

$$ds^2 = H_1 dx_1^2 + H_2 dx_2^2 + H_3 dx_3^2$$

gegeben wird, folgendermassen:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial x_k} \frac{\partial H_i}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{H_j^2} \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = -K H_i H_j,$$

Suworoff, *Bull. de Darboux*, 4, p. 192.

Für $K = 0$ erhält man die Lamé'schen Formeln, siehe Kap. 16, § 14, S. 505, welche die Bedingungen angeben, unter denen der Raum linear ist.

Der Begriff der Krümmung eines Raums in dem oben angegebenen Sinn ist Riemann zu verdanken: *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (nach des Verfassers Tod erschienen); dann folgten: der bereits erwähnte Aufsatz von Beltrami, *Ann. di mat.*, (2), 2, *Ueber die Räume constanter Krümmung* und andere, die ebenfalls schon citirt wurden, wie Schläfli und Beltrami, *Ann. di mat.*, (2), 5.

Die Arbeiten von Lipschitz, Voss etc., auf die wir in § 2 hingewiesen haben, dehnten in einer anderen Art den Begriff der Gauss'schen Krümmung auf Mannigfaltigkeiten in Räumen von höheren Dimensionen aus und lieferten auch einen ansehnlichen Beitrag zu der Riemann'schen Krümmungstheorie; man findet bei ihnen z. B. eine Formel, welche die Riemann'sche Krümmung durch die Coefficienten der quadratischen Fundamentaldifferentialform ausdrückt. Wir verweisen schliesslich noch auf einen Aufsatz von Schur, *Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen, Math. Ann.*, 27.

Ein Raum constanter Riemann'scher Krümmung hat, wie bereits gesagt wurde, unendlich viele Bewegungen in sich selbst; *er kann ins Besondere auf* $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *verschiedene Arten auf sich selbst abgewickelt werden, worin n die Anzahl seiner Dimensionen angibt.*

Man kann nun danach fragen, wie wohl die anderen Räume beschaffen sein mögen, die nur ∞^r Transformationen gestatten, wobei r kleiner als $\frac{n(n+1)}{2}$ ist. So gibt es z. B. in dem gewöhnlichen Raum ausser der Kugel, welche ∞^3 Bewegungen in sich selbst hat, die Rotationsflächen, die nur ∞^1 solche Bewegungen zulassen, etc.

Mit diesem Problem beschäftigten sich Lie, *Theorie der Transformationsgruppen,* unter Mitwirkung von Engel bearbeitet, 3 Abschn., Leipzig 1888, 1890, 1893, 1, p. 310 und 3, p. 575; Killing, *Crelle,* 109, p. 121; Bianchi, *Mem. della Soc. ital. delle scienze,* (3), 11, 1897, p. 267, der den Fall $n = 3$ erschöpfend behandelte; Ricci, *Sui gruppi di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni, Mem. della Soc. ital. delle scienze,* (3), 12, 1899; Ricci und Levi-Civita, *Math. Ann.,* 54, p. 173.

§ 4. Eine andere Ausdehnung des Begriffs der Krümmung auf Mannigfaltigkeiten oder Räume, die mehr als zweidimensional und in einem höheren Raum enthalten sind.

Die Ausdehnung, welche Riemann dem Begriff der Krümmung für einen höheren Raum gab, hat sich von grosser Bedeutung erwiesen und ist speciell in dem Fall von Nutzen gewesen, in welchem diese Riemann'sche Krümmung überall constant ist. Ist sie dieses nicht, so erhält man eine Erweiterung der Gauss'schen Krümmung, die vor Allem den Missstand zeigt, dass sie nicht für jeden Punkt des Raums oder der Mannigfaltigkeit einen einzigen Werth, sondern soviele Werthe hat, als es diesem Punkt zugehörige Flächenorientirungen gibt, also $\frac{n(n-1)}{2}$.

Es scheint daher von Vortheil zu sein, den Begriff der *Krümmung* auf eine andere Art auszudehnen.

Wir wollen uns einen Raum oder eine Mannigfaltigkeit M_{n-1} von $n-1$ Dimensionen denken, die in einem *beliebigen* Raum M_n von n Dimensionen enthalten ist. Wie wir in dem Fall der in einem linearen Raum enthaltenen Flächen die in einem Punkt die Fläche berührenden Geraden, so wollen wir im allgemeinen Fall die *geodätischen* Linien von M_n betrachten, die M_{n-1} in einem Punkt P berühren.

Bei den gewöhnlichen Flächen lassen sich die Richtungen der *Krümmungslinien* als die Halbirungsgeraden der Richtungen der Asymptotenlinien ansehen, d. h. als die Axen des Kegelschnitts, der diese letzteren Richtungen zu Asymptoten hat, siehe Kap. 16, § 9; ähnlich betrachten wir im allgemeinen

Fall statt der Tangenten an die Asymptotenlinien *die geodätischen Linien von M_n, welche M_{n-1} in dem Punkt P osculiren (dreipunktig berühren)*; sie bilden eine quadratische Mannigfaltigkeit, deren $(n-1)$ Axen mit vollem Recht als die Richtungen der *Krümmungslinien* anzusehen sind; *diese Axen stehen zu je zweien senkrecht aufeinander und ihre Längen stellen genau so, wie in dem gewöhnlichen Fall der Dupinschen Indicatrix für die Flächen, die Krümmungsradien der zur Mannigfaltigkeit M_{n-1} normalen Schnitte dar, die in den Richtungen dieser Krümmungslinien gemacht werden (die Hauptkrümmungsradien); sie entsprechen genau den Maxima und Minima der Krümmungsradien aller unendlich vielen Normalschnitte.*

Der reciproke Werth des Products dieser Hauptkrümmungsradien heisst *die totale Krümmung der Mannigfaltigkeit in dem betrachteten Punkt.*

Die vorstehenden Begriffe ergeben sich aus Betrachtungen, die Lipschitz und Voss in den im § 2 citirten Arbeiten angestellt haben; diese Autoren gehen von der Theorie der quadratischen Differentialformen aus.

Kronecker, *Berl. Ber.*, 1869, p. 170, 695 und Beez, *Zeitschr. für Math.*, 21, 24; *Math. Ann.*, 7 dagegen suchten einen anderen Gedankengang zu Grund zu legen, der sich übrigens auf sehr natürliche Art darbietet.

Wir wollen uns der Einfachheit wegen auf den Fall beschränken, in welchem die Mannigfaltigkeit M_{n-1} in einem linearen Raum R_n enthalten ist und wollen in ihm eine sphärische Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen und dem Radius 1 betrachten, die durch die Gleichung

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

dargestellt werde, während die Gleichung der gegebenen Mannigfaltigkeit

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

laute.

Wir wollen jeden Punkt von F jedem Punkt von f zuordnen und wollen dabei so verfahren, wie es bekanntlich bei der sphärischen Abbildung der Flächen geschieht (vergl. Kap. 16, § 8); d. h. wir lassen diejenigen Punkte einander entsprechen, in denen *die normalen Geraden* parallel sind. Betrachtet man das Volumen eines unendlich kleinen Elements der Mannigfaltigkeit um einen Punkt P und das Volumen des entsprechenden Elements der Kugel, so ist die Grenze des Verhältnisses zwischen dem letzteren und dem des Elements der Mannigfaltigkeit die *Gauss-sche Krümmung* der Mannigfaltigkeit im Punkt P; *sie ist der reciproke Werth des Products der Hauptkrümmungsradien, wie bei den früheren Betrachtungen.*

Der Ausdruck für die Krümmung K lautet

$$K = -\frac{1}{S^{n+1}} \begin{vmatrix} 0, & F_1, & F_2, \ldots, F_n \\ F_1, & F_{11}, & F_{12}, \ldots, F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_n, & F_{n1}, & F_{n2}, \ldots, F_{nn} \end{vmatrix},$$

worin die F_i, F_{ij} die ersten und zweiten Derivirten von F bezeichnen und S sich aus

$$S = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2} \quad \textit{ergibt.}$$

Ueber den Ausdruck für K siehe auch Ricci, *Ann. di mat.*, (2), 12, p. 165 und über $n = 4$ Suworoff, *Bull. de Darboux*, 4, p. 186. Vergl. auch Lie, *Gött. Nachr.*, 1871.

Nennt man allgemein ebene bez. sphärische Mannigfaltigkeiten M_{n-1} solche, die einem M_n angehören und so beschaffen sind, dass in jedem Punkt die $(n-1)$ Hauptkrümmungsradien sämmtlich entweder unendlich gross oder derselben endlichen Grösse gleich sind, die auch dann dieselbe bleibt, wenn man von einem Punkt der Mannigfaltigkeit zu einem anderen übergeht, so gilt der Satz:

In einem beliebigen Raum M_n existiren im Allgemeinen keine ebenen und sphärischen Mannigfaltigkeiten; wenn die Coefficienten des Linienelements von M_n gewisse Bedingungen erfüllen, so enthält M_n ∞^n Ebenen oder Kugeln (von gegebenem Radius); in dem Fall, in welchem M_n ∞^n Ebenen enthält, können jedoch in ihm keine Mannigfaltigkeiten von der Beschaffenheit existiren, dass die Hauptkrümmungsradien zwar für jeden Punkt sämmtlich einander gleich sind, von Punkt zu Punkt der Mannigfaltigkeit aber variiren. Siehe Voss, *Math. Ann.*, 16, p. 157. Dieses Theorem entspricht dem im gewöhnlichen Raum geltenden Satz, dass es ausser den Kugeln keine Flächen gibt, deren Punkte sämmtlich Nabelpunkte sind.

In einem Raum constanter Riemann'scher Krümmung (siehe § 3) *existiren Mannigfaltigkeiten, für welche die Hauptkrümmungshalbmesser zwar in jedem Punkt einander gleich sind, sich aber von Punkt zu Punkt ändern.* Voss, l. c., p. 160.

Wenn die totale Krümmung in jedem Punkt einer Mannig-

faltigkeit Null ist, so ist diese dadurch ausgezeichnet, dass von jedem ihrer Punkte eine geodätische Linie von M_n ausgeht, welche eine vierpunktige Berührung mit ihr hat. Will man die Benennungen gebrauchen, die für die Flächen benutzt werden, so kann man sagen, jeder Punkt sei ein *parabolischer Punkt*. Siehe Kap. 16, § 9

Wenn die *totale Krümmung* Null ist und ins Besondere $n-2$ der Hauptkrümmungsradien für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen unendlich gross sind, so heisst die Mannigfaltigkeit der Analogie mit den Flächen des gewöhnlichen Raums wegen eine *Developpable*, weil sie alsdann durch eine geodätische Linie des Raums M_n auf ähnliche Art erzeugt wird, wie eine Developpable durch eine Gerade des gewöhnlichen Raums.

Ein den vorstehenden Sätzen verwandtes Theorem ist von A. Brill, *Math. Ann.*, 26, p. 302:

Eine pseudosphärische dreidimensionale Mannigfaltigkeit (von constanter negativer Riemann'scher Krümmung) kann es, wenn sie reell sein soll, in einem linearen Raum von 4 Dimensionen nicht geben, sondern nur in einem linearen Raum von 5 Dimensionen.

Allgemeiner (siehe Bianchi, *Differentialgeometrie*, Leipzig 1899, p. 615, 619):

In einem Raum R_{n+1} von $n+1$ Dimensionen $(n > 2)$ constanter Riemann'scher Krümmung K gibt es keinen Raum constanter Riemann'scher Krümmung K_0, wenn $K_0 - K$ negativ ist. Ist diese Differenz (die relative Krümmung) positiv, so sind die entsprechenden Hyperflächen ausschliesslich Hypersphären.

Am Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch erwähnen, dass auch andere Begriffe und Theoreme der Flächentheorie auf die mehrdimensionalen Räume ausgedehnt wurden.

Die Erweiterung der *Codazzi'schen Formeln* führt zu einem System von $\frac{1}{6}n(n-1)(5n-1)$ Formeln für eine in einem linearen Raum enthaltene Mannigfaltigkeit von n Dimensionen; über die Ausdehnung des *Euler'schen Theorems* siehe Jordan, *Compt. Rend.*, 79, 1874, p. 912 und über die des *Dupin'schen Theorems:* Lie, *Gött. Nachr.*, 1871; Klein, *Math. Ann.*, 5 und auch Cesàro, *Vorlesungen über natürliche Geometrie*. Eine Darstellung der Differentialgeometrie der mehrdimensionalen Räume findet man bei Killing, *Die nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig 1885.

§ 5. Die Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen (Flächen) in den Räumen constanter Riemann'scher Krümmung.

In einigen neueren Arbeiten, besonders von Bianchi, wird der Versuch gemacht, die gewöhnliche Differentialgeometrie der Flächen auf den Fall auszudehnen, in welchem diese in dreidimensionalen Räumen *constanter Krümmung* enthalten sind.

Wir wollen dem Element des dreidimensionalen Raums von constanter positiver Krümmung $\frac{1}{R^2}$ oder negativer Krümmung $-\frac{1}{R^2}$ bez. die Form

$$ds^2 = R^2(\pm dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

geben (siehe § 3), und es seien die x durch die Relation

$$x^2 \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 1$$

verbunden, worin die oberen Zeichen für den elliptischen, die unteren für den hyperbolischen Raum gelten.

Zu jeder Fläche in diesem Raum gehören die bekannten beiden quadratischen Differentialformen mit den Coefficienten E, F, G, D, D', D'', zwischen denen drei Relationen bestehen; die beiden ersten sind die *Codazzi'schen Formeln* selbst (vergl. S. 469, 470), die dritte Gauss'sche wird dagegen auf folgende Art modificirt:

$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = k - K;$$

dabei bedeutet K die Krümmung des Raums und k die *absolute Krümmung* der Fläche (d. h. die, welche der ersten Fundamentaldifferentialform entspricht). Die linke Seite dieser letzten Relation heisst die *relative Krümmung* der Fläche und ist dem reciproken Werth des Products der beiden *reducirten Hauptkrümmungsradien* r_1, r_2 gleich.

Bianchi studirte in den Räumen constanter Krümmung 1) *die Flächen, deren absolute Krümmung Null ist*, *Atti Acc. Torino*, 1895; *Ann. di mat.*, (2), 24; (3), 2; zu diesen Flächen gehört die *Clifford'sche;* vergl. Klein, *Math. Ann.*, 37; Killing, ib., 39; dann 2) die *Minimalflächen*, Bianchi, *Rend. Acc. Lincei*, 1888; *Ann. di mat.*, (3), 2; siehe über die letzteren auch Lipschitz, *Crelle*, 78 und Cayley, *Compt. Rend.*, 111, 1890; ferner 3) *die Flächen vom Liouville'schen Typus*, für welche $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2$

oder $r_1 + r_2 = 0$, etc. ist; man vergleiche die citirten Arbeiten; Bianchi beschäftigte sich auch mit den Weingarten'schen Systemen (Kap. 16, § 14) in den Räumen constanter Krümmung, *Mem. Acc. Lincei,* (4), 4, 1887.

Ueber die Bestimmung der Volumina in den Räumen constanter Krümmung siehe Simon, *Math. Ann.*, 42; D'Ovidio, *Atti Acc. Torino,* 1893; Loria, *Giorn. di Batt.*, 26; in Bezug auf andere Arbeiten, die zwar dieselben Räume betreffen, aber nicht speciell ihre *Infinitesimal*geometrie, verweisen wir auf das folgende Kapitel.

Wir erwähnen schliesslich noch, dass *die reguläre Theilung eines nicht-Euclidischen oder pseudosphärischen Raums in congruente Polyeder* auf das Problem der unstetigen Gruppen linearer Substitutionen einer Variabeln führt, Poincaré; siehe *Repert.*, 1, Kap. 14, § 2. Studien dieser Art findet man bei Bianchi, *Math. Ann.*, 38, 40, 42; *Rend. Acc. Lincei,* 1893, sowie bei Fricke und Klein, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen,* 1897, Abschn. 1; vergl. auch Hilbert, *Mathematische Probleme, Gött. Nachr.*, 1900, Nr. 18, *Aufbau des Raumes aus congruenten Polyedern.*

Kapitel XXI.

Die absolute Geometrie und speciell die nicht-Euclidische Geometrie in der Ebene und im Raum.

§ 1. Historische Bemerkungen über die nicht-Euclidische Geometrie.

Die ganze Metrik der Euclidischen Geometrie beruht auf einer Hypothese, die anderen ähnlichen Hypothesen vorzuziehen *logisch* kein Grund vorliegt; die alleinige Ursache, weshalb man gerade ihr den Vorzug gegeben hat, rührt von einer wahrscheinlichen Uebereinstimmung mit den Erfahrungen her, die unsere Sinne uns verschaffen.

Diese Hypothese ist in dem berühmten *Postulat* V *oder dem Postulat über die Parallelen* der Euclidischen Elemente (στοιχεῖα) enthalten*).

Sehr zahlreiche Versuche sind zu verschiedenen Zeiten gemacht worden, das Postulat zu beweisen oder es durch andere zu ersetzen; ausgedehnte ins Einzelne gehende Angaben findet man in dem Werk von Stäckel und Engel, *die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuclidischen Geometrie,* Leipzig 1895. Bekannt sind die Untersuchungen Legendre's in den ersten beiden Ausgaben seiner *Éléments de géométrie*, Paris 1794

---

*) Früher wurde es in Folge eines Irrthums der Copisten, die uns den griechischen Text übermittelt haben, *das Axiom XI* genannt.

Die Euclidischen Elemente zerfallen in 13 Bücher und enthalten die wesentlichsten elementar-geometrischen Kenntnisse, welche die Griechen hatten; sie sind etwa um 300 v. Chr. verfasst. Vergl. über dieses einzigartige Werk M. Cantor, *Gesch. der Math.*, 1, p. 246, sowie die Clebsch-Lindemann'schen *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raums,* in denen Lindemann den στοιχεῖα eine eingehende Besprechung zu Theil werden lässt.

(die neueste Ausg. ist von 1894); siehe auch die ***Mém. de l'Ac. de Paris***, 1833 und die Baltzer'sche ***Planimetrie***. Beachtenswerth sind auch die früheren Forschungen von Girolamo Saccheri, ***Euclides ab omni naevo vindicatus*** etc., Milano 1733, die lange vergessen waren, und auf welche Beltrami die Aufmerksamkeit der Mathematiker lenkte, ***Rend. Acc. Lincei***, 1889; ferner die Arbeiten von Lambert, 1766 (vergl. das oben citirte Stäckel-Engel'sche Werk).

Nach den neuesten Forschungen ist es unzweifelhaft, dass schon Gauss die Art erkannt hat, auf welche das Problem zu lösen ist, siehe Stäckel-Engel, l. c.; ***Math. Ann.***, 49, p. 419 und ***Bull. de Darboux***, 1897, p. 206; ferner Gauss, ***Ges. Werke***, Bd. 8 (Nachlass) und die ***Urkunden zur nichteuclidischen Geometrie***, I. Lobatschefskij von Engel, Leipzig 1899; vergl. auch den Briefwechsel zwischen Gauss und Wolfgang Bolyai, Leipzig bei Teubner.

Lobatschefskij und Johann Bolyai, der Sohn Wolfgang's, waren die ersten, welche in separat erschienenen Schriften neue und originelle Ideen über die wahre Natur der allgemeinen Parallelentheorie entwickelten und dabei den Fundamentalsatz zu Grund legten, dass das Postulat V nicht etwa eine Wahrheit darstellt, die sich logisch aus den anderen Voraussetzungen Euclid's ableiten lässt, sondern von diesen durchaus unabhängig ist. Sie verfuhren dabei auf eine Art, wie man es bei jedem indirecten Beweis thut. Sie legten nämlich an Stelle des fünften Postulats ein ihm widersprechendes zu Grund und verfolgten dann die Hypothese, dass sich durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden nicht lediglich eine die gegebene Gerade nicht schneidende Gerade ziehen lasse. Sie entwickelten auf diese Art durch elementar-geometrische Betrachtungen nach Euclid's Vorbild eine in sich einwandfreie Geometrie, die allerdings zu anderen Sätzen, wie die Euclidische Geometrie führt.

Die betreffenden Werke Lobatschefskij's sind: *Exposition des principes de la géométrie* etc., der Universität Kasan überreicht 1826, aber ungedruckt; *Ueber die Anfangsgründe der Geometrie*. Kasaner Bote 1829, 30; *Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen, Acten der Universität Kasan*, 1835—1838 (eine deutsche Uebersetzung dieser drei Arbeiten mit eingehender Würdigung und werthvollen Anmerkungen von Engel ist bei Teubner erschienen, Leipzig 1899); *Géométrie imaginaire*, *Crelle*, 17; *Geom. Unters.*, Berlin 1840; *Pangéométrie*, Kasan 1855 (italienische Uebersetzung von

Battaglini, *Giorn. di Batt.*, 5, p. 273). Das Werk Johann Bolyai's führt den Titel: *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* etc. und erschien als Anhang zu dem Buch Wolfgang Bolyai's *Tentamen* etc. (vergl. das Namenverzeichniss), 1832; deutsch frei bearb. von J. Frischauf, 1872; ital. von Battaglini, *Giorn. di Batt.*, 6; franz. von Houël, 2. éd., Paris 1895.

Die Theorie, die sich auf diese Art ausbildete, wurde *absolute Geometrie, imaginäre Geometrie, abstracte Geometrie, Pangeometrie, Metageometrie* oder auch weniger treffend *nicht-Euclidische Geometrie* genannt.

Man kann nun einerseits nach denjenigen geometrischen Sätzen fragen, die unabhängig vom fünften Postulat sind, andererseits eine Geometrie aufbauen, die alle Euclidischen Voraussetzungen enthält, nur an Stelle des fünften Postulats eine andere diesem widersprechende Voraussetzung hat.

Wir bemerken noch, dass Lobatschefskij und J. Bolyai, da sie sich stets an das Postulat der *unendlich grossen* Geraden hielten, nur zu der sogenannten hyperbolischen Geometrie (siehe § 2) kamen, einer einzigen der beiden nicht-Euclidischen Theorien, die sich der Euclidischen gleichberechtigt zur Seite stellen.

In den Formeln der absoluten Geometrie tritt eine unbestimmte Constante auf, deren Werth den Raum, in dem wir uns die geometrischen Gebilde vorstellen, ebenso kennzeichnet, wie eine Fläche constanten Krümmungsmasses in unserem Euclidischen Raum durch den Werth des Krümmungsmasses charakterisirt wird. *Der Werth dieser unbestimmten Constanten kann nur durch die Erfahrung geliefert werden.*

Auf solche Art erscheint das Euclidische Postulat oder ein anderes ihm ähnliches lediglich als *ein Datum der Erfahrung, welches sich innerhalb der Grenzen unserer Beobachtungen als mit der Wirklichkeit übereinstimmend erweist.*

Zum vollen Verständniss und der Begründung der neuen Wissenschaft trugen in zwei verschiedenen Richtungen die Ideen Riemann's in seiner Habilitationsrede (siehe Kap. 20) und diejenigen Cayley's, *Phil. Trans.*, 1859 über die Art, die metrischen Eigenschaften der Figuren *projectiv* zu definiren, wesentlich bei. Durch Riemann wurde darauf hingewiesen, dass es auch eine Geometrie der geschlossenen Geraden geben könne; ferner aber lehrte er den Raum als Mannigfaltigkeit constanten Krümmungsmasses auffassen. Auf den Zusammenhang mit den Flächen constanter Krümmung der Euclidischen Geometrie wies zuerst Beltrami hin. Jedem Satz über Flächen constanten negativen Krümmungsmasses im Euklidischen Raum entspricht ein Satz der hyperbolischen Geometrie und umgekehrt, Beltrami, *Saggio d'interpretazione della Geometria non-euclidea*, *Giorn. di Batt.*, 6, 1868; *Ann. di mat.*, (2), 2 (Siehe § 5). Klein, *Math. Ann.*, 4, 6 hat auf die Beziehungen zwischen den Untersuchungen Cayley's und den Begriffen der absoluten Geometrie aufmerksam gemacht. Erst in Folge der Herstellung dieses Zusammenhangs gelang der strenge Beweis für die Unmöglichkeit, das Postulat V logisch aus den übrigen Voraussetzungen, die der Geometrie zu Grunde liegen, abzuleiten; diese Unmöglichkeit haben Lobatschefskij und J. Bolyai im Grund ohne Beweis als bestehend angenommen.

Besonders hervorzuheben sind noch die Untersuchungen von Helmholtz, *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, *Gött. Nachr.*, 1868 oder *Wissensch. Abh.*, 2, p. 618. Durch Riemann und Helmholtz wurde das (von Lie) sogenannte *Riemann-Helmholtz'sche Raumproblem* geschaffen, welches Lie im 3. Bd. seiner *Theorie der Transformationsgruppen* sehr eingehend behandelt hat.

Andere specielle Arbeiten über die absolute Geometrie sind von Cayley, *Math. Ann.*, 5; Story, *Amer. Journ.*, 4, 5; Simon, *Crelle*, 109, welche die trigonometrischen Formeln erweiterten; Battaglini, *Giorn. di Batt.*, 12, 16; D'Ovidio, *Mem. Acc. Lincei*, 1875, 1876; *Atti Acc. Torino*, 1891—1893; etc.

Von den hervorragendsten Darstellungen der nicht-Euclidischen Geometrie citiren wir Frischauf: 1) *absolute Geometrie nach Joh. Bolyai;* 2) *Elemente der absoluten Geometrie;* 3) *Elemente der Geometrie*, 2. Aufl., Leipzig 1872, 1876, 1877; Killing, *die nicht-Euclidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig 1885; Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie;* Bd. 1 und 2, Paderborn 1893, 1898; Mansion, *Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l'astronomie*, Paris 1893; *Mathesis* 1895, wozu noch die *autographirten Vorlesungshefte*, *Hft. 6*, *Nicht-Euclidische Geometrie W.-S.* 1889/90 *und S.-S.* 1890 von Klein hinzuzufügen sind.

Weitere Originalarbeiten über die nicht-Euclidische Geometrie verdankt man De Tilly, *Recherches sur les éléments de Géométrie*, Bruxelles 1860; *Essai sur les principes fond. etc.*, *Mém. de Bordeaux*, (2), 3, 1877; *Essai de géom. anal. génér.*, *Mém. de Belg.*, 1892 und Flye S. Marie, *Études anal.* etc., Paris 1871.

Von allgemeinerer Natur ist der Gegenstand, mit dem sich die *Grundzüge der Geometrie* von Veronese und die übrigen in Kap. 19, § 1 citirten Werke beschäftigen; der Anhang am

Ende des Veronese'schen Buchs enthält ausgedehnte und eingehende historisch-kritische Notizen über das vorliegende Thema; vergl. auch einen Artikel von Mansion in der *Revue des Quest. scient.*, 1895, in welchem über die De Tilly'schen Arbeiten berichtet wird.

§ 2. Das Postulat V Euclid's. Die vor Lobatschefskij und Bolyai erhaltenen Resultate. Die drei Geometrien von elementarem Standpunkt.

Das Postulat V Euclid's lautet:

Es soll gefordert werden, dass, wenn eine Gerade zwei Gerade trifft, und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, einander zuletzt auf derselben Seite treffen, auf welcher die Winkel liegen, die kleiner als zwei Rechte sind (Fassung der στοιχεῖα).

Wir geben noch die übrigen Postulate Euclid's an*):

Post. I. *Zwei gegebene Punkte lassen sich immer durch eine Gerade verbinden.*

Post. II. *Eine Gerade kann verlängert werden.*

Post. III. *Um ein gegebenes beliebiges Centrum und mit einem gegebenen beliebigen Radius lässt sich immer ein Kreis beschreiben.*

Post. IV. *Alle rechten Winkel sind einander gleich.*

Post. VI. *Zwei Gerade schliessen keinen endlichen Raum zwischen sich ein.*

Die drei ersten sind *Constructionspostulate.*

Das vierte Euclidische Postulat ist, wie Hilbert in seinen *Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen,* 1. Thl., Leipzig 1899, p. 16 gezeigt hat, ein beweisbarer Lehrsatz, der von Euklid mit Unrecht unter die Postulate gestellt wurde.

Die Anstrengungen, die man machte, das Postulat V zu beweisen, führten dazu, an seine Stelle andere Postulate zu setzen.

Wallis hat im Jahr 1693 zwei seiner Vorlesungen über

*) Wir haben diesen Postulaten die Nummern beigelegt, die sie gewöhnlich in den Euclid-Ausgaben erhalten; siehe z. B. die wichtige von Heiberg, 1883—88 besorgte Ausgabe. Kritische Notizen über die Postulate findet man bei P. Tannery, *Bull. de Darboux*, (2), 5, 8. Vergl. auch einen Artikel von Mansion, *Soc. scient. de Bruxelles*, 14, 1889, 1890, ferner die Besprechung von Lindemann, auf die schon verwiesen wurde.

Parallelentheorie im zweiten Band seiner Werke p. 665—678 veröffentlicht. Er ersetzt die fünfte Forderung Euclid's durch die andere (vergl. Stäckel-Engel):

Es existiren ähnliche Dreiecke.

Dieses Postulat ist übrigens zu weitgehend; Saccheri hat statt seiner das folgende angegeben:

Es existiren zwei gleichwinklige und nicht congruente Dreiecke.

Ein anderes Postulat, das dem Euclidischen substituirt werden kann, lautet:

a) *Von einem Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich nur eine einzige Parallele zu ihr ziehen;* dies entspricht der Annahme, *dass auf der Geraden nur ein einziger Punkt im Unendlichen existirt.*

Dem Euclidischen Postulat gleichwerthig sind auch die Propositionen:

b) *Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist zwei Rechten gleich.*

c) *In einem Vierseit, in welchem zwei Winkel Rechte sind, und die den rechten Winkeln anliegenden beiden Gegenseiten gleich sind, müssen die beiden anderen Winkel Rechte sein;* von Saccheri angenommene Forderung.

d) *In einem Vierseit mit drei rechten Winkeln ist der vierte Winkel ein Rechter;* von Lambert adoptirtes Postulat, das sich von dem vorhergehenden nur wenig unterscheidet.

Die Hypothesen, nach welchen diese Winkel, die Saccheri und Lambert benutzen, *stumpf* oder *spitz* sind, wollen wir der Kürze wegen die *Hypothese des stumpfen Winkels* und die *des spitzen Winkels* nennen.

Unabhängig von der Annahme eines dieser Postulate gelten die folgenden Sätze:

Wenn man die Existenz eines einzigen Dreiecks zugibt, für welches die Summe der Winkel zwei Rechte beträgt, so gilt dasselbe für jedes andere Dreieck. Gewöhnlich Satz von Legendre genannt, findet sich aber schon bei Saccheri.

Nimmt man an, die Gerade erstrecke sich ins Unendliche, so kann die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht grösser, als zwei Rechte sein. Legendre.

Dabei ist die Hypothese des stumpfen Winkels Saccheri's oder Lambert's nicht zulässig.

Wenn das Postulat Saccheri's oder Lambert's in einem Fall gilt, so ist es immer richtig.

Wenn die Hypothese des spitzen oder stumpfen Winkels von Saccheri oder Lambert in einem Fall zutrifft, so ist sie immer gültig.

Je nachdem die Summe der drei Winkel eines Dreiecks kleiner, ebenso gross oder grösser als zwei Rechte ist, trifft die Hypothese des spitzen Winkels, des rechten oder des stumpfen Winkels zu. Saccheri.

Bei Annahme der Hypothese, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks kleiner als zwei Rechte sei, schneiden sich zwei Gerade entweder, oder verhalten sich wie Asymptoten zueinander (nähern sich unbegrenzt, ohne sich jemals zu treffen) oder haben ein Loth gemeinschaftlich, von welchem aus gerechnet sie divergiren. Theorem von Saccheri.

Gilt dieselbe Hypothese, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks dem Winkeldefect proportional, wenn man diesen Namen der Differenz zwischen zwei Rechten und der Summe der drei Winkel gibt. Theorem von Lambert.

Gibt man zu, es könne durch einen Punkt, der im Innern des Winkels eines Dreiecks liegt, eine Gerade gezogen werden, welche die beiden Schenkel schneidet, so folgt, dass die Summe der drei Winkel nicht weniger als zwei Rechte beträgt. Legendre; siehe auch Baltzer, *Leipz. Ber.*, 1870, *Crelle*, 73, p. 372.

Durch die vorstehenden Theoreme ist die Theilung der allgemeinen Geometrie in drei Hauptspecies klar vorgezeichnet:

I. *Die sogenannte Lobatschefskij'sche oder hyperbolische Geometrie.* Die Gerade ist unendlich lang und nicht geschlossen.

Das Postulat V gilt nicht, dagegen gilt Postulat VI.

Die Summe der Dreieckswinkel ist kleiner als zwei Rechte.

Diese Geometrie entspricht der Hypothese des spitzen Winkels Saccheri's oder Lambert's.

Von einem Punkt aus können *zwei* Parallele zu einer gegebenen Geraden (unendlichviele, die gegebene Gerade nicht schneidende Gerade, deren Grenzlagen die zwei Parallelen bilden) gezogen werden. In dieser Geometrie denkt man sich, die Gerade habe *zwei* unendlich ferne Punkte.

Nennt man, wie gewöhnlich, a, b, c die Seiten und A, B, C die Winkel des Dreiecks, so gelten die folgenden trigonometrischen Relationen:

$$\sin\frac{b}{R}\sin C = \sin\frac{c}{R}\sin B, \quad \text{das Sinustheorem,}$$

$$\cos\frac{c}{R}\cos A + \sin\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}\cos C = \sin\frac{b}{R}\cos\frac{a}{R},$$

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A, \text{ das Cosinustheorem,}$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos\frac{a}{R},$$

$$\sin C \sin A = \sin B \cos\frac{a}{R} - \cos C \sin A \cos\frac{b}{R};$$

darin ist R eine constante und *rein imaginäre* Grösse; man könnte mithin in diesen Formeln auf die gewohnte Art die Kreisfunctionen durch hyperbolische ersetzen.

Die dritte Relation wurde 1826 von Taurinus veröffentlicht, der sich fast zu derselben Zeit, wie Lobatschefskij und J. Bolyai mit den Principien der Geometrie beschäftigte, Staeckel-Engel, l. c.

Lambert hatte schon 1766 die Vermuthung geäussert, dass die aus einer solchen Hypothese, d. h. der Hypothese des spitzen Winkels, abgeleitete Geometrie sich auf einer *Kugel von imaginärem Radius* interpretiren lasse; die vorstehenden trigonometrischen Formeln zeigen, dass dieser Zusammenhang in der That besteht.

In der Lobatschefskij'schen Geometrie besitzen die Curven, deren Punkte gleichen Abstand von einer festen Geraden haben, *(die Curven gleichen Abstands)* die Eigenschaften:

1. *Ihre Normalen stehen sämmtlich senkrecht auf der Geraden und umgekehrt.*
2. *Jede Gerade, welche die Curve in zwei Punkten schneidet, bildet in diesen Punkten gleiche Winkel mit der Curve.*
3. *Die beiden von einem Punkt an die Curve gezogenen Tangenten haben gleiche Länge.*

Eine Curve, welche die Eigenschaften 2 und 3 hat, und überdies dadurch ausgezeichnet ist, dass ihre Normalen sämmtlich parallel sind, heisst *eine Grenzlinie* oder *ein Oricyclus Lobatschefskij's.*

Sie ist ein Grenzfall der Linie gleichen Abstands und zugleich auch des Kreises.

Sie ist einem Kreis vergleichbar, dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

Auf ähnliche Art erhält man im hyperbolischen Raum von drei Dimensionen die *Grenzfläche* (*Orisphära*) *Lobatschefskij's;* diese Flächen entsprechen denen, die Johann Bolyai mit F bezeichnete.

II. *Die Euclidische oder parabolische Geometrie.* Die Gerade ist unendlich lang, aber geschlossen.

Es gelten die Postulate V und VI.

Die Summe der Dreieckswinkel beträgt zwei Rechte.

Diese Geometrie entspricht der Hypothese vom rechten Winkel Saccheri's oder Lambert's.

Von einem Punkt aus kann *nur eine einzige* Parallele zu einer gegebenen Geraden gezogen werden. Die Gerade hat *einen einzigen* Punkt im Unendlichen.

Die oben angegebenen trigonometrischen Formeln behalten ihre Gültigkeit, wenn $\frac{1}{R} = 0$, d. h. $R = \infty$, vorausgesetzt und mithin

$$a \text{ an die Stelle von } R \sin \frac{a}{R} \text{ und}$$
$$1 \text{ „ „ „ „ } \cos \frac{a}{R}$$

gesetzt wird.

III. *Die sogenannte Riemann'sche oder elliptische Geometrie.* Die Gerade ist geschlossen und hat endliche Länge.

Es gilt weder das Postulat V noch das Postulat VI.

Die Summe der Dreieckswinkel ist grösser als zwei Rechte.

Diese Geometrie entspricht der Hypothese vom stumpfen Winkel Saccheri's oder Lambert's.

Von einem Punkt aus kann keine Parallele zu einer Geraden gezogen werden; die Gerade hat keinen unendlich fernen Punkt.

Die trigonometrischen Formeln bleiben dieselben, wie vorher; nur muss in ihnen R als eine wesentlich reelle positive Grösse vorausgesetzt werden.

Bei dieser Geometrie lassen sich, wie zuerst Klein gezeigt hat, auf die folgende Art zwei Fälle unterscheiden:

Aus den trigonometrischen Formeln ergibt sich, dass zwei Gerade, die sich in einem Punkt schneiden, sich in dem Abstand $R\pi$ von diesem Punkt zum zweiten Mal treffen, und dass man überdies, von einem Punkt aus auf einer Geraden fortschreitend, nach einem Weg, der *höchstens* die Länge $2R\pi$ hat, unter allen Umständen wieder zu dem Ausgangspunkt zurückkehrt. Auf Grund dieser Principien sind dann zwei Hypothesen möglich, nämlich:

a) Dass man, eine Gerade durchschreitend, zum ersten Mal wieder nach dem Ausgangspunkt zurückkommt, nachdem man einen Weg zurückgelegt hat, dessen Länge nur $R\pi$ beträgt; alsdann ist der zweite Punkt, in dem sich zwei Gerade treffen, derselbe, wie der erste; es besteht mithin der Satz: *Zwei Gerade schneiden sich in einem einzigen Punkt und durch zwei Punkte geht nur eine Gerade. Die Länge der Geraden ist $R\pi$.* Die aus dieser Hypothese abgeleitete Geometrie kann die *einfache Riemann'sche* oder die *einfach elliptische Geometrie* genannt werden. Klein.

In dieser Geometrie ist der grösste Abstand zweier Punkte $\frac{1}{2}R\pi$; wenn ein Punkt gegeben ist, bilden alle Punkte, die um $\frac{1}{2}R\pi$ von ihm abstehen, eine Gerade.

Die Ebene wird in dieser Geometrie durch eine ihrer Geraden nicht in zwei Theile zerlegt.

b) Dass man, eine Gerade durchschreitend, zum ersten Mal wieder nach einem Weg $2R\pi$ zu dem Ausgangspunkt zurückkehrt; *alsdann schneiden sich zwei Gerade immer in zwei Punkten und es gibt Paare von Punkten, durch welche unendlich viele Gerade gehen.*

Die Länge einer jeden Geraden ist $2R\pi$; die aus dieser zweiten Hypothese abgeleitete Geometrie heisst die *doppelte Riemann'sche* oder *elliptische Geometrie.* Klein.

Der grösste Abstand zweier Punkte ist $R\pi$ und, wenn ein Punkt gegeben ist, so gibt es nur einen Punkt, der von ihm um $R\pi$ absteht.

Es existirt immer ein zweien gegebenen Geraden gemeinschaftliches Loth.

Die Ebene wird durch jede ihrer Geraden oder allgemein durch jede ihrer geschlossenen Linien zerlegt.

Jeder Kreis hat zwei Mittelpunkte.

Dieser specielle Fall der Riemann'schen Geometrie entspricht der sphärischen Geometrie und lässt sich auf einer Kugel interpretiren.

Wird die elliptische Geometrie auf einer Fläche von constanter positiver Krümmung interpretirt, so steht die Unterscheidung zweier Arten dieser Geometrie in Beziehung zu den beiden Hypothesen der *Zweiseitigkeit* bez. *Einseitigkeit* dieser Fläche. Vergl. Kap. 18, § 1, S. 556, 557.

Die Zweitheilung der Riemann'schen Geometrie entging einigen Autoren, wie z. B. Beltrami; sie wurde von Klein entdeckt, *Math. Ann.*, 4, p. 604, Anm. und 6, p. 125. Siehe auch Newcomb, *Crelle*, 83 und Killing, l. c.; der letztere Autor nennt den *einfach elliptischen Raum* die *Polarform des Riemann'schen Raums.* Man kann auch Heft 1, p. 243, 293 der oben citirten Klein'schen *autograph. Vorlesunghefte* vergleichen.

Zum Schluss unserer Betrachtungen wollen wir noch bemerken, dass De Tilly in seinen in dem vorigen Paragraphen citirten Arbeiten, speciell in der vom Jahr 1893, die drei Geometrien auf den Begriff des Abstands allein gründete, indem er nur ihn als primitiv ansah und die Winkel ausschloss. Schon Fourier hatte die Idee gehabt, den Abstand der ganzen Euclidischen Geometrie zu Grund zu legen; siehe die Stelle von Fourier, die in der *Mathesis,* 9, 1889, p. 139—141 reproducirt wird. De Tilly benutzte zur Kennzeichnung der drei Geometrien die Beziehung zwischen den Abständen von 4 Punkten in der Ebene und zwischen den Abständen von 5 Punkten im Raum, auf welche Lagrange hingewiesen hatte, und die von Cayley studirt und später von Schering auf die nicht-Euclidischen Räume ausgedehnt wurden; vergl. S. 20 und 34 und die Citate auf S. 35; der letztere Autor baute auf diese Beziehungen die Fundamente der drei Geometrien auf. Aus denselben Principien folgerte er auch einen Beweis für die Unmöglichkeit, das Euclidische Postulat *logisch* abzuleiten, welche die ersten Schriftsteller Bolyai und Lobatschefskij, die sich mit der absoluten Geometrie beschäftigten, noch nicht nachzuweisen vermochten, die sich aber schon als Folge aus den Arbeiten von Riemann, Helmholtz, Beltrami und Klein ergab. Ueberdies gab Schering einen kurz gefassten Beweis des Satzes, *dass ausser dem Euclidischen und den beiden nicht-Euclidischen kein anderes geometrisches System existirt.* Eine kritische Besprechung der De Tilly'schen Arbeiten findet man auf S. 665 u. ff. der deutschen Uebersetzung des Veronese'schen Buchs und in Bd. III von Lie's Transformationsgruppen.

§ 3. Die gewöhnlichen metrischen Relationen in projectiver Form.

Vorerst bemerken wir, dass die gewöhnlichen metrischen Beziehungen sich in projective Form bringen lassen, wenn in der Ebene die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte und in dem Raum der unendlich ferne imaginäre Kreis (der Kugelkreis) zu Hülfe genommen werden. Vergl. S. 83 und 105.

Es seien x_1, x_2, x_3; $x_1', x_2'\ x_3'$ die homogenen Coordinaten zweier Punkte P, P' und ξ_1, ξ_2, ξ_3; ξ_1', ξ_2', ξ_3' die der beiden Kreispunkte der Ebene (vergl. S. 28; diese unendlich fernen Kreispunkte haben die Coordinaten $1, i, 0$ bez. $1, -i, 0$); *der Abstand der beiden Punkte wird dann durch die Formel*

$$r = R\,\frac{\sqrt{(x x' \xi)(x x' \xi')}}{(x \xi \xi')(x' \xi \xi')}$$

ausgedrückt, in welcher R eine von der Masseinheit abhängige Constante bezeichnet. Dabei bedeutet $(x\,x'\,\xi)$ *die Determinante*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn man die Masseinheit einführt und sich denkt, die Punkte a', a stehen um die Einheit von einander ab, *so wird der projective Ausdruck für r:*

$$r = \frac{\sqrt{(x x' \xi)(x x' \xi')(a \xi \xi')(a' \xi \xi')}}{\sqrt{(a a' \xi)(a a' \xi')(x \xi \xi')(x' \xi \xi')}}.$$

Wir gehen nun zu dem *Winkel* zweier Geraden über:

Es seien $u_x = 0$, $u_x' = 0$ die auf homogene Coordinaten bezogenen Gleichungen zweier Geraden in der Ebene; *der Winkel* ω *zwischen ihnen ist durch die folgenden projectiven Formeln gegeben:*

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\,\frac{u_\xi u'_{\xi'} + u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi u'_{\xi'}}},$$

$$\sin\omega = \frac{i}{2}\,\frac{u_\xi u'_{\xi'} - u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi u'_{\xi'}}}.$$

Dabei ist das *Laguerre'sche Theorem, Nouv. Ann.*, 12, 1853, p. 64 zu erwähnen; vergl. S. 28:

Der Winkel ω *wird durch*

$$\omega = \frac{i}{2}\log\frac{u_\xi \cdot u'_{\xi'}}{u_{\xi'} \cdot u'_\xi}$$

bestimmt, d. h. ω *ist gleich* $\frac{i}{2}$, *multiplicirt mit dem Logarithmus des anharmonischen Verhältnisses des Quadrupels, welches aus den beiden gegebenen Geraden und den nach den zwei Kreispunkten gezogenen Geraden gebildet ist.*

Um analoge Formeln im Raum zu erhalten, muss der unendlich ferne imaginäre Kreis in die Betrachtung eingezogen werden.

Man habe den Abstand der Punkte zu untersuchen, deren homogene Coordinaten

$$x_1, x_2, x_3, x_4; \; x_1', x_2', x_3', x_4'$$

sind.

Wir bilden den *Kegel 2^{ten} Grads,* der von dem Punkt

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

des Raums aus den unendlich fernen imaginären Kreis projicirt, und $F(X, y) = 0$ sei die Gleichung dieses Kegels, worin die X die laufenden Coordinaten sind; es sei ferner $T(X) = 0$ die Gleichung der Ebene, welche durch denselben unendlich fernen imaginären Kreis geht; *der Abstand der beiden Punkte im Raum wird dann durch die Formel*

$$r = R \frac{\sqrt{F(x, x')}}{T(x)\, T(x')}$$

ausgedrückt, worin, wie oben, R eine von der Masseinheit abhängige Constante bedeutet, welche sich so, wie früher, bestimmen lässt.

Man habe ferner zwei von einem Punkt (y) ausgehende Gerade; auf der einen liege der Punkt (x), auf der anderen der Punkt (x'); man bezeichne mit $F_{x'}$ die Polare von F mit dem Pol (x') in Bezug auf die Variabeln (x) und mit $\Phi_{x'}(x, y) = 0$ die Gleichung der durch den Punkt (x') an den Kegel mit der Spitze (y) gelegten Berührungsebene.

Der Winkel der beiden Geraden ist dann durch die Formeln

$$\cos \omega = \frac{F_{x'}(x, y)}{\sqrt{F(x, y)\, F(x', y)}},$$

$$\sin \omega = i \frac{\sqrt{\Phi_{x'}(x, y)}}{\sqrt{F(x, y)\, F(x', y)}}$$

gegeben und zwischen F und Φ besteht die Beziehung:

$$\Phi_{x'}(x, y) = F_{x'}^2(x, y) - F(x, y)\, F(x' y).$$

Der zwischen zwei Ebenen enthaltene Winkel ist das Product von $\frac{i}{2}$ mit dem Logarithmus des Doppelverhältnisses des Quadrupels, welches aus den beiden gegebenen und den zwei Ebenen besteht, die durch die Schnittlinie der ersteren gehen und den unendlich fernen imaginären Kreis berühren.

Betrachtet man den unendlich fernen imaginären Kreis als eine degenerirte Enveloppenfläche 2^{ten} Grads, *so sind die drei Hauptaxen einer beliebigen Fläche 2^{ten} Grads drei Kanten des Tetraeders, das in Bezug auf die gegebene Fläche 2^{ten} Grads und die durch den unendlich fernen imaginären Kreis dargestellte degenerirte Fläche 2^{ten} Grads sich selbst conjugirt ist.* Vergl. S. 103—124.

Confocal (S. 120) *sind die Flächen 2^{ter} Ordnung, die in die nämliche abwickelbare und den unendlich fernen imaginären Kreis enthaltende Fläche eingeschrieben sind.*

§ 4. Das absolute Gebilde Cayley's. Die projective Metrik. Projective Interpretation der drei Geometrien.

Es soll jetzt die tiefgreifende Idee besprochen werden, die von Cayley in dem 6^{ten} Memoir über die Theorie der algebraischen binären und ternären Formen, *Phil. Trans.*, 1859 angeregt und später von Klein, *Math. Ann.*, 4, 6 auf elegante Art zur projectiven Interpretation der nicht-Euclidischen Geometrie nutzbar gemacht wurde.

Gebilde 1^{ter} Stufe. Wir beginnen mit den Gebilden 1^{ter} Stufe, d. h. von nur einer Dimension.

Wir denken uns auf der Geraden ein *Paar* von Punkten festgesetzt, welches wir das *absolute Gebilde der Geraden* nennen wollen. Wenn x_1, x_2 die laufenden homogenen Coordinaten eines Punkts der Geraden sind, so wird das Paar Punkte durch eine in x_1, x_2 quadratische binäre Form

$$\sum_{i=1}^{i=2}\sum_{k=1}^{k=2} a_{ik}\, x_i x_k = 0$$

dargestellt, deren linke Seite wir mit Σ_{xx} bezeichnen; auf dieses absolute Gebilde beziehen wir die metrischen Verhältnisse zwischen den Punkten der Geraden.

Sind zwei Punkte x, x' gegeben und werden die Punkte des *absoluten Gebildes* ξ, ξ' genannt, so bilden wir das Doppelverhältniss

$$D = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x'\xi)}$$

und nennen *Abstand* der beiden Punkte x, x' den Ausdruck

$$r = R \log D,$$

worin R eine beliebige Constante bedeutet.

Bezeichnet man mit $\sum_{xx'}$ *die Polare von* $\sum_{xx}$ *für den Pol* x', *also* $\sum_{i=1}^{i=2}\sum_{k=1}^{k=2} \alpha_{ik} x_i x'_k$, *so ist*

$$r = R \log \frac{\sum_{xx'} + \sqrt{\sum_{xx'}^2 - \sum_{xx}\sum_{x'x'}}}{\sum_{xx'} - \sqrt{\sum_{xx'}^2 - \sum_{xx}\sum_{x'x'}}}.$$

Der Abstand r genügt der Fundamentalrelation (der thatsächlich die Abstände auf einer Geraden in dem gewöhnlichen Sinn des Worts genügen):

$$r_{12} + r_{23} + r_{31} = 0,$$

wenn mit r_{ij} *der Abstand zwischen den Punkten i und j bezeichnet wird.*

Es lassen sich nun die drei Fälle unterscheiden:

I. Die beiden Punkte ξ, ξ' des absoluten Gebildes, das der Massbestimmung zu Grund liegt, sind verschieden (d. h. die Discriminante von Σ verschwindet nicht) und conjugirt imaginär. In diesem Fall ergibt sich die *elliptische Geometrie* auf der Geraden.

II. Die beiden Punkte ξ, ξ' fallen zusammen. Man erhält die *parabolische Geometrie.*

III. Die beiden Punkte ξ, ξ' sind reell. Es folgt die *hyperbolische Geometrie.*

In der hyperbolischen Geometrie haben die beiden Punkte ξ, ξ' *unendlich grossen Abstand von jedem beliebigen anderen Punkt und die Gerade hat zwei Punkte im Unendlichen.*

Die Definition des Abstands r ergibt im Fall der *parabolischen* Geometrie für r immer Null, wenn R von Unendlich verschieden ist, und wird unbestimmt, wenn man R gegen Unendlich convergiren lässt.

Man setzt in dem letzten Fall $\xi_1' = \xi_1 + \varepsilon\zeta_1$, $\xi_2' = \xi_2 + \varepsilon\zeta_2$ und $\frac{R}{\varepsilon}$ an Stelle von R und definirt den Abstand als Grenze, nämlich

$$r = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \frac{R}{\varepsilon} \log D \right\}.$$

In der parabolischen Geometrie ist nur der Punkt ξ *unendlich ferner Punkt, d. h. er hat unendlich grossen Abstand von jedem beliebigen anderen Punkt; der Abstand r zweier Punkte wird als die Differenz zweier Doppelverhältnisse*

$$r = \frac{(x'O)(E\xi)}{(x'\xi)(EO)} - \frac{(xO)(E\xi)}{(x\xi)(EO)}$$

ausgedrückt, worin O den Anfangspunkt auf der Geraden und E den Einheitspunkt bezeichnet.

In der elliptischen Geometrie ist die Länge der Geraden endlich und gleich $2R\pi$.

Gebilde 2ter Stufe. Wir denken uns in der Ebene einen Kegelschnitt, dessen Gleichung $\Sigma_{xx} = 0$ laute, und nennen ihn *das absolute Gebilde der Ebene.* Seine Gleichung in Liniencoordinaten sei $S_{uu} = 0$.

Jede Gerade der Ebene schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten, die entweder reell oder conjugirt imaginär sind oder zusammenfallen; diese Punkte sind die *Fundamentalpunkte* für die *Geometrie auf dieser Geraden der Ebene.*

Von jedem Punkt der Ebene aus kann man zwei Tangenten an den absoluten Kegelschnitt ziehen; diese beiden Geraden sind die *Fundamentalgeraden* für die *Geometrie des von diesem Punkt ausgehenden Strahlenbüschels.*

Als *Abstand zweier Punkte* (x), (x') definiren wir den Ausdruck

$$r = R \log \frac{\sum_{xx'} + \sqrt{\sum_{xx'}^2 - \sum_{xx} \sum_{x'x'}}}{\sum_{xx'} - \sqrt{\sum_{xx'}^2 - \sum_{xx} \sum_{x'x'}}},$$

und als den *Winkel zweier Geraden* (u), (u') den Ausdruck

$$\omega = R' \log \frac{S_{uu'} + \sqrt{S_{uu'}^2 - S_{uu} S_{u'u'}}}{S_{uu'} - \sqrt{S_{uu'}^2 - S_{uu} S_{u'u'}}}.$$

Der absolute Kegelschnitt ist der Ort der Punkte der Ebene, die unendlich grossen Abstand von einem gegebenen Punkt haben.

Der Ort der Punkte der Ebene, die constanten Abstand von einem festen Punkt (x) *haben, ist ein Kegelschnitt, welcher den absoluten Kegelschnitt in den beiden Punkten berührt, in welchen dieser von der Polaren von* (x) *geschnitten wird.*

Und correlativ:

Die Geraden, welche mit einer gegebenen Geraden (u) *denselben Winkel bilden, hüllen einen Kegelschnitt ein, der den absoluten Kegelschnitt in den beiden Schnittpunkten des letzteren mit* (u) *berührt.*

Die Geraden, die sich auf dem absoluten Kegelschnitt schneiden, bilden den Winkel Null miteinander und sind daher ’s parallel anzusehen.

Mithin:

Im Allgemeinen lassen sich von jedem Punkt zwei (reelle, imaginäre, zusammenfallende) Parallelen zu einer gegebenen Geraden ziehen.

Nimmt man an, der Kegelschnitt Σ sei *imaginär* und setzt $R = iR_1$ und $R' = iR_1'$, *so ist die Länge jeder reellen Geraden der Ebene endlich und gleich* $2R_1\pi$ *und die Summe der Winkel in einem Strahlenbüschel* $2R_1'\pi$. *Setzt man dann noch* $R_1' = \frac{1}{2}$, so erhält man die *Riemann'sche oder elliptische Geometrie.* Vergl. § 2.

Nimmt man dagegen an, der Kegelschnitt Σ sei *reell* und setzt wieder $R = iR_1$, $R' = iR_1'$ und $R_1' = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich die *Lobatschefskij'sche oder hyperbolische Geometrie.*

Wird schliesslich vorausgesetzt, der Kegelschnitt sei degenerirt und reducire sich als Enveloppe auf ein Punktepaar, so kommt man zu der *parabolischen Geometrie im weiteren Sinn,* welche sich auf die *Euclidische Geometrie* reducirt, wenn diese Punkte die *(conjugirt imaginären) Kreispunkte* sind.

Hat man diese Principien für die Gebilde 2^{ter} Stufe aufgestellt, so bietet ihre Erweiterung auf die Gebilde 3^{ter} Stufe, speciell auf den gewöhnlichen Raum keine weitere Schwierigkeit dar. In dem letzteren ist *das absolute Gebilde eine Fläche 2^{ter} Ordnung.* Je nachdem diese Fläche 2^{ter} Ordnung imaginär oder reell aber mit nicht reellen Erzeugenden oder (als Enveloppe) in einen ebenen Kegelschnitt und speciell den imaginären Kugelkreis degenerirt ist, erhält man *die drei Geometrien, die elliptische, hyperbolische und parabolische* des § 2.

§ 5. Beltrami's Darstellung der nicht-Euclidischen Geometrie auf Mannigfaltigkeiten der Euclidischen Räume.

Die Lobatschefskij'sche Geometrie fällt mit der Geometrie in einem Raum constanter Riemann'scher negativer Krümmung zusammen, vergl. Kap. 20; *es genügt, an die Stelle der Geraden die geodätischen Linien zu substituiren.*

Daher deckt sich ins Besondere die *ebene Lobatschefskij'sche oder hyperbolische Geometrie* mit der Geometrie auf einer Fläche von constanter negativer Krümmung in unserem gewöhnlichen Raum, vergl. Kap. 16, § 11, S. 496; aus diesem Grund wird die ebene Lobatschefskij'sche auch *pseudosphärische Geometrie* genannt.

Wie schon in § 2 gesagt wurde, hatte Lambert bereits im Jahr 1766 bemerkt, dass die aus der sogenannten *Hypo-*

these des spitzen Winkels abgeleitete Geometrie sich auf einer Kugel mit imaginärem Radius interpretiren lasse; weiter hatte dann Minding, *Crelle*, 19, 1839; 20, 1840 gezeigt, dass die trigonometrischen Formeln in Bezug auf die pseudosphärischen Dreiecke sich aus den Formeln für die sphärischen Dreiecke ergeben, wenn man R durch $R\sqrt{-1}$ ersetzt (vergl. S. 495); später hatte sich Codazzi, *Ann. di Tortolini*, 1857 mit demselben Gegenstand beschäftigt; es war jedoch Beltrami, *Giorn. di Batt.*, 4, 1868, der zuerst die wahre Bedeutung dieser Beziehungen auf elegante Art nachwies. In einer späteren Arbeit, *Ann. di mat.*, (2), 2, p. 261, dehnte Beltrami die Betrachtungen, die er vorher nur für die Ebene angestellt hatte, auch auf die Räume von drei Dimensionen aus.

Die Constante R, welche in die Formeln der Lobatschefskij-schen Geometrie eingeht (siehe § 2), *ist so nichts Anderes, als die Quadratwurzel aus dem reciproken Werth der Krümmung jenes gekrümmten Raums, in dem sich diese Geometrie interpretiren lässt.*

Was die ebene *Riemann'sche* oder *elliptische* Geometrie angeht, so zerfällt sie, wie wir schon in § 2 bemerkt haben, in zwei Unterabtheilungen, von denen *nur eine* auf der *Kugel* interpretirt werden kann; die andere dagegen entspricht immer der Geometrie auf einer *Fläche constanter positiver Krümmung*, die aber einen anderen *Zusammenhang* hat, als die Kugel. Siehe darüber die Betrachtungen von Klein in seinen schon citirten Vorlesungsheften, VI, Hft. 1, p. 243—293 und unsere Angaben auf S. 626.

§ 6. Vollständiges Axiomensystem der Geometrie.

Bisher haben wir uns in diesem Kapitel mit der Frage über die Stellung, welche das Parallelenaxiom in der Geometrie einnimmt, beschäftigt; diese Frage ist jedoch eigentlich nur eine untergeordnete gegenüber der viel weitergehenden nach einem vollständigen System voneinander unabhängiger Axiome und der Stellung dieser Axiome untereinander.

Sie wurde zuerst von M. Pasch in seinen *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882 behandelt. Eine andere sehr tiefgehende Behandlung dieses Problems verdankt man dann Veronese, *Grundzüge der Geometrie*, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894. Veronese hat vor allen Dingen den Versuch gemacht, eine von dem Archimedischen Axiom unabhängige Geometrie aufzubauen.

Bei dieser Gelegenheit sei ferner auf die *Elementi di geometria* von Veronese, Verona-Padova, Fratelli Drucker, 1897, 2. Ausg., 1901 hingewiesen, welche das erste für Mittelschulen bestimmte Lehrbuch der Elementargeometrie darstellen, das den heutigen Anforderungen an eine strenge Begründung zu genügen sucht.

Ausser diesen eben citirten Werken wollen wir noch die folgenden Arbeiten, die sich mit den Axiomen beschäftigen, anführen: Peano, *Sui fondamenti della geometria, Rivista di Matematica* 1894; Ingrami, *Elementi di geometria per le scuole secondarie superiori*, Bologna 1899; Pieri, *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo, Mem. Acc. Torino,* 1899. Ganz besonders sind aber die ausgezeichneten Untersuchungen von Hilbert, *Grundlagen der Geometrie,* Leipzig 1899 zu nennen, die jeder Mathematiker studiren sollte.

Hilbert theilt das von ihm verwandte Axiomensystem in fünf Gruppen ein:

I. Axiome der Verknüpfung (die eine Verknüpfung zwischen den Begriffen: Punkt, Gerade, Ebene darstellen),

II. Axiome der Anordnung (die den Begriff „zwischen“ definiren und auf Grund dieses Begriffs die Anordnung der Punkte auf einer Geraden, in der Ebene und im Raum ermöglichen),

III. Axiom der Parallelen,

IV. Axiome der Congruenz,

V. Axiom der Stetigkeit oder Archimedisches Axiom.

Die erste Gruppe umfasst 7, die zweite 5, die dritte 1, die vierte 6, die fünfte 1 Axiom.

Um einen Begriff von diesen Axiomen zu geben, führen wir einige von ihnen in Hilbert's Nummerirung und Fassung an:

I_1. *Zwei von einander verschiedene Punkte bestimmen stets eine Gerade.*

I_2. *Irgend zwei von einander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen stets diese Gerade.*

I_7. *Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte, in jeder Ebene wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte, im Raum gibt es wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.*

II_1. *Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.*

Wir heben dann nur noch *das Archimedische Axiom* in Hilbert's Fassung hervor:

V. *Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man construire dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ so, dass A_1 zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4, u. s. w. liegt, und überdies die Strecken*

$$AA_1, \quad A_1A_2, \quad A_2A_3, \quad A_3A_4, \ldots$$

einander gleich sind; dann gibt es in der Reihe der Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ stets einen solchen Punkt A_n, dass B zwischen A und A_n liegt.

Ueber die Geschichte dieses *Archimedischen Axioms*, das schon auf ältere Geometer zurückzuführen ist, vergleiche M. Cantor, *Gesch. der Math.*, 1, p. 229; ferner O. Stolz, *Math. Ann.*, 22.

Hilbert hat für seine in den Gruppen III, IV, V enthaltenen Axiome ihre Unabhängigkeit von den übrigen nachgewiesen. Statt der Hilbert'schen Axiome kann man auch andere zu Grund legen, wie wir z. B. über verschiedenartige Fassungen des Parallelenaxioms schon in § 2 gesprochen haben.

Es empfiehlt sich, mit den Hilbert'schen Untersuchungen die hervorragende Abhandlung von F. Schur, *Ueber die Grundlagen der Geometrie, Math. Ann.*, 55 zu vergleichen. Man findet dort eine andere Fassung der Axiome und unter Anderem auch den Nachweis, dass sich die Hilbert'schen Axiome der Gruppen I und II noch reduciren lassen (*Math. Ann.*, 55, p. 271).

Von den durch diese Untersuchungen erzielten Resultaten sei vor Allem hervorgehoben, dass der Aufbau der projectiven Geometrie, vorzüglich der Beweis des Fundamentalsatzes:

„Eine projective Beziehung zwischen zwei Geraden ist dadurch bestimmt, dass drei Punkten der einen Geraden drei Punkte der anderen als entsprechend zugewiesen werden“,

unabhängig von dem Parallelenaxiom (v. Staudt, *Geometrie der Lage;* Klein, *Math. Ann.*, 4, 6) und unabhängig von dem Archimedischen Axiom (F. Schur, *Ueber den Fundamentalsatz* ·· *projectiven Geometrie, Math. Ann.*, 51) ist. Durch Hilbert ist der strenge Nachweis geführt, dass man den Fundamentalsatz nicht lediglich mit Hülfe der Axiome der Verknüpfung und Anordnung, die man als projective Axiome bezeichnet, beweisen kann; entweder muss man zu den erwähnten Axiomen noch sämmtliche Congruenzaxiome oder das Axiom des Archimedes in seiner projectiven Fassung hinzunehmen (Kap. VI der Hilbert'schen Grundlagen).

Auch die elementare Proportionslehre der Euclidischen Geometrie ist, wie diese Untersuchungen lehren, von dem Archimedischen Axiom unabhängig. Dies geht schon aus den Untersuchungen von Schur in seinem *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Leipzig 1898 hervor, ist aber vorzüglich von Hilbert, l. c. dargethan worden.

Bezüglich der Fragen dieses Paragraphen sei auch noch auf die Schriften von F. Klein, *Zur ersten Vertheilung des Lobatschefskij-Preises, Math. Ann.*, 50 und auf Hölder, *Anschauung und Denken in der Geometrie*, Leipzig 1900 verwiesen.

Auf die Verwerthung des Archimedischen Axioms in seiner projectiven Fassung zum Beweis des Fundamentalsatzes hat Klein in dem eben citirten Aufsatz hingewiesen. (Vergl. auch Schur, *Math. Ann.*, 51, p. 402; 55, p. 274).

Man kann den Fundamentalsatz auch mit Hülfe der Axiome der Anordnung und Verknüpfung beweisen, wenn man noch ein Axiom über Punkte, die durch Grenzprocesse definirt sind, herbeizieht. Diesem Axiom kann man etwa folgende Form geben: *Jeder Punkt, der durch einen convergenten unendlichen Process definirt wird, soll wirklich existiren. (Axiom von Georg Cantor, Math. Ann.,* 5. Vergl. F. Klein, *Math. Ann.*, 6.)

Namenregister.

Wir machen darauf aufmerksam, dass das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik seit dem Jahr 1868 über alle Erscheinungen der mathematischen Literatur berichtet und daher ein sehr wichtiges, fast unentbehrliches Hülfsmittel darstellt.

Die Zahlen, vor denen ein S. steht, beziehen sich in diesem Register, wie in den folgenden, auf die Seiten des Textes. Auf den hinter dem Wort „ausserdem“ aufgeführten Seiten ist der Name des Autors ohne Angabe einer seiner Schriften citirt.

Sachregister.

Nach Autoren benannte Theoreme, Formeln, Flächen, Curven etc.

Zusätze und Berichtigungen zu Band 1.

S. 8, Z. 16. **Füge hinzu:** Die Quaternion genügt schon der Gleichung 2^{ten} Grades:

$$z^2 - 2a_0 z + (a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) = 0;$$

wenn diese Gleichung mit z multiplicirt und dann an die Stelle von z^2 der aus ihr selbst entnommene Werth gesetzt wird, so erhält man die im Text angegebene Gleichung 3^{ten} Grades.

Zu der Literatur über die Quaternionen füge hinzu: Graefe, *Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen,* Leipzig 1883.

„ 23 und 24. Bemerkenswerth sind noch die folgenden Formeln:

$$\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$1 \cdot \binom{n}{k} + 2 \cdot \binom{n-1}{k} + \cdots + (n-k+1)\binom{k}{k} = \binom{n+2}{k+2},$$

$$\binom{2}{2}\binom{n}{k} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{n-k+2}{2}\binom{k}{k} = \binom{n+3}{k+3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{h}{h}\binom{n}{k} + \binom{h+1}{h}\binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{n-k+h}{h}\binom{k}{k} = \binom{n+h+1}{k+h+1}.$$

„ 37, Z. 9 v. u. Lies exercices statt exercises.

„ 60 und 61. Die Werthe von s_p, welche den Werthen der Function entsprechen, die Riemann mit $\zeta(p)$ bezeichnete, sind für gerade p als Functionen von p bekannt; für beliebige ungerade p lässt sich dagegen eine ähnliche allgemein gültige Formel nicht angeben. Siehe Lerch, *Jornal de sciencias math. e astr.,* Porto 1901.

„ 61 und 72. Die Euler'sche Constante ist, wie im Kapitel 18, mit A zu bezeichnen, nicht mit C.

„ 92, Z. 3. Ueber den casus irreducibilis bei cubischen Gleichungen vergl. Hölder, Math. Ann., 38.

„ 96, Z. 13 v. u. muss es am Schluss der Gleichung heissen:

$$\text{„}+x^{p^{\alpha-1}}+1=0\text{“ statt „}+x^{p^{\alpha}-1}=0.\text{“}$$

„ 99, Z. 6. Statt „und früher in Harriot u. s. w.“ lies: der Satz wird auch irrthümlich nach Harriot genannt. Ueber die Geschichte des Satzes vergl. die Anmerkungen der deutschen Ausgabe von Fourier's *Analyse des équat. déterminées*, Ostwald's Klass. der exacten Wiss., N. 127, p. 247.

S. 99. In der Fussnote lies: *Fourier* statt *Jourien.*

„ 141, Z. 7, 6, 5, 4, 3 lies hinter der Klammer: „Das Integral ist schon lange bekannt; Lobatto, *Crelle,* 9 hat eine einfache Methode zu seiner Ermittelung angegeben" statt „siehe Lobatto, *Crelle,* 9".

„ 142, Z. 11 lies:

$$„\int \log (a + \cos x)\, dx = \int \frac{da}{\sqrt{a^2 - 1}} \arccos \frac{1 + a \cos x}{a + \cos x}, \quad a > 1,$$

die Formel soll die Ermittelung des bestimmten Integrals zwischen 0 und π erleichtern", anstatt:

$$„\int \log (a + \cos x)\, dx = \frac{1 + a \cos x}{a + \cos x}."$$

„ 142, Z. 9 v. u. lies 25 statt 15.

„ 145. In den Integralen:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log (\log x)} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \log (\log x)\, dx$$

setze man $\log\left(\log \frac{1}{x}\right)$ an die Stelle von $\log(\log x)$; man füge hinzu, dass der Werth des 1[ten] dieser Integrale von Bierens de Haan auf S. 57 seiner *Nouvelles tables d'intégrales définies,* Leyden 1867 angegeben wurde.

„ 146, vorletzte Zeile lies *ungerade* statt *gerade,* letzte Zeile *gerade* statt *ungerade.*

„ 147, Z. 3 füge hinter $\int_0^\pi \cos ax \cos bx\, dx = 0$ hinzu: „(*a* und *b* sind ganze Zahlen und einander nicht gleich)".

„ 172 am Ende füge hinzu: Ueber die Riccati'sche Gleichung siehe auch: Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen,* Leipzig 1893, Kap. 24.

„ 176, Z. 2. Statt „Ann. di mat., Bd. 19" lies: „Torelli, Ann. di mat., Bd. 19."

„ 177 lies *Brassinne* statt *Brassine.*

„ 197. Zur Einführung in die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen empfehlen wir das 1901 erschienene *Lehrbuch der Differentialgleichungen* von Liebmann und zur ersten Einführung in die functionentheoretische Behandlung der Differentialgleichungen Ludwig Schlesinger: *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln.* Sammlung Schubert, 1900.

„ 198, Z. 17 lies „Charakteristiken" statt „charakteristischen Gleichungen".

„ 201, Z. 7. Anstatt „zwischen den Variabeln integrirbar" setze: „zwischen den Variabeln und *m* willkürlichen Constanten integrirbar" und füge am Schluss des Satzes hinzu: Ueber die Systeme, die mit *m* Relationen zwischen den Variabeln aber einer *kleineren*

Anzahl von Constanten integrirbar sind, siehe E. Pascal, *Rend. Ist. Lomb.*, (2), 35, 1902.

S. 203. Ueber das Pfaff'sche Problem ist inzwischen das treffliche Werk: *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung* von Ed. v. Weber, Leipzig 1900 erschienen. Derselbe Autor hat neuerdings in den Math. Ann., 55 den Fall behandelt, in dem bei dem Pfaff'schen Problem nicht eine einzige Gleichung, sondern ein System von Gleichungen gegeben ist.

„ 203, Z. 16 v. u. Bezüglich der Arbeit von Russjan, deren Resultate nicht exact sind, vergl. E. v. Weber, *Remarques sur un mémoire de* M. Roussiane, Odessa 1901 und *Math. Ann.* 55.

„ 203. Füge am Ende der Seite hinzu: „Nach dem Druck dieses Bandes sind verschiedene Arbeiten von E. Pascal über das Problem der totalen Differentialgleichungen 3ter Ordnung und $n$ter Ordnung und über die Systeme totaler Differentialgleichungen 2ter Ordnung erschienen. Siehe *Compt. Rend.*, 5. März 1900; *Rend. Ist. Lombardo,* (2), 33, 15. März 1900 und 17. Mai 1900; *Math. Ann.*, 54; *Rend. Ist. Lomb.*, (2), 34, 1901. Derselbe Autor hat in letzter Zeit die Invariantentheorie der totalen Differentialausdrücke 2ter Ordnung als Erweiterung der analogen Theorie der gewöhnlichen Pfaff'schen Gleichungen (1ter Ordnung) zu studiren begonnen. Die bezüglichen Arbeiten E. Pascal's sind: *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni di tipo generale ai differenziali totali di second' ordine, Ann. di mat.*, (3), 7, 1901; *Un teorema della teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di second' ordine, Rend. Ist. Lomb.*, (2), 34, 1901.

„ 206, Z. 7 lies „Transformation" statt „Substitution".

„ 255. Nach dem Druck des ersten Bandes ist noch das ausgezeichnete Lehrbuch der Variationsrechnung von A. Kneser, 1900 erschienen. Ferner hat Hilbert durch neue Methoden die Variationsrechnung in hervorragender Weise bereichert. Vergleiche Hilbert's Vortrag vor der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Jahresbericht, Bd. 8, p. 185), die unter Hilbert's Leitung verfasste Dissertation von Charles A. Noble, *Eine neue Methode der Variationsrechnung,* Göttingen 1901, sowie Hilbert, *Ueber das Dirichlet'sche Problem (Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften).*

„ 321. Von Interesse sind auch die folgenden Theoreme: *Das Verschwinden der Functionaldeterminante zweier binärer Formen derselben Ordnung ist nothwendige und hinreichende Bedingung, damit die beiden Formen sich um einen constanten Factor unterscheiden.*

Das Verschwinden der Functionaldeterminante von $n+1$ Formen mit $n+1$ Variabeln und von derselben Ordnung ist nothwendige und hinreichende Bedingung, damit die (linear unabhängig vorausgesetzten) Formen (bis auf einen gemeinsamen Factor) binäre Formen zweier anderer Formen (mit $n+1$ Variabeln) derselben Ordnung oder auch $(n+1)$-stufige Formen von $n+1$ Formen derselben Ordnung seien, deren Functionaldeterminante identisch Null ist.

Näheres über dieses letzte allgemeine Theorem findet man bei Bertini, *Rend. Acc. Lincei,* (5), 10, 1901.

S. 333, Z. 15, 16, 17, 28 lies „*r*" statt „*n*".
„ 338, Z. 3 und 15 v. u. lies „Büschel" statt „Schar".
„ 339. Zu der Literatur über die ternären cubischen Formen füge hinzu: Brioschi, *Ann. di mat.*, (2), 7, p. 189, worin die Zerlegung in drei lineare Formen, und *Atti Acc. Lincei*, (2), 3, 1875—76, p. 89, worin die Zerlegung in eine lineare und eine quadratische Form behandelt wird.
„ 341. Zu der Literatur über die biquadratischen ternären Formen füge hinzu: Brioschi, *Ann. di mat.*, (2), 7, p. 202 und *Atti Acc. Lincei*, (2), 3, 1875—76, p. 91.
„ 345, Z. 9 lies „der drei Fälle" statt „der beiden Fälle".
„ 353, Z. 20. Statt *éspaces* lies *espaces*.
„ 365, Z. 15 v. u. Statt *Aufsatz* lies *Buch*.
„ 446. Eine weitere Arbeit über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen ist von Halphen, *Journ. de math.*, (4), 5, 1889, reproducirt in seinem *Traité des fonctions elliptiques*, 3, p. 151. Sie handelt speciell von der Multiplication mit $\sqrt{-23}$. Mit demselben Gegenstande beschäftigt sich auch Brioschi, *Ann. di mat.*, (2), 24, 1896. Man vergleiche namentlich den Artikel von H. Weber, *Ueber complexe Multiplication* in der Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. 1, p. 715.
„ 456. Es heisst im Sing. „das Quadrupel" und nicht „die Quadrupel".
„ 477. In der Mascheroni'schen Formel ist, wie auf S. 145, $\log(\log x)$ in $\log\left(\log\frac{1}{x}\right)$ umzuändern.
„ 482, Z. 16. Füge hinzu: Neuerlich hat sich Landau, *Crelle*, 123 mit diesem von Legendre vermutheten Satz beschäftigt. Er lautet, präciser formulirt: *Nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ lässt sich eine endliche Anzahl von Intervallen angeben, deren Gesammtlänge $<\delta$ ist, derart, dass der Werth von $\Gamma(z)$ für jedes reelle Argument mittelst einer endlichen Anzahl algebraischer Operationen durch die Werthe ausdrückbar ist, welche die Gesammtfunction für eine endliche Anzahl passend gewählter Argumente annimmt, welche diesen Intervallen angehören.*
„ 486, Z. 6 v. u. setze auf der rechten Seite der Gleichung $z^{-1}\log(1+z)$ statt $z\log(1+z)$.
„ 489, Z. 2 v. u. Statt „*Math. Ann.*, 40 und" lies „*Math. Ann.*, 40; *Hurwitz*, ib., 38 und".
„ 503. Füge hinzu: Das allgemeine Integral der Lamé'schen Gleichung (der Gleichung Z. 7 v. o.) hat Hermite gefunden, *Feuilles lithographiées du Cours de 1872 à l'école polytechnique*. Vergl. hierzu: E. Picard, *Traité d'analyse*, t. 3, p. 406 u. ff.
„ 516, Z. 3. Lies $3^{2^{2^n}}-1$ statt $3^{2^{2^n}}+1$ und füge hinzu: Mit Ausnahme des Falles $n=0$.
„ 516, Z. 17 v. u. Füge hinzu: Dieses Theorem von Sophie Germain gründet sich auf die einfache Identität:

$$a^4+4=(a^2-2a+2)(a^2+2a+2).$$

S. 516. Bemerkenswerth ist auch das folgende sogenannte Goldbach'sche Theorem, das sich aus der Erfahrung ergiebt und nicht bewiesen ist (Briefe Goldbach's und Euler's vom 7. und 30. Juni 1742; *Correspondance math. et phys. de quelques célèbres géomètres du 18me siècle,* vol. 1, St. Petersburg, 1843, S. 127 u. 135): *Jede gerade Zahl ist immer die Summe zweier Primzahlen.* Siehe Stäckel, *Gött. Nachr.*, 1896, S. 292; Landau, *Gött. Nachr.*, 1900.

„ 518, Z. 3 v. u. Statt „Piltz, Diss." lies „Piltz, Habilitationsschrift".

„ 519, Z. 5. Füge hinzu: Hadamard, *Bull. de la soc. math. de France,* 24, 1896.

„ 519, Z. 8 und 9. Tschebyscheff hat nur bewiesen, dass, wenn $\lim\limits_{x=\infty}\left(\frac{x}{\varphi(x)} - \log x\right)$ existirt, der Grenzwerth -1 ist; die Existenz des lim folgt erst aus den 1899 von de la Vallée-Poussin bewiesenen Sätzen.

„ 518 und 519. Zu den Arbeiten über die Primzahlen füge noch hinzu: Mangoldt, *Crelle,* 119; Landau, *Bull. de la soc. math. de France,* 28, 1900; Torelli, *Sulla totalità dei numeri primi sino ad un limite assegnato, Atti Acc. delle scienze di Napoli,* (2), 11, 1901, preisgekrönte Arbeit, welche alle Resultate in Bezug auf die Primzahlen enthält, zu denen man bis jetzt gekommen ist.

„ 520, Z. 17. Die Function μ nennen einige Autoren auch die Mertens'sche; sie ist aber vor Mertens bekannt gewesen; schon Möbius hat sich mit ihr beschäftigt. Zwei wichtige Formeln über sie sind:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n} = -1.$$

Die erste Formel wurde von Euler, *Introd. in analysin infinit.*, 1, Lausanne 1748, ch. 15, n° 277 angegeben und zuerst von v. Mangoldt, *Berl. Sitzungsber.*, 1897, p. 835, dann von Landau, *Dissert.*, Berlin 1899 und von de la Vallée-Poussin, Kap. 6 seines auf S. 519 citirten Aufsatzes über die Riemann'sche Function $\zeta(s)$ bewiesen. Den zweiten Satz hat ohne strengen Beweis Möbius, *Crelle,* 9, 1832, p. 122 angegeben und später Landau, *Compt. Rend.*, 1899; *Math. Ann.*, 54 bewiesen.

„ 521, Z. 13 v. u. Füge hinter „die Function $E(x)$" hinzu: „auf elementarem Wege in die schon von Fourier gekannten trigonometrischen Reihen etc."

„ 587, Namenregister, Z. 15 v. o. lies 478 statt 488.

„ 587, „ lies *Armenante* statt *Armenate.*

„ 587, „ Z. 6 v. u. lies 317 statt 316.

„ 588. Der unter Bessel aufgeführte Aufsatz: Math. Ann., 1, S. 290, 298 ist von A. Bessel, die anderen Arbeiten sind von dem berühmten Astronomen Fr. W. Bessel.

„ 593, lies *Dostor* statt *Doster.*

S. 594, Z. 8 schiebe zwischen S. und der Zahl 480 die Zahlen 473, 475 ein.
„ 594 ist zu Fourier hinzuzufügen: *Analyse des équat. déterm.*, Paris 1831, p. 99.
„ 595, Z. 4 v. u. schalte zwischen die Zahlen 269 und 292 die Zahl 278 ein.
„ 595 füge zu den Citaten unter Gordan hinzu: *Crelle*, 69; *Math. Ann.*, 2, S. 278.
„ 596 schreibe Halphen statt Halphén.
„ 597. Harbordt ist auch auf S. 290 citirt.
„ 598. Holzmüller ist auf S. 366 citirt, nicht auf S. 336.
„ 599 ist der Absatz mit Jourien zu streichen.
„ 599. Zu Klein füge hinzu: Ausserdem S. 374.
„ 601, Namenregister, füge hinzu: *Laplace*, Mém. de l'Ac. de Paris, 1764, S. 91; ib., 1772, S. 91, 175; ib., 1778, S. 196, 198; ib., 1779, S. 198; Traité de mécanique céleste, 5 Bde., Paris 1799—1825, 2. éd., ib., 1829—1839, S. 492, 497; Mém. Sav. étr., 1785, S. 497; Théorie analytique des probabilités, Paris 1812, 1814, 1820, 4. éd., ib., 1847, S. 573.
„ 602. Bei Liouville füge hinzu: *Journ. de math.*, (2), 2, p. 516.
„ 603. Die unter Meyer, Franz aufgeführten Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale sind nicht von Professor Dr. Franz Meyer in Königsberg, sondern von Dr. phil. Gustav Ferdinand Meyer, ehemal. Privatdocenten an der Universität Göttingen, und sind bei Teubner erschienen.
„ 603, schreibe *Méan* statt *Méant.*
„ 606. lies *Puissant* statt *Puisant.*
„ 607, zu Scheffers füge hinzu: *Math. Ann.*, 1891, 1893, S. 9.
„ 611, schreibe Wiman statt Wimann.
„ 611, die unter Weber, H. aufgeführte Arbeit: *Rend. Palermo*, 12, S. 203 ist nicht von Professor Dr. Heinrich Weber, sondern von dem Privatdocenten Dr. Eduard v. Weber in München.

Zu Band 2.

S. 16, Z. 15 v. u. lies „Kap. 5, § 4 und Kap. 15, § 2" statt „Kap. 15, § 3".
„ 67, Z. 9 lies „1779" statt „1799".
„ 73, Z. 14 lies *„Picquet"* statt *„Piquet"*.
„ 77, Z. 2 v. u. lies „vier" statt „drei".
„ 97. Schalte man nach Z. 5 ein: „*Schliessungsinvarianten* sind solche, die, gleich Null gesetzt, die Bedingung angeben, unter welcher dem ersten Kegelschnitt eingeschriebene und dem zweiten umschriebene Polygone existiren. *Sie sind Functionen der beiden anharmonischen Verhältnisse* α, α' *der vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte, wenn diese Punkte als dem ersten bez. dem zweiten Kegelschnitt angehörig betrachtet werden.*

Bemerkenswerth ist der Satz:

Es giebt Vierseite, welche dem ersten Kegelschnitt eingeschrieben und dem zweiten umschrieben sind, wenn

$$(\alpha'^2 - \alpha)(\alpha'^2 - 2\alpha' + \alpha)(\alpha'^2 - 2\alpha'\alpha + \alpha) = 0 \textit{ ist.}$$

Dreiecke dagegen, welche dem ersten eingeschrieben und dem zweiten umschrieben sind, existiren, wenn

$$\alpha^2 - 2\alpha'(2\alpha'^2 - 3\alpha' + 2)\alpha + \alpha'^4 = 0 \text{ ist.}$$

Ueber die Schliessungsbedingungen für Polygone von einer grösseren Anzahl von Seiten siehe Halphen, *Fonct. ellipt.*, Bd. 2, p. 377.

S. 124, Z. 5 v. u. lies „Seydewitz" statt „Seidewitz".

„ 131, Z. 26. Füge hinter „ausdrücken" hinzu: Lüroth hat nachgewiesen, dass die Coordinaten eines Punkts einer unicursalen Curve sich stets derartig als rationale Functionen eines Parameters darstellen lassen, dass die Werthe des Parameters und die Punkte der Curve sich gegenseitig ein-eindeutig entsprechen. Lüroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven, Math. Ann.*, 9, 1875, p. 163.

„ 158, Z. 6 v. u. füge hinzu: Der Nöther'sche Beweis kann nicht als vollständig erbracht angesehen werden. Vergl. Segre, *Atti Acc. Torino*, 36, 1901. Auf die Arbeit von Segre folgte ein Aufsatz von Castelnuovo, *Atti Acc. Torino*, 36, 1901, in dem der Satz streng bewiesen wird.

„ 162, Z. 7. Lies 1882 statt 1883.

„ 181, Z. 12 lies „1706" statt „1704".

„ 181, Z. 18 lies *„Bruxelles"* statt *„Paris"*.

„ 217, Z. 4 lies „1857" statt „1856".

„ 232, Z. 5 lies *Tanturri* statt *Tanturini*.

„ 271, Z. 5 v. u. lies *„Prag. Berichte*, 1883" statt *„Prag. Berichte*, 1882".

„ 279, Z. 13 lies „Eckardt" statt „Eckhardt".

„ 337, Z. 15 lies „5 Unterfälle" statt „4 Unterfälle".

„ 370, Z. 20 lies: „das Theorem für rationale Flächen" statt „dieses Theorem".

„ 402, Z. 8 lies *„Mem. Acc. Torino*, (2), 36, 1884" statt *„Atti Acc. Torino*, 36, 1884".

„ 430, Z. 5 v. u. lies „Correspondenzprincip" statt „Coincidenzprincip".

„ 460. Schreibe „equazioni intrinseche" statt „equazioni intrinsiche".

„ 475, Z. 15 v. u. lies *„Ann. di mat.*, (2), 1, 1867" statt *„Ann. di mat.*, (1), 1, 1867".

„ 476, Z. 8 füge hinzu: Neuerdings hat Bianchi, *Rend. Acc. Lincei*, (5), 10, December 1901, die folgenden Sätze bewiesen:

Auf einer beliebigen Fläche lässt der Ort der Osculationskreise der Krümmungslinien eines Systems längs einer Krümmungslinie des 2ten Systems diese Kreise als Krümmungslinien zu.

Die Fläche, welche der Ort der Osculationskreise einer beliebigen Raumcurve ist, lässt diese Kreise als Krümmungslinien zu.

„ 502, Z. 18 v. u. lies *„Ann. di mat.*, (1), 7" statt *„Ann. di mat.*, (2), 7".

„ 502, Z. 19 lies *„Journ. de Liouville"* statt *„Crelle"*.

„ 514, Z. 6 v. u. lies „Curve" statt „Fläche".

„ 526, Z. 9 v. u. lies „1825" statt „1826".

„ 564, Z. 13 lies „1894" statt „1864".

„ 564, Z. 18 lies „1801" statt „1809".

S. 582, Z. 18 lies „1899" statt „1900".

„ 583, Z. 2 lies „Cayley, *6. Memoir upon quantics, Phil. Trans.*, 1859" statt „Cayley, *Phil. Trans.*, 93, 1859".

„ 606. Füge hinzu: Bemerkenswerth ist das Theorem von Schur: *Wenn die Riemann'sche Krümmung eines Raums in jedem einzelnen Punkt nach jeder beliebigen Flächenorientirung constant ist, so kann sie auch nicht von Punkt zu Punkt variiren, und der Raum ist von constanter Krümmung.* Schur, *Math. Ann.*, 27; Bianchi, *Rend. Acc. Lincei*, (5), 11. 1. Sem. 1902.

„ 636, Z. 10 v. u. Soeben erscheint in den *Transactions of the American mathematical society*, Vol. 3, January 1902 eine Arbeit von E. H. Moore: *On the projective axioms of geometry.* Diese Arbeit untersucht die von Hilbert sogenannten Axiome der Verknüpfung und Anordnung, hält zwar Schur's Bemerkungen über die Reduction der Hilbert'schen Axiome der Gruppen I und II nicht für zutreffend, kommt aber auch zu dem Schluss, dass die Hilbert'schen Axiome der Gruppen I und II sich reduciren lassen.

„ 664. Von den unter Torelli aufgeführten Arbeiten ist die erste: *Rend. Acc. Lincei*, 1890, S. 561 von Prof. Tonelli zu Rom, die zweite: *Sulla totalità* etc. von Prof. Torelli zu Palermo.

Netto, E., Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. 1882. n. *M.* 6.80.

——— Lehrbuch der Kombinatorik. 1902. geb. n. *M.* 9.—

Neumann, C., das Dirichletsche Prinzip in seiner Anwendung auf die Riemannschen Flächen. 1865. n. *M.* 1.80.

——— Theorie der Besselschen Funktionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunktionen. 1867. n. *M.* 2.—

——— Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential. 1877. n. *M.* 10.—

——— über die peripolaren Koordinaten. 1880. n. *M.* 1.50.

——— über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes. 1881. n. *M.* 7.20.

——— Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. 2. Aufl. 1884. n. *M.* 12.—

——— über die Kugelfunktionen P_n und Q_n, insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke $P_n\,(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ und $Q_n\,(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ nach dem Cosinus des Vielfachen von Φ. 1886. n. *M.* 2.40.

Neumann, F., Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen. 1878. n. *M.* 8.—

——— Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der Universität Königsberg. Herausgegeben von seinen Schülern in zwanglosen Heften.

I. Heft:	Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion. 1881. n. *M.* 3.60.
II. —	Einleitung in die theoretische Physik. Herausgegeben von C. Pape. 1883. n. *M.* 8.—
III. —	Vorlesungen über elektrische Ströme. Herausgegeben von K. von der Mühll. 1884. n. *M.* 9.60.
IV. —	Vorlesungen über theoretische Optik. Herausgegeben von E. Dorn. Mit einem Bildnis Neumanns in Lichtdruck. 1885. n. *M.* 9.60.
V. —	Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper und des Lichtäthers. Herausgegeben von O. E. Meyer. 1885. n. *M.* 11.60.
VI. —	Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Herausgegeben von C. Neumann. 1887. n. *M.* 12.—
VII. —	Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität. Herausgegeben von A. Wangerin. 1891. n. *M.* 8.—
VIII. —	Vorlesungen über die Wärme. Herausgegeben von J. Pernet. [In Vorbereitung.]

Pascal, E., die Variationsrechnung. Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Schepp. 1899. In Leinw. geb. n. *M.* 3.60.

——— die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die Gesamtheit der neueren Forschungen. Berechtigte deutsche Ausgabe von H. Leitzmann. 1900. In Leinw. geb. n. *M.* 10.—

Rausenberger, O., Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variabeln mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Diskontinuitätspunkte nebst einer Einleitung in die allgemeine Funktionentheorie. 1884. n. *M.* 10.80.

——— die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. 1887. n. *M.* 5.—

Rausenberger, O., Lehrbuch der analytischen Mechanik. 2., wohlfeile Ausgabe. 2 Bände in einem Bande. I. Bd.: Mechanik der materiellen Punkte; II. Bd.: Mechanik der zusammenhängenden Körper. 1893. n. ℳ 8.—

Riemann's, B., gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlafs. Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. 2. Auflage bearbeitet von H. Weber. Mit einem Bildnis Riemanns. 1892. n. ℳ 18.—

Rost, G., Theorie der Riemann'schen Thetafunction. geh. ℳ 4.—

Routh, E. J., die Dynamik der Systeme starrer Körper. In 2 Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autor. deutsche Ausgabe von A. Schepp. Mit einem Vorwort von F. Klein. 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Rudio, F., Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Mit vier Abhandlungen (in deutscher Übersetzung) über die Kreismessung von Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. 1892. n. ℳ 4.—

Salmon, G., Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. 2. Aufl. 1877. n. ℳ 10.—

Schlesinger, L., Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. 2 Bände. 1895—98. n. ℳ 50.—

Schlömilch, O., Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zwei Teile. I. Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 4. Aufl. 1887. n. ℳ 6.—; II. Teil: Aufgaben aus der Integralrechnung. 4. Aufl. von R. Henke. 1900. n. ℳ 8.—

Schotten, H., Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. In 3 Bänden. I. Bd. 1890. n. ℳ 6.—, geb. ℳ 7.—; II. Bd. 1893. n. ℳ 8.—, geb. ℳ 9.—; III. Bd. [unter der Presse].

Schröder, E., Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). 3 Bände. I. Bd. 1890. n. ℳ 16.—; II. Bd., 1. Abt. 1891. n. ℳ 12.—. [Die 2. (Schlufs-)Abteilung folgt 1902]; III. Bd. (A. u. d. T.: Algebra und Logik der Relative.) 1. Abt. 1895. n. ℳ 16.—. [Die 2. (Schlufs-)Abteilung folgt im Laufe d. J.]

Schubert, H., Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. 1897. In Leinw. geb. n. ℳ 4.—

Schupmann, L., die Medialfernrohre. Eine neue Konstruktion für grofse astronomische Instrumente. 1898. n. ℳ 4.80.

Serret, J.-A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsche Übersetzung von G. Wertheim. 2 Bände. 2. Aufl. 1878—79. n. ℳ 19.—

——— Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von A. Harnack. 2. Aufl., von G. Bohlmann. 3 Bände. I. Bd.: Differentialrechnung. 1897. n. ℳ 10.—; II. Bd.: Integralrechnung. 1899. n. ℳ 8.—; III. Bd.: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. [Unter der Presse.]

Simon, M., Euclid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit 192 Figuren im Text. 1901. geh. n. *M.* 5.—

Stäckel, P., und **F. Engel**, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gaufs, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. 1895. n. *M.* 9.—

Steiner's, J., Vorlesungen üb. synthetische Geometrie. 2 Teile. I. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearb. von C. F. Geiser. 3. Aufl. 1887. n. *M.* 6.—; II. Teil: Die Theorie der Kegel- schnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften, bearbeitet von H. Schroeter. 3. Aufl., durchgesehen von R. Sturm. 1898. n. *M.* 14.—

Stolz, O., Vorlesungen üb. allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet. 2 Teile. I. Teil: Allgemeines u. Arithmetik der reellen Zahlen. 1885. n. *M.* 8.—; II. Teil: Arithmetik der komplexen Zahlen mit geometr. Anwendungen. 1886. n. *M.* 8.—

—— Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 3 Teile. I. Teil: Reelle Veränderliche und Funktionen. 1893. n. *M.* 8.—; II. Teil: Komplexe Veränderliche und Funktionen. 1896. n. *M.* 8.—; III. Teil: Die Lehre von den Doppelintegralen. Eine Ergänzung zum I. Teile des Werkes. 1899. n. *M.* 8.—

Stolz, O., und **J. A. Gmeiner**, theoretische Arithmetik. In 2 teilungen. I. Abteilung. Zweite umgearbeitete Aufla Abschnitte I—IV des I. Teiles der Vorlesungen über all Arithmetik von O. Stolz. 1901. geh. n. *M.* 2.40; geb.

Study, E., Methoden zur Theorie der ternären Formen. 18

—— sphärische Trigonometrie, orthogonale Su elliptische Funktionen. 1893. n. *M.* 5.—

—— Geometrie der Dynamen. Die Z Kräften und verwandte Gegenstände der G I. Lieferung. Mit in den Text gedruc n. *M.* 7.60.

Volkmann, P., Vorlesungen über di Rücksicht auf die elastische schauung. 1891. n. *M.* 11.

—— erkenntnistheoretis und ihre Beziehungen gemein wissenschaftli

von Weber, E., Vorle Theorie der A. u. d. T.: biete der geb. n.